

10²
TENSQUARE
MOBILE APP

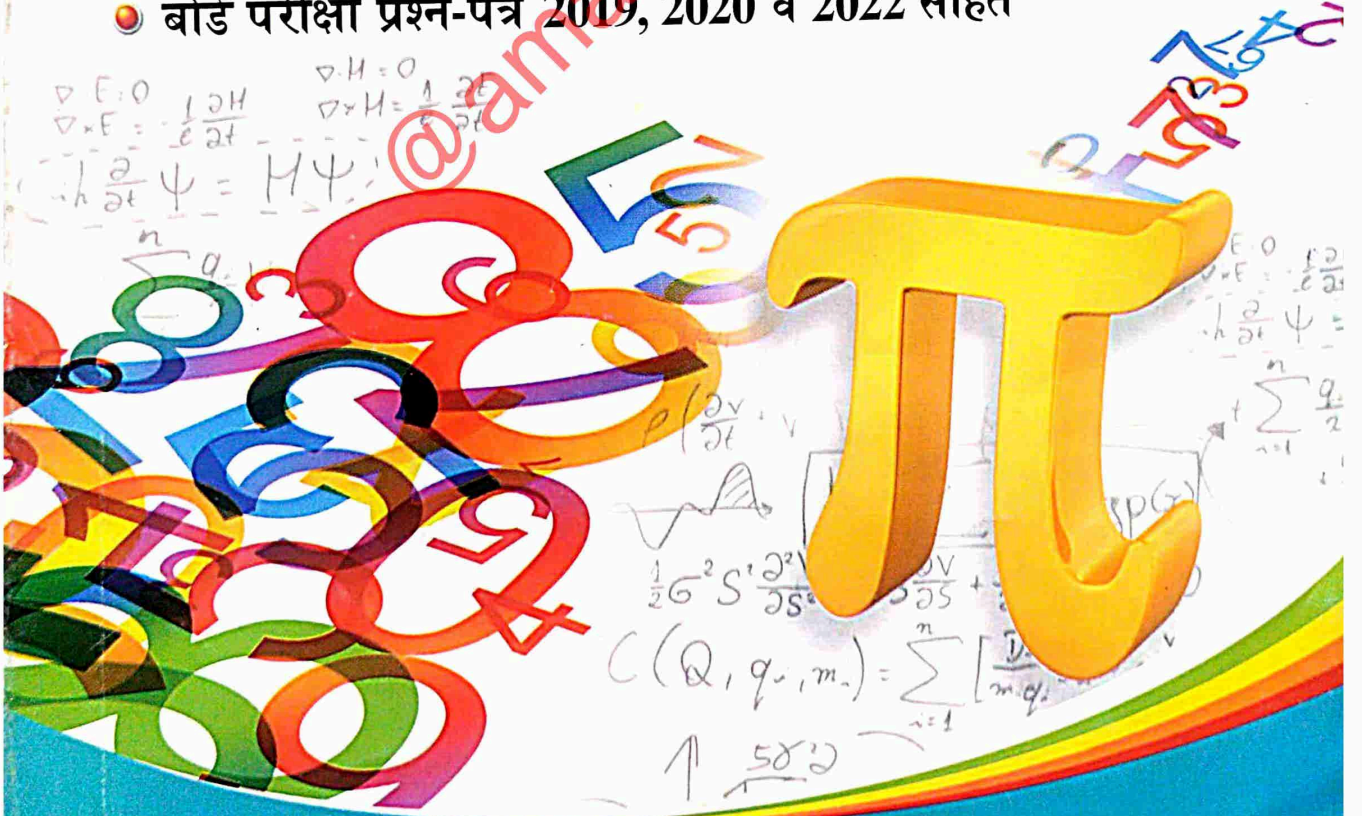
प्रश्न बैंक 2023
के सम्पूर्ण हल
के साथ

परीक्षा अध्ययन 2023

कक्षा X

गणित

- नवीनतम् ब्लू प्रिण्ट पर आधारित चार सेट आदर्श प्रश्न-पत्र (हल सहित)
- बोर्ड परीक्षा प्रश्न-पत्र 2019, 2020 व 2022 सहित



शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी

पहली बार

students unity

मध्य प्रदेश के कक्षा 10 के बोर्ड परीक्षार्थियों के लिए



परीक्षा
अध्ययन
के साथ

विशेषताएँ

- चैप्टरवाइस रिवीजन वीडियोज़
- अनलिमिटेड प्रैक्टिस एवं टेस्ट
- क्विक रिवीजन नोट्स
- विगत वर्षों के परीक्षा प्रश्न-पत्र

विशेष
आकर्षण

लोक शिक्षण संचालनालय, मध्य प्रदेश,
भोपाल द्वारा विभिन्न विषयों के लिए जारी

प्रश्न बैंक 2023

के सम्पूर्ण हल निःशुल्क उपलब्ध

10²

TENSQUARE
100% Exam Ready

www.tensquare.app

Amarwah unity



Amarwah Unity YouTube

SUBSCRIBED



15.9K subscribers • 250 videos

Stand with unity, an educational channel for the helping students & providing study materials







Students Unity

public channel



Description

Paid promotion available contact  
@Unity450_bot
Instagram <https://instagram.com/amarwah450>

Join our PDF Channel <https://t.me/amarwah455>

Paid promotion available contact :-
@Unity450_bot

t.me/amarwah450

Invite Link



Notifications

On



परीक्षा अध्ययन 2023

कक्षा X

मुख्य आकर्षण

- सफलता एवं उच्चतम अंक प्राप्त करने का एक सरल साधन
- नवीन ब्लू प्रिण्ट पर आधारित आदर्श प्रश्न-पत्र के चार सेट हल सहित
- निर्धारित पाठ्यक्रम पर आधारित परीक्षोपयोगी प्रश्नों के स्पष्ट एवं सटीक उत्तर
- बोर्ड परीक्षा प्रश्न-पत्र 2019, 2020 एवं 2022 सहित
- 2023 बोर्ड परीक्षा के लिए सर्वश्रेष्ठ पुस्तक

गणित

बोर्ड द्वारा कम किए गए पाठ्यक्रम पर आधारित वरिष्ठ एवं अनुभवी शिक्षकों की समिति द्वारा रचित

2023 परीक्षा हेतु मान्य नवीन प्रश्न-पत्र प्रारूप एवं अंक विभाजन

क्र. सं.	प्रश्न का स्वरूप	कुल प्रश्न	आबंटित अंक	कुल अंक
1.	वस्तुनिष्ठ प्रश्न	5 (= 30)	1	30
2.	अति लघु उत्तरीय प्रश्न (सभी प्रश्नों में विकल्प)	12	2	24
3.	लघु उत्तरीय प्रश्न (सभी प्रश्नों में विकल्प)	3	3	09
4.	विश्लेषणात्मक प्रश्न (सभी प्रश्नों में विकल्प)	3	4	12
	कुल प्रश्न	18 + 5 = 23		पूर्णांक 75

शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी
पुस्तक प्रकाशक, खजूरी बाजार, इन्दौर

[मूल्य : ₹ 90.00]

2023 बोर्ड परीक्षा हेतु मान्य नवीन ब्लू प्रिण्ट गणित : कक्षा 10

समय : 3 घण्टा]

[पूर्णांक : 75

क्र. सं.	इकाई एवं विषय-वस्तु	इकाई पर आबंटित अंक	वस्तुनिष्ठ प्रश्न 1 अंक	अंकवार प्रश्नों की संख्या			कुल प्रश्न
				2 अंक	3 अंक	4 अंक	
1.	अध्याय 1 : वास्तविक संख्याएँ	6	2	2	—	—	2
2.	अध्याय 2 : बहुपद	5	1	2	—	—	2
3.	अध्याय 3 : दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म	7	1	1	—	1	2
4.	अध्याय 4 : द्विघात समीकरण	5	3	1	—	—	1
5.	अध्याय 5 : समान्तर श्रेढ़ियाँ	5	3	1	—	—	1
6.	अध्याय 6 : त्रिभुज	5	3	1	—	—	1
7.	अध्याय 7 : निर्देशांक ज्यामिति	5	3	1	—	—	1
8.	अध्याय 8 : त्रिकोणमिति का परिचय	5	3	1	—	—	1
9.	अध्याय 9 : त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग	5	2	—	1	—	1
10.	अध्याय 10 : वृत्त	5	2	—	1	—	1
11.	अध्याय 12 : वृत्तों से सम्बन्धित क्षेत्रफल	5	2	—	1	—	1
12.	अध्याय 13 : पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	6	2	—	—	1	1
13.	अध्याय 14 : सांख्यिकी	5	1	—	—	1	1
14.	अध्याय 15 : प्रायिकता	6	2	2	—	—	2
कुल योग		75	5 (30)	12(24)	3(9)	3(12)	18 + 5 = 23

विशेष निर्देश—

➤ 40% वस्तुनिष्ठ प्रश्न, 40% विषयपरक प्रश्न 20% विश्लेषणात्मक प्रश्न होंगे।

1. प्रश्न क्रमांक 1 से 5 तक 30 वस्तुनिष्ठ प्रश्न होंगे। सही विकल्प, रिक्त स्थान, सही जोड़ी, एक वाक्य में उत्तर, सत्य/असत्य सम्बन्धी प्रश्न होंगे। प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक निर्धारित हैं।
2. वस्तुनिष्ठ प्रश्नों को छोड़कर सभी प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प का प्रावधान होगा। यह विकल्प समान इकाई/उप-इकाई से तथा समान कठिनाई स्तर वाले होंगे। इन प्रश्नों की उत्तर सीमा निम्नानुसार होगी—

अति लघु उत्तरीय प्रश्न	02 अंक	लगभग 30 शब्द
लघु उत्तरीय प्रश्न	03 अंक	लगभग 75 शब्द
विश्लेषणात्मक प्रश्न	04 अंक	लगभग 120 शब्द

3. कठिनाई स्तर—40% सरल प्रश्न, 45% सामान्य प्रश्न, 15% कठिन प्रश्न।

विषय-सूची

अध्याय	पृष्ठ संख्या
□ आदर्श प्रश्न-पत्र : सेट—I (हल सहित) : 2023	5 - 9
□ आदर्श प्रश्न-पत्र : सेट—II (हल सहित) : 2023	9 - 14
□ आदर्श प्रश्न-पत्र : सेट—III (हल सहित) : 2023	14 - 19
□ आदर्श प्रश्न-पत्र : सेट—IV (हल सहित) : 2023	19 - 24
1. वास्तविक संख्याएँ [Real Numbers]	25 - 31
2. बहुपद [Polynomials]	32 - 41
3. दो चरों वाले रैखिक समीकरण युग्म [Pair of Linear Equations in Two Variables]	41 - 61
4. द्विघात समीकरण [Quadratic Equations]	61 - 74
5. समान्तर श्रेढ़ियाँ [Arithmetic Progressions]	75 - 90
6. त्रिभुज [Triangles]	90 - 104
7. निर्देशांक ज्यामिति [Co-ordinate Geometry]	104 - 110
8. त्रिकोणमिति का परिचय [Introduction to Trigonometry]	110 - 124
9. त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग [Some Applications of Trigonometry]	124 - 136
10. वृत्त [Circle]	136 - 144
11* रचनाएँ [Constructions]	—
12. वृत्त से सम्बन्धित क्षेत्रफल [Areas Related to Circles]	144 - 161
13. पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन [Surface Areas and Volumes]	162 - 168
14. सांख्यिकी [Statistics]	169 - 178
15. प्रायिकता [Probability]	179 - 187
□ बोर्ड परीक्षा प्रश्न-पत्र : 2019	188 - 191
□ बोर्ड परीक्षा प्रश्न-पत्र : 2020	191 - 195
□ बोर्ड परीक्षा प्रश्न-पत्र : 2022	196 - 199

नोट : तारांकित (*) अध्याय माध्यमिक शिक्षा मण्डल, मध्यप्रदेश, भोपाल द्वारा शैक्षिक सत्र : 2022-23 के लिए पाठ्यक्रम में से हटा दिया गया है।

Students unity

बोर्ड द्वारा वार्षिक/बोर्ड परीक्षा 2023 हेतु
कम की गई पाठ्य-वस्तु/अध्याय

क्र.	इकाई	कम किये गये अध्याय/विषय-वस्तु का नाम
1.	अध्याय 1 : वास्तविक संख्याएँ	1.2 यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका 1.5 परिमेय संख्याओं और उनके दशमलव प्रसारों का पुनर्भ्रमण
2.	अध्याय 2 : बहुपद	2.4 बहुपदों के लिए विभाजन ऐल्गोरिथ्म
3.	अध्याय 3 : दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म	3.4.3 एक रैखिक समीकरण युग्म को हल करने की वज्र-गुणन विधि
4.	अध्याय 7 : निर्देशांक ज्यामिति	7.4 त्रिभुज का क्षेत्रफल
5.	अध्याय 11 : रचनाएँ	सम्पूर्ण अध्याय
6.	अध्याय 13 : पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन	13.4 एक ठोस का एक आकार से दूसरे आकार में रूपान्तरण 13.5 शंकु का छिन्नक
7.	अध्याय 14 : सांख्यिकी	14.5 संचयी बारम्बारता बंटन का आलेखीय निरूपण

गणित : कक्षा X

आदर्श प्रश्न-पत्र : सेट-I

समय : 3 घण्टा]

[पूर्णांक : 75

निर्देश— (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(ii) प्रश्न क्रमांक 1 से 5 तक वस्तुनिष्ठ प्रकार के प्रश्न हैं। निर्देशानुसार हल कीजिए।

(iii) प्रश्न क्रमांक 6 से 23 में आन्तरिक विकल्प दिए गए हैं।

(iv) प्रत्येक प्रश्न के लिए आर्बटित अंक उसके सम्मुख अंकित हैं।

(v) जहाँ आवश्यक हो स्वच्छ एवं नामांकित चित्र बनाइए।

1. सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए—

1 × 6 = 6

(i) समीकरण निकाय $x + 2y + 5 = 0$ और $-3x - 6y + 1 = 0$ का हल होगा :

(a) अद्वितीय हल

(b) कोई हल नहीं

(c) अनन्ततः अनेक हल

(d) दो हल।

(ii) यदि $\frac{1}{2}$ वर्ग समीकरण $x^2 + kx - \frac{5}{4} = 0$ का एक मूल है, तो k का मान है :

(a) 2

(b) -2

(c) $\frac{1}{4}$

(d) $\frac{1}{2}$

(iii) AP : $-3, -\frac{1}{2}, 2, \dots$ का 11वाँ पद है :

(a) 28

(b) 22

(c) -38

(d) $-48\frac{1}{2}$

(iv) मूल-बिन्दु से बिन्दु $P(-6, 8)$ की दूरी है :

(a) 8

(b) $2\sqrt{7}$

(c) 10

(d) 6.

(v) एक पेड़ की छाया $20\sqrt{3}$ मीटर है। यदि पेड़ की ऊँचाई 20 मीटर हो, तो सूर्य का उन्नयन कोण होगा :

(a) 30°

(b) 45°

(c) 60°

(d) 75° .

(vi) यदि एक बिन्दु P से O केन्द्र वाले वृत्त पर PA, PB स्पर्श रेखाएँ परस्पर 80° के कोण पर मुड़ी हैं, तो $\angle POA$ बराबर है :

(a) 50°

(b) 60°

(c) 70°

(d) 80° .

उत्तर—(i) (b), (ii) (a), (iii) (b), (iv) (c), (v) (a), (vi) (a).

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

1 × 6 = 6

(i) समीकरण $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ का विविक्तकर है।

(ii) समान्तर श्रेढ़ी के किसी पद का उसके पूर्ववर्ती पद में अन्तर कहलाता है।

(iii) सभी वर्ग होते हैं।

(iv) किसी बिन्दु की x -अक्ष से दूरी कहलाती है।

(v) वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को कहते हैं।

(vi) r त्रिज्या वाले वृत्त के क्षेत्रफल का सूत्र है।

उत्तर—(i) 0 (शून्य), (ii) सार्वान्तर, (iii) समरूप, (iv) y -निर्देशांक या कोटि, (v) स्पर्श बिन्दु, (vi) πr^2 .

3. सही जोड़ी बनाइए—

1 × 6 = 6

स्तम्भ 'अ'

स्तम्भ 'ब'

- | | |
|--|------------------------------------|
| (i) $1 + \cot^2\theta$ | (a) $2\pi rh$ |
| (ii) $\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)$ | (b) 0 (शून्य) |
| (iii) $\sec(90^\circ - \theta)$ | (c) $\sec \theta$ |
| (iv) बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल | (d) $\operatorname{cosec}^2\theta$ |
| (v) असम्भव घटनाओं की प्रायिकता | (e) 1 (एक) |
| (vi) किसी निश्चित घटना की प्रायिकता | (f) $\operatorname{cosec} \theta$ |

उत्तर—(i) → (d), (ii) → (c), (iii) → (f), (iv) → (a), (v) → (b), (vi) → (e).

4. एक शब्द/वाक्य में उत्तर लिखिए—

1 × 6 = 6

- (i) 3 और 12 का लघुतम समापवर्त्य (LCM) क्या होगा ?
(ii) क्या $(x+1)^2 = 2(x-3)$ द्विघात समीकरण है ?
(iii) यदि किसी $\triangle ABC$ की माध्यिका AD हो, तब $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$, तो यह प्रमेय किस नाम से जानी जाती है ?
(iv) बिन्दु (x_1, y_1) एवं (x_2, y_2) के मध्य-बिन्दु के निर्देशांक लिखिए।
(v) वह रेखा क्या कहलाती है, जो हमारी आँख से सीधे भूमि के समानान्तर जाती है ?
(vi) 1, 2, 3, 4, 5 का समान्तर माध्य क्या है ?

उत्तर—(i) 12, (ii) हाँ, (iii) अपोलोनियस प्रमेय, (iv) $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, (v) क्षैतिज रेखा, (vi) 3.

5. सत्य/असत्य बताइए—

1 × 6 = 6

- (i) प्रत्येक प्राकृत संख्या पूर्ण संख्या होती है।
(ii) घात 2 के बहुपद द्विघात बहुपद कहलाते हैं।
(iii) समान्तर श्रेणी 10, 5, का अगला पद 0 होगा।
(iv) समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार × शीर्षलम्ब होता है।
(v) समरूप वृत्तों के क्षेत्रफल सदैव बराबर होते हैं।
(vi) शंकु का आयतन = $\pi r^2 h$ है।

उत्तर—(i) सत्य, (ii) सत्य, (iii) सत्य, (iv) सत्य, (v) असत्य, (vi) असत्य।

6. "दो क्रमागत घनात्मक पूर्णाकों का गुणनफल 2 से विभाज्य होता है।" यह कथन सत्य है या असत्य। कारण दीजिए।

हल : पृष्ठ 26 पर, प्रश्न 2 देखिए।

अथवा

3825 को अभाज्य गुणनफलों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल : पृष्ठ 26 पर, प्रश्न 1 (iii) देखिए।

7. HCF (306, 657) = 9 दिया है। LCM (306, 657) ज्ञात कीजिए।

हल : पृष्ठ 29 पर, प्रश्न 5 देखिए।

अथवा

अभाज्य गुणन विधि द्वारा पूर्णाकों 6, 72 और 120 के HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

हल : पृष्ठ 28 पर, प्रश्न 4 (iv) देखिए।

8. द्विघात व्यंजक $x^2 - 3$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की जाँच कीजिए।

हल : पृष्ठ 34 पर, प्रश्न 1 (viii) देखिए।

अथवा

द्विघात व्यंजक $6x^2 - 3 - 7x$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की जाँच कीजिए।

हल : पृष्ठ 34 पर, प्रश्न 1 (iii) देखिए।

9. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः 1, 1 संख्या हैं।
हल : पृष्ठ 39 पर, प्रश्न 1 (iv) देखिए।

अथवा

एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$ संख्या हैं।

हल : पृष्ठ 39 पर, प्रश्न 1 (ii) देखिए।

10. $2x + 3y = 11$ और $2x - 4y = -24$ को हल कीजिए और इससे 'm' का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $y = mx + 3$ हो।
हल : पृष्ठ 45 पर, प्रश्न 3 देखिए।

अथवा

दो संख्याओं का अन्तर 26 है और एक संख्या दूसरी संख्या की तीन गुनी है। उन्हें ज्ञात कीजिए।
हल : पृष्ठ 46 पर, प्रश्न 4 (i) देखिए।

11. द्विघात समीकरण $2x^2 + kx + 3 = 0$ में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि उसके दो बराबर मूल हों।
हल : पृष्ठ 65 पर, प्रश्न 3 (i) देखिए।

अथवा

समीकरण $x + \frac{1}{x} = 3$ के मूल ज्ञात कीजिए ($x \neq 0$)।

हल : पृष्ठ 66 पर, प्रश्न 2 (i) देखिए।

12. AP : 21, 18, 15, का कौन-सा पद - 81 है ?
हल : पृष्ठ 79 पर, प्रश्न 2 देखिए।

अथवा

10 और 250 के बीच में 4 के कितने गुणज हैं ?

हल : पृष्ठ 81 पर, प्रश्न 11 देखिए।

13. त्रिभुज PQR की भुजाओं PR और QR पर क्रमशः बिन्दु S और T इस प्रकार स्थित हैं कि $\angle P = \angle RTS$ है। दर्शाइए कि $\triangle RPQ \sim \triangle RTS$ ।
हल : पृष्ठ 92 पर, प्रश्न 2 देखिए।

अथवा

यदि कोई रेखा एक $\triangle ABC$ की भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर प्रतिच्छेद करे तथा BC के समान्तर हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ होगा।

हल : पृष्ठ 94 पर, प्रश्न 2 देखिए।

14. निर्धारित कीजिए कि क्या बिन्दु (1, 5), (2, 3) और (-2, -11) संरेखी हैं ?
हल : पृष्ठ 106 पर, प्रश्न 3 देखिए।

अथवा

x -अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो (2, -5) और (-2, 9) से समदूरस्थ है।

हल : पृष्ठ 107 पर, प्रश्न 1 देखिए।

15. $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।
हल : पृष्ठ 113 पर, प्रश्न 4 (i) देखिए।

अथवा

यदि A , B और C त्रिभुज ABC के अन्तः कोण हों, तो दिखाइए कि

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}.$$

हल : पृष्ठ 114 पर, प्रश्न 10 देखिए।

16. यदि $P(E) = 0.06$ है, तो 'E नहीं' की प्रायिकता क्या होगी ?
हल : पृष्ठ 180 पर, प्रश्न 5 देखिए।

अथवा

दो भिन्न पासों को एक साथ उछाला गया। दोनों पासों के ऊपरी तलों पर आयी संख्याओं का गुणनफल 6 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : पृष्ठ 183 पर, प्रश्न 15 देखिए।

17. दो खिलाड़ी संगीता और रेशमा टेनिस का एक मैच खेलती हैं। संगीता द्वारा मैच जीतने की प्रायिकता 0.62 है। रेशमा के जीतने की प्रायिकता क्या है ?
हल : पृष्ठ 180 पर, प्रश्न 3 देखिए।

अथवा

हरप्रीत दो भिन्न-भिन्न सिक्कों को एक साथ उछालती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह कम-से-कम एक चित प्राप्त करेगी।

हल : पृष्ठ 184 पर, प्रश्न 19 देखिए।

18. आँधी आने से एक पेड़ टूट जाता है और टूटा हुआ भाग इस तरह मुड़ जाता है कि पेड़ का शिखर जमीन को छूने लगता है और इसके साथ 30° का कोण बनाता है। पेड़ के पाद-बिन्दु की दूरी, जहाँ पेड़ का शिखर जमीन को छूता है, 8 m है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
हल : पृष्ठ 127 पर, प्रश्न 1 देखिए।

अथवा

मीनार के आधार से और एक सरल रेखा में 4 m और 9 m की दूरी पर स्थित दो बिन्दुओं से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण पूरक कोण हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई 6 m है।

हल : पृष्ठ 127 पर, प्रश्न 2 देखिए।

19. 5 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PQ केन्द्र O से जाने वाली एक रेखा से बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है कि $OQ = 12$ सेमी। PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
हल : पृष्ठ 138 पर, अति लघु उत्तरीय प्रश्न 2 देखिए।

अथवा

सिद्ध कीजिए कि दो संकेन्द्रीय वृत्तों में बड़े वृत्त की जीवा जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती है, स्पर्श बिन्दु पर समद्विभाजित होती है।

हल : पृष्ठ 138 पर, लघु उत्तरीय प्रश्न 2 देखिए।

20. एक छतरी में आठ ताने हैं, जो बराबर दूरी पर लगे हैं। छतरी को 45 cm त्रिज्या वाला एक सपाट वृत्त मानते हुए दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
हल : पृष्ठ 148 पर, प्रश्न 3 देखिए।

अथवा

संलग्न आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि $PQ = 24$ cm, $PR = 7$ cm तथा O वृत्त का केन्द्र है। ($\pi = 22/7$ का प्रयोग कीजिए।)

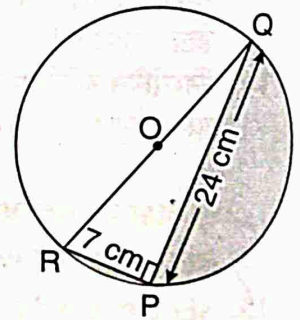
हल : पृष्ठ 148 पर, प्रश्न 4 देखिए।

21. 5 संतरे और 3 सेबों का मूल्य ₹ 35 है तथा 2 संतरे और 4 सेबों का मूल्य ₹ 28 है। तब 1 संतरा तथा 1 सेब का मूल्य ज्ञात कीजिए।
हल : पृष्ठ 55 पर, प्रश्न 10 देखिए।

अथवा

आफताब अपनी पुत्री से कहता है, "सात वर्ष पूर्व मैं तुमसे सात गुनी आयु का था। अब से 3 वर्ष बाद मैं तुमसे केवल तीन गुनी आयु का रह जाऊँगा।" (क्या यह मनोरंजक है?) इस स्थिति को बीजगणितीय एवं ग्राफीय रूपों में व्यक्त कीजिए।

हल : पृष्ठ 55 पर, प्रश्न 1 देखिए।



22. 6 m चौड़ी और 1.5 m गहरी एक नहर में पानी 10 km/h चाल से बह रहा है। 30 मिनट में यह नहर कितने क्षेत्रफल की सिंचाई कर पायेगी जबकि ऊँचाई के लिए 8 cm गहरे पानी की आवश्यकता होती है ?
- हल : पृष्ठ 164 पर, प्रश्न 2 देखिए।

अथवा

एक खिलौना त्रिज्या 3.5 cm वाले एक शंकु के आकार का है जो उसी त्रिज्या वाले एक अर्द्ध गोले पर अध्यारोपित है। इस खिलौने की सम्पूर्ण ऊँचाई 15.5 cm है। इस खिलौने का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : पृष्ठ 165 पर, प्रश्न 1 देखिए।

23. किसी फैक्ट्री के 50 श्रमिकों की दैनिक मजदूरी के निम्नलिखित बंटन पर विचार कीजिए :

दैनिक मजदूरी (₹ में)	500—520	520—540	540—560	560—580	580—600
श्रमिकों की संख्या	12	14	8	6	10

एक उपयुक्त विधि का प्रयोग करते हुए इस फैक्ट्री के श्रमिकों की माध्य दैनिक मजदूरी ज्ञात कीजिए।

हल : पृष्ठ 172 पर, प्रश्न 4 देखिए।

अथवा

यदि नीचे दिए हुए बंटन का माध्यक 28.5 हो, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए :

वर्ग-अन्तराल	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	योग
बारम्बारता	5	x	20	15	y	5	60

हल : पृष्ठ 174 पर, प्रश्न 8 देखिए।

आदर्श प्रश्न-पत्र : सेट—II

1. सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए— 1 × 6 = 6
- (i) $x - 2y = 0$ और $3x + 4y - 20 = 0$ रेखाएँ :
- (a) प्रतिच्छेद करती हैं (b) संपाती हैं
(c) समान्तर हैं (d) इनमें से कोई नहीं।
- (ii) यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c$ के शून्यक α और β हों, तो $\alpha + \beta$ का मान होगा :
- (a) $-b/a$ (b) b/a
(c) alb (d) $-alb$.
- (iii) किसी AP में यदि $d = -4$, $n = 7$ एवं $a_n = 4$, तो a है :
- (a) 6 (b) 7 (c) 20 (d) 28.
- (iv) बिन्दु $A(0, 6)$ एवं $B(0, -2)$ के बीच की दूरी है :
- (a) 6 (b) 8 (c) 4 (d) 2.
- (v) पेड़ की छाया, उसकी ऊँचाई के बराबर है, सूर्य का उन्नतांश (उन्नयन) कोण होगा :
- (a) 30° (b) 60° (c) 90° (d) 45° .
- (vi) एक बिन्दु Q से एक वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाई 24 cm तथा Q की केन्द्र से दूरी 25 cm है, तो वृत्त की त्रिज्या है :
- (a) 7 cm (b) 12 cm (c) 15 cm (d) 24.5 cm.
- उत्तर—(i) (a), (ii) (a), (iii) (d), (iv) (b), (v) (d), (vi) (a).

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

- (i) वर्ग समीकरण में $ax^2 + bx + c = 0$ का विविक्तकर $D = \dots\dots\dots$ है। 1 × 6 = 6
- (ii) समान्तर श्रेणी $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots\dots\dots$ में सार्वान्तर $d = \dots\dots\dots$ है।
- (iii) सर्वांगसम त्रिभुज $\dots\dots\dots$ होते हैं।
- (iv) $(0, y)$ एवं $(x, 0)$ के मध्य दूरी $\dots\dots\dots$ होती है।
- (v) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उसे $\dots\dots\dots$ बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है।
- (vi) त्रिज्यखण्ड की संगत चाप की माप उस चाप की $\dots\dots\dots$ कहलाती है।
- उत्तर—(i) $b^2 - 4ac$, (ii) -1 , (iii) समरूप, (iv) $\sqrt{x^2 + y^2}$, (v) केवल एक, (vi) लम्बाई।

3. सही जोड़ी बनाइए—

- | स्तम्भ 'अ' | स्तम्भ 'ब' |
|--|---------------------------------------|
| (i) $\sec^2 \theta$ | (a) $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ |
| (ii) $\sin 0^\circ$ | (b) $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ |
| (iii) $\tan \theta$ | (c) $\frac{1}{6}$ |
| (iv) शंकु का आयतन | (d) $\frac{1}{3}$ |
| (v) एक पासे को फेंकने पर 5 का गुणक आने की प्रायिकता | (e) 0 |
| (vi) एक पासे को फेंकने पर एक पूर्ण वर्ग आने की प्रायिकता | (f) $\frac{1}{\cos \theta}$ |

उत्तर—(i) → (f), (ii) → (e), (iii) → (a), (iv) → (b), (v) → (c), (vi) → (d).

4. एक शब्द/वाक्य में उत्तर लिखिए—

- (i) 4 एवं 5 का महत्तम समापवर्तक (HCF) क्या होगा ? 1 × 6 = 6
- (ii) यदि a, b और c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ तब द्विघात समीकरण किस रूप में होगा ?
- (iii) यदि किसी $\triangle ABC$ में $AD \perp BC$ एवं $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BD$ हो, तो यह प्रमेय किस नाम से जानी जाती है ?
- (iv) (x_1, y_1) एवं (x_2, y_2) के मध्य दूरी क्या होगी ?
- (v) हमारी आँख से उस वस्तु को जिसे हम देख रहे हैं, जोड़ने वाली रेखा क्या कहलाती है ?
- (vi) माध्यिका का सूत्र लिखिए।

उत्तर—(i) 1 (एक), (ii) $ax^2 + bx + c = 0$, (iii) न्यूनकोण त्रिभुज प्रमेय,
 (iv) $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, (v) दृष्टि रेखा, (vi) माध्यिका $= l + \frac{(n/2 - cf)}{f} \times h$.

5. सत्य/असत्य बताइए—

- (i) प्रत्येक परिमेय संख्या वास्तविक संख्या होती है। 1 × 6 = 6
- (ii) बहुपद $p(x)$ में 'x' की उच्चतम घात बहुपद की घात कहलाती है।
- (iii) समान्तर श्रेणी के किन्हीं दो पदों का अन्तर सार्वान्तर होता है।
- (iv) समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल सदैव बराबर होते हैं।
- (v) त्रिज्या r वाले वृत्त की परिधि $= 2\pi r$.
- (vi) बेलन का आयतन $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$ होता है।

उत्तर—(i) सत्य, (ii) सत्य, (iii) असत्य, (iv) असत्य, (v) सत्य, (vi) असत्य।

6. क्या कोई दो संख्याओं का HCF = 18 एवं LCM = 380 हो सकता है ? अपने उत्तर का कारण बताइए। 2

हल : पृष्ठ 27 पर, प्रश्न 4 देखिए।

अथवा

"तीन क्रमागत धन पूर्णाकों का गुणनफल 6 से विभाज्य होता है।" क्या यह कथन सत्य है या असत्य। कारण लिखिए।

हल : पृष्ठ 27 पर, प्रश्न 3 देखिए।

7. पूर्णाकों 26 और 91 के HCF और LCM ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM है। 2

हल : पृष्ठ 27 पर, प्रश्न 3 (i) देखिए।

अथवा

पूर्णाकों 6 और 20 के HCF और LCM ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM है।

हल : पृष्ठ 27 पर, प्रश्न 3 (iv) देखिए।

8. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ संख्या हैं। 2

हल : पृष्ठ 39 पर, प्रश्न 1 (v) देखिए।

अथवा

एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः 0 , $\sqrt{5}$ संख्या हैं।

हल : पृष्ठ 39 पर, प्रश्न 1 (iii) देखिए।

9. द्विघात व्यंजक $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की जाँच कीजिए। 2

हल : पृष्ठ 34 पर, प्रश्न 1 (vii) देखिए।

अथवा

द्विघात व्यंजक $4x^2 + 5\sqrt{2}x - 3$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की जाँच कीजिए।

हल : पृष्ठ 34 पर, प्रश्न 1 (xiii) देखिए।

10. दो सम्पूरक कोणों में बड़ा कोण छोटे कोण से 18 डिग्री अधिक है। उन्हें ज्ञात कीजिए। 2

हल : पृष्ठ 46 पर, प्रश्न 4 (ii) देखिए।

अथवा

समीकरणों $x - y + 1 = 0$ और $3x + 2y - 12 = 0$ का ग्राफ खींचिए। X-अक्ष और इन रेखाओं से बने त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए और त्रिभुजाकार पटल को छायांकित कीजिए।

हल : पृष्ठ 44 पर, प्रश्न 1 देखिए।

11. द्विघात समीकरण $2x^2 - 3x + 5 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। 2

हल : पृष्ठ 65 पर, प्रश्न 4 देखिए।

अथवा

द्विघात समीकरण $kx(x - 2) + 6 = 0$ में k का मान ज्ञात कीजिए कि उसके दो बराबर मूल हों।

हल : पृष्ठ 65 पर, प्रश्न 3(ii) देखिए।

12. उस AP का 31वाँ पद ज्ञात कीजिए जिसका 11वाँ पद 38 है और 16वाँ पद 73 है।
हल : पृष्ठ 80 पर, प्रश्न 5 देखिए।

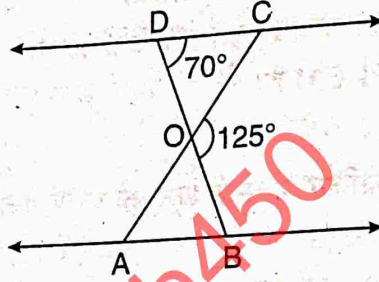
अथवा

तीन अंकों वाली कितनी संख्याएँ 7 से विभाज्य हैं ?
हल : पृष्ठ 81 पर, प्रश्न 10 देखिए।

13. एक त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $\angle ADC = \angle BAC$ है।
दर्शाइए कि $CA^2 = CB \cdot CD$ है।
हल : पृष्ठ 98 पर, प्रश्न 14 देखिए।

अथवा

संलग्न आकृति में $\triangle ODC \sim \triangle OBA$, $\angle BOC = 125^\circ$ और $\angle CDO = 70^\circ$ है। $\angle DOC$ ज्ञात कीजिए।



- हल : पृष्ठ 97 पर, प्रश्न 10 देखिए।
14. बिन्दुओं $(0, 0)$ और $(36, 15)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।
हल : पृष्ठ 106 पर, प्रश्न 2 देखिए।

अथवा

जाँच कीजिए कि क्या बिन्दु $(5, -2)$, $(6, 4)$ और $(7, -2)$ एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।
हल : पृष्ठ 107 पर, प्रश्न 4 देखिए।

15. यदि $\tan A = \cot B$, तो सिद्ध कीजिए कि $A + B = 90^\circ$ ।
हल : पृष्ठ 114 पर, प्रश्न 8 देखिए।

अथवा

यदि $\sin A = \frac{3}{4}$, तो $\cos A$ और $\tan A$ का परिकलन कीजिए।

हल : पृष्ठ 115 पर, प्रश्न 2 देखिए।

16. 20 बल्बों के एक समूह में 4 बल्ब खराब हैं। इस समूह में से एक बल्ब यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि बल्ब खराब होगा ?
हल : पृष्ठ 182 पर, प्रश्न 10 (i) देखिए।

अथवा

प्रारम्भिक घटना को परिभाषित कीजिए।

हल : पृष्ठ 180 पर, प्रश्न 2 देखिए।

17. असम्भव घटना को परिभाषित कीजिए।
हल : पृष्ठ 180 पर, प्रश्न 1 देखिए।

अथवा

अच्छी प्रकार से फेंटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। इसकी प्रायिकता परिकलित कीजिए कि यह पत्ता एक इक्का होगा।
हल : पृष्ठ 183 पर, प्रश्न 16 (i) देखिए।

18. 1.5 मीटर लम्बा एक प्रेक्षक एक चिमनी से 28.5 मीटर की दूरी पर है। उसकी आँखों से चिमनी के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। चिमनी की ऊँचाई बताइए। 3
हल : पृष्ठ 127 पर, प्रश्न 4 देखिए।

अथवा

भूमि के बिन्दु से, जो मीनार के पाद-बिन्दु से 30 मीटर की दूरी पर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : पृष्ठ 126 पर, प्रश्न 2 देखिए।

19. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है। 3

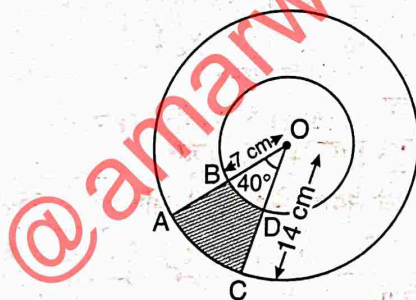
हल : पृष्ठ 138 पर, प्रश्न 1 देखिए।

अथवा

किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती हैं। सिद्ध कीजिए।

हल : पृष्ठ 142 पर, प्रश्न 10 देखिए।

20. संलग्न आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि केन्द्र O वाले दोनों संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 7 cm और 14 cm हैं तथा $\angle AOC = 40^\circ$ है। ($\pi = 22/7$ का प्रयोग कीजिए। 3

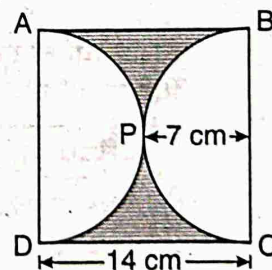


हल : पृष्ठ 149 पर, प्रश्न 5 देखिए।

अथवा

संलग्न आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि $ABCD$ भुजा 14 cm का एक वर्ग है तथा APD तथा BPC दो अर्द्धवृत्त हैं।

हल : पृष्ठ 149 पर, प्रश्न 6 देखिए।



21. रितु धारा के अनुकूल 2 घण्टे में 20 km तैर सकती है और धारा के प्रतिकूल 2 घण्टे में 4 km तैर सकती है। उसकी स्थिर जल में तैरने की चाल तथा धारा की चाल ज्ञात कीजिए। 4

हल : पृष्ठ 53 पर, प्रश्न 8 (i) देखिए।

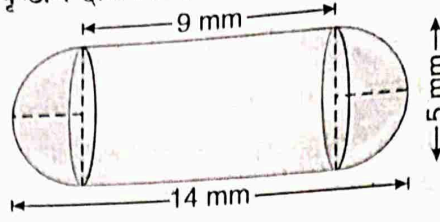
अथवा

निम्न रैखिक समीकरण युग्म को विलोपन विधि से हल कीजिए—

$$3x + y = 10; 2x + 2y = 12.$$

हल : पृष्ठ 55 पर, प्रश्न 9 (i) देखिए।

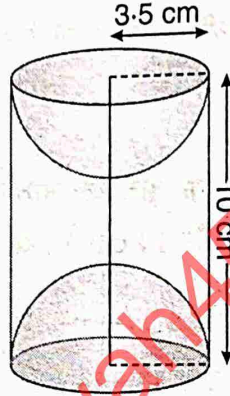
22. दवा का एक कैप्सूल (Capsule) एक बेलन के आकार का है जिसके दोनों सिरों पर एक-एक अर्द्ध गोला लगा हुआ है (देखिए संलग्न आकृति)। पूरे कैप्सूल की लम्बाई 14 mm है और उसका व्यास 5 mm है। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : पृष्ठ 163 पर, प्रश्न 1 देखिए।

अथवा

लकड़ी के एक ठोस बेलन के प्रत्येक सिरे पर एक अर्द्ध गोला खोदकर निकालते हुए एक वस्तु बनाई गई है जैसा कि संलग्न आकृति में दर्शाया गया है। यदि बेलन की ऊँचाई 10 cm है और आधार की त्रिज्या 3.5 cm है, तो इस वस्तु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल : पृष्ठ 163 पर, प्रश्न 2 देखिए।

23. निम्नलिखित आँकड़ों से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए :

वर्ग-अन्तराल	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
विद्यार्थियों की संख्या	2	3	7	6	6	6

हल : पृष्ठ 172 पर, प्रश्न 3 देखिए।

अथवा

विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा मोहल्ले के 20 परिवारों पर किये गये सर्वेक्षण के परिणामस्वरूप विभिन्न परिवारों के सदस्यों की संख्या से सम्बन्धित निम्नलिखित आँकड़े प्राप्त हुए :

परिवार माप	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
परिवारों की संख्या	7	8	2	2	1

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल : पृष्ठ 173 पर, प्रश्न 6 देखिए।

आदर्श प्रश्न-पत्र : सेट-III

1. सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए—

1 × 6 = 6

- (i) जब $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ हो, तो समीकरण निकाय $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$:

(a) का एक अद्वितीय हल होगा

(b) का कोई हल नहीं होगा

(c) के दो हल होंगे

(d) के अनेक अनन्त हल होंगे।

- (ii) द्विघात समीकरण $x^2 - 4x + 4 = 0$ के विविक्तकर का मान होगा :
- (a) 4 (b) 2
(c) 0 (d) 1.
- (iii) AP : 10, 7, 4, का 10वाँ पद है :
- (a) 14 (b) 17
(c) -14 (d) -17.
- (iv) बिन्दु (0, 5) एवं (-5, 0) के बीच दूरी है :
- (a) 5 (b) $5\sqrt{2}$
(c) $2\sqrt{5}$ (d) 2.
- (v) यदि धूप में खड़े एक व्यक्ति की छाया उसकी ऊँचाई की $\sqrt{3}$ गुना हो, तो उस समय सूर्य का उन्नयन कोण होगा :
- (a) 30° (b) 45°
(c) 60° (d) 75° .
- (vi) वृत्त के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की संख्या होगी :
- (a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 0.

उत्तर—(i) (d), (ii) (c), (iii) (d), (iv) (b), (v) (a), (vi) (a).

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

1 × 6 = 6

- (i) यदि $p(x)$ एक द्विघात बहुपद है, तो $p(x) = 0$ को कहते हैं।
- (ii) एक समान्तर श्रेणी का प्रथम पद a तथा सार्वान्तर d हो, तो उसका n वाँ पद होगा।
- (iii) सभी त्रिभुज समरूप होते हैं।
- (iv) किसी बिन्दु की y -अक्ष से दूरी कहलाती है।
- (v) एक वृत्त की समान्तर स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं।
- (vi) कोण θ वाले त्रिज्यखण्ड के क्षेत्रफल का सूत्र है।

उत्तर—(i) वर्ग समीकरण, (ii) $a + (n - 1)d$, (iii) समबाहु, (iv) x -निर्देशांक या भुज, (v) दो,

(vi) क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360^\circ} \pi r^2$.

3. सही जोड़ी बनाइए—

1 × 6 = 6

- | स्तम्भ 'अ' | स्तम्भ 'ब' |
|---|-------------------|
| (i) $\sqrt{1 + \tan^2 \theta}$ | (a) $\sin \theta$ |
| (ii) $\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ | (b) 1 |
| (iii) $\sqrt{\sec^2 \theta - \tan^2 \theta}$ | (c) $\sec \theta$ |
| (iv) अर्द्ध गोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल | (d) 0 (शून्य) |
| (v) एक पासे को फेंकने पर एक विषम अंक आने की प्रायिकता | (e) $2\pi r^2$ |
| (vi) असम्भव घटनाओं की प्रायिकता | (f) $\frac{1}{2}$ |

उत्तर—(i) → (c), (ii) → (a), (iii) → (b), (iv) → (e), (v) → (f), (vi) → (d).

4. एक शब्द/वाक्य में उत्तर लिखिए—

- यदि $a = bq$, तो a और b में क्या सम्बन्ध है ?
- यदि किसी वर्ग समीकरण का विविक्तकर शून्य हो, तो उसके मूल कैसे होंगे ?
- समकोण त्रिभुज प्रमेय का नाम लिखिए।
- मूल बिन्दु से बिन्दु (x, y) की दूरी क्या होगी ?
- जब वस्तु आँख की क्षैतिज रेखा से ऊपर हो, तो उसे देखने के प्रक्रम में हमारी दृष्टि रेखा जिस कोण से ऊपर को मुड़ जाती है, उस कोण को क्या कहते हैं ?
- सर्वाधिक बारम्बारता वाला वर्ग क्या कहलाता है ?

उत्तर—(i) b, a का एक गुणनखण्ड है, (ii) समान एवं वास्तविक, (iii) पाइथागोरस प्रमेय,
(iv) $\sqrt{x^2 + y^2}$, (v) उन्नत (उन्नयन), (vi) बहुलक वर्ग।

1 × 6 = 6

5. सत्य/असत्य बताइए—

- $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।
- द्विघात बहुपद में केवल एक शून्यक हो सकता है।
- 1, 2, 1, 3, ... एक समान्तर श्रेणी है।
- सभी वर्ग समरूप होते हैं।
- सर्वांगसम वृत्तों के क्षेत्रफल सदैव बराबर होते हैं।
- बेलन का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ होता है।

उत्तर—(i) असत्य, (ii) असत्य, (iii) असत्य, (iv) सत्य, (v) सत्य, (vi) असत्य।

6. प्रातः भ्रमण (Morning walk) पर तीन व्यक्ति एक साथ कदम बढ़ाते हैं। उनके कदमों की माप क्रमशः 40 cm, 42 cm एवं 45 cm है। वह लघुतम दूरी क्या होगी जिससे प्रत्येक व्यक्ति समान दूरी पूर्ण कदमों में तय कर सकें।

हल : पृष्ठ 27 पर, प्रश्न 2 देखिए।

अथवा

पूर्णाकों 510 और 92 के HCF और LCM ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM है।

हल : पृष्ठ 27 पर, प्रश्न 3 (ii) देखिए।

7. संख्या 156 को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल : पृष्ठ 26 पर, प्रश्न 1 (ii) देखिए।

अथवा

क्या कोई दो संख्याओं का HCF = 18 एवं LCM = 380 हो सकता है ? अपने उत्तर का कारण बताइए।

हल : पृष्ठ 27 पर, प्रश्न 4 देखिए।

8. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः -3, 2 संख्या हैं।

हल : पृष्ठ 39 पर, प्रश्न 1 (vii) देखिए।

अथवा

एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः $\frac{1}{4}, -1$ हैं।

हल : पृष्ठ 39 पर, प्रश्न 1 (i) देखिए।

9. द्विघात व्यंजक $x^2 - 2x - 8$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की जाँच कीजिए। 2
हल : पृष्ठ 34 पर, प्रश्न 1 (i) देखिए।

अथवा

- द्विघात व्यंजक $5t^2 + 12t + 7$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच सम्बन्ध की जाँच कीजिए।
हल : पृष्ठ 34 पर, प्रश्न 1 (xi) देखिए।
10. निम्न रैखिक समीकरण युग्मों को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए : 2
 $x + y = 5; 2x - 3y = 4.$
हल : पृष्ठ 45 पर, प्रश्न 2 (iii) देखिए।

अथवा

- पाँच वर्ष बाद जैकब की आयु उसके पुत्र की आयु से तीन गुनी हो जाएगी। पाँच वर्ष पूर्व जैकब की आयु उसके पुत्र की आयु से सात गुनी थी। उनकी वर्तमान आयु क्या है ?
हल : पृष्ठ 46 पर, प्रश्न 4 (vi) देखिए।
11. गुणखण्ड विधि से द्विघात समीकरण $2x^2 + x - 6 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए। 2
हल : पृष्ठ 65 पर, प्रश्न 1 (ii) देखिए।

अथवा

- समीकरण $x - \frac{1}{x} = 3$ के मूल ज्ञात कीजिए, ($x \neq 0$)।
हल : पृष्ठ 66 पर, प्रश्न 2 (ii) देखिए।
12. किसी AP का 17वाँ पद उसके 10वें पद से 7 अधिक है। इसका सार्वान्तर ज्ञात कीजिए। 2
हल : पृष्ठ 79 पर, प्रश्न 5 देखिए।

अथवा

- AP : 3, 8, 13, 18, कौन-सा पद 78 है ?
हल : पृष्ठ 79 पर, प्रश्न 1 देखिए।
13. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है। सिद्ध कीजिए कि $AB^2 = 2AC^2$ है। 2
हल : पृष्ठ 93 पर, प्रश्न 5 देखिए।

अथवा

- ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AC = BC$ है। यदि $AB^2 = 2AC^2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि ABC एक समकोण त्रिभुज है।
हल : पृष्ठ 93 पर, प्रश्न 6 देखिए।
14. बिन्दु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जहाँ AB एक वृत्त का व्यास है जिसका केन्द्र (2, -3) तथा B के निर्देशांक (1, 4) हैं। 2
हल : पृष्ठ 107 पर, प्रश्न 6 देखिए।

अथवा

- यदि बिन्दु A(6, 1), B(8, 2), C(9, 4) और D(P, 3) एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष इसी क्रम में हों, तो P का मान ज्ञात कीजिए।
हल : पृष्ठ 109 पर, प्रश्न 6 देखिए।

15. $15 \cot A = 8$ हो, तो $\sin A$ और $\sec A$ के मान ज्ञात कीजिए।

2

हल : पृष्ठ 116 पर, प्रश्न 3 देखिए।

अथवा

एक समकोण त्रिभुज $\triangle ABC$ में जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = 1$, तो सत्यापित कीजिए कि— $2 \sin A \cdot \cos A = 1$.

हल : पृष्ठ 116 पर, प्रश्न 5 देखिए।

16. यदि $P(E) = 0.05$ है, तो $P(\bar{E})$ ("E नहीं" की प्रायिकता) क्या है ?

2

हल : पृष्ठ 180 पर, प्रश्न 4 देखिए।

अथवा

एक थैले में 3 लाल और 5 काली गेंदें हैं। इस थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। इसकी प्रायिकता क्या है कि गेंद लाल हो ?

हल : पृष्ठ 181 पर, प्रश्न 7 देखिए।

17. दो पासे एक साथ फेंके जाते हैं। इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि दोनों पासों पर आने वाले अंक का अन्तर 2 हो।

2

हल : पृष्ठ 184 पर, प्रश्न 20 देखिए।

अथवा

आँगल भाषा की वर्णमाला से एक अक्षर यादृच्छया चुना जाता है। चुना गया अक्षर व्यंजन होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : पृष्ठ 184 पर, प्रश्न 21 देखिए।

18. भूमि के एक बिन्दु से एक 20 m ऊँचे भवन के शिखर पर लगी एक संचार मीनार के तल और शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

3

हल : पृष्ठ 129 पर, प्रश्न 3 देखिए।

अथवा

7 m ऊँचे भवन के शिखर से एक टॉवर का उन्नयन कोण 60° है और उसके पाद का अवनयन कोण 45° है। टॉवर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : पृष्ठ 132 पर, प्रश्न 8 देखिए।

19. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के परिगत समान्तर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है।

3

हल : पृष्ठ 141 पर, प्रश्न 9 देखिए।

अथवा

किसी वृत्त के बाह्य बिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखाएँ तुल्य होती हैं। सिद्ध कीजिए।

हल : पृष्ठ 142 पर, प्रश्न 10 देखिए।

20. वृत्ताकार ब्रूच (Brooch) को चाँदी के तार से बनाया जाता है, जिसका व्यास 35 mm है। तार को वृत्त के 5 व्यासों को बनाने में प्रयुक्त किया गया है जो उसे 10 बराबर त्रिज्यखण्डों में विभाजित करता है जैसा कि संलग्न आकृति में दिखाया गया है। तो ज्ञात कीजिए :

($\pi = 22/7$ का प्रयोग कीजिए।)

(i) कुल वांछित चाँदी के तार की लम्बाई।

(ii) ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल।

हल : पृष्ठ 148 पर, प्रश्न 2 देखिए।



3

अथवा

एक छतरी में आठ तानें हैं, जो बराबर दूरी पर लगे हुए हैं। छतरी को 45 cm त्रिज्या वाला एक सपाट वृत्त मानते हुए इसकी दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : पृष्ठ 148 पर, प्रश्न 3 देखिए।

21. 5 संतरे और 3 सेबों का मूल्य ₹ 35 है तथा 2 संतरे और 4 सेबों का मूल्य ₹ 28 है। तब 1 संतरा तथा 1 सेब का मूल्य ज्ञात कीजिए।
हल : पृष्ठ 55 पर, प्रश्न 10 देखिए।

अथवा

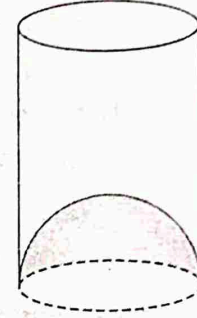
क्या रैखिक समीकरण युग्म $2x + y - 6 = 0$ एवं $4x - 2y - 4 = 0$ संगत हैं। यदि हाँ तो इसको ग्राफीय विधि से हल कीजिए।

हल : पृष्ठ 59 पर, प्रश्न 5 देखिए।

22. एक गोलाकार काँच के बर्तन की एक बेलनाकार गर्दन है जिसकी लम्बाई 8 cm है और व्यास 2 cm है, जबकि गोलाकार भाग का व्यास 8.5 cm है। इसमें भरे जा सकने वाली पानी की मात्रा मापकर एक बच्चे ने यह ज्ञात किया कि इस बर्तन का आयतन 345 cm^3 है। जाँच कीजिए कि उस बच्चे का उत्तर सही है या नहीं। यह मानते हुए कि उपर्युक्त मापन आन्तरिक मापन है और $\pi = 3.14$ है।
हल : पृष्ठ 164 पर, प्रश्न 1 देखिए।

अथवा

एक जूस बेचने वाला अपने ग्राहकों को आकृति में दर्शाए गिलासों से जूस देता था, बेलनाकार गिलास का आन्तरिक व्यास 5 सेमी था परन्तु गिलास के निचले आधार में एक उभरा हुआ अर्द्धगोला था, जिससे गिलास की धारिता कम हो जाती थी। यदि एक गिलास की ऊँचाई 10 सेमी थी, तो गिलास की आभासी धारिता या वास्तविक धारिता ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ का उपयोग करें।)



हल : पृष्ठ 166 पर, प्रश्न 3 देखिए।

23. विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा अपने पर्यावरण चेतना अभियान के अन्तर्गत एक सर्वेक्षण किया गया, जिसमें उन्होंने एक मोहल्ले के 20 घरों में लगे हुए पौधों से सम्बन्धित निम्नलिखित आँकड़े एकत्रित किए। प्रति घर माध्य पौधों की संख्या ज्ञात कीजिए :
हल : पृष्ठ 171 पर, प्रश्न 2 देखिए।

पौधों की संख्या	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
घरों की संख्या	1	2	1	5	6	2	3

माध्य ज्ञात करने के लिए आपने किस विधि का प्रयोग किया और क्यों ?
हल : पृष्ठ 171 पर, प्रश्न 2 देखिए।

अथवा

निम्नलिखित सारणी किसी अस्पताल में एक विशेष वर्ष में भर्ती हुए रोगियों की आयु को दर्शाती है :

आयु (वर्षों में)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
रोगियों की संख्या	6	11	21	23	14	5

उपरोक्त आँकड़ों का बहुलक और माध्य ज्ञात कीजिए। दोनों केन्द्रीय प्रवृत्तियों की तुलना कीजिए और उनकी व्याख्या कीजिए।

हल : पृष्ठ 175 पर, प्रश्न 1 देखिए।

आदर्श प्रश्न-पत्र : सेट-IV

1. सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए—

$1 \times 6 = 6$

(i) जब $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ हो, तो समीकरण निकाय $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 :$$

(a) के दो हल होंगे

(b) का कोई हल नहीं होगा

(c) के अनंत अनेक हल होंगे

(d) का अद्वितीय हल होगा।

- (ii) निम्न में से किस वर्ग समीकरण के मूलों का योग 3 है ?
 (a) $2x^2 - 3x + 6 = 0$ (b) $-x^2 + 3x - 3 = 0$
 (c) $\sqrt{2}x^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}x + 1 = 0$ (d) $3x^2 - 3x + 3 = 0$.
- (iii) एक AP : $-5, -\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}, \dots$ का 11 वाँ पद होगा :
 (a) -20 (b) 20
 (c) -30 (d) 30.
- (iv) x-अक्ष से बिन्दु P(2, 3) की दूरी है :
 (a) 2 (b) 3 (c) 1 (d) 5.
- (v) एक व्यक्ति किसी बिजली के खम्भे के शिखर से देखता है कि धरातल के एक बिन्दु का अवनमन कोण 60° है। यदि खम्भे के पाद से बिन्दु की दूरी 25 मीटर हो, तो खम्भे का ऊँचाई होगी :
 (a) 25 मीटर (b) $25\sqrt{2}$ मीटर (c) $25\sqrt{3}$ मीटर (d) 1 मीटर।
- (vi) यदि दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 4 cm एवं 5 cm हैं, तो बाह्य वृत्त की प्रत्येक वह जीवा जो अन्तः वृत्त की स्पर्श रेखा हो, की लम्बाई होगी :
 (a) 3 cm (b) 6 cm (c) 9 cm (d) 1 cm.
- उत्तर—(i) (b), (ii) (b), (iii) (b), (iv) (b), (v) (c), (vi) (b).

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

1 × 6 = 6

- (i) एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के कोई वास्तविक मूल नहीं होते यदि।
 (ii) वह अनुक्रम जिसका प्रत्येक पद अपने पूर्ववर्ती पद से एक निश्चित अन्तर रखता है कहलाता है।
 (iii) भुजाओं की समान संख्याओं वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि (a) उनके संगत कोण हों, तथा (b) उनकी संगत भुजाएँ हों।
 (iv) $(2a, 0)$ एवं $(0, 2b)$ के मध्य-बिन्दु के निर्देशांक हैं।
 (v) एक रेखा जो वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है, वह रेखा कहलाती है।
 (vi) एक वृत्तीय क्षेत्र का वह भाग जो त्रिज्याओं और संगत चाप से घिरा (परिबद्ध) हो उस वृत्त का एक कहलाता है।

उत्तर—(i) $b^2 < 4ac$, (ii) समान्तर श्रेणी, (iii) (a) बराबर, (b) समानुपाती, (iv) (a, b), (v) छेदक, (vi) त्रिज्यखण्ड।

3. सही जोड़ी बनाइए—

स्तम्भ 'अ'

- (i) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$
 (ii) $\tan 60^\circ$
 (iii) $\cos 45^\circ$
 (iv) गोले का पृष्ठ
 (v) किसी निश्चित घटना की प्रायिकता
 (vi) असम्भव घटनाओं की प्रायिकता

स्तम्भ 'ब'

- (a) $\sqrt{3}$
 (b) $4\pi r^2$
 (c) 1 (एक)
 (d) 1
 (e) 0 (शून्य)
 (f) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

1 × 6 = 6

उत्तर—(i) → (d), (ii) → (a), (iii) → (f), (iv) → (b), (v) → (c), (vi) → (e).

4. एक शब्द/वाक्य में उत्तर लिखिए— 1 × 6 = 6
- (i) दो संख्याओं a और b के LCM (a, b) एवं HCF (a, b) क्रमशः x एवं y हैं। a, b, x और y में क्या सम्बन्ध होगा ?
- (ii) द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के विविक्तकर ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।
- (iii) यदि किसी $\triangle ABC$ में $AD \perp BC$ एवं $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BD$ हो, तो यह प्रमेय किस नाम से जानी जाती है ?
- (iv) (x_1, y_1) एवं (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा को $m_1 : m_2$ के अनुपात में अन्तःविभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक लिखिए।
- (v) दृष्टि रेखा की परिभाषा लिखिए।
- (vi) सम्पूर्ण वितरण को दो बराबर भागों में बाँटने वाला अंक जिस वर्ग-अन्तराल में होता है उस वर्ग को क्या कहते हैं ?

उत्तर— (i) $a \times b = x \times y$, (ii) $b^2 - 4ac$, (iii) अधिककोण त्रिभुज प्रमेय,
 (iv) $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2} \right)$, (v) हमारी आँख से उस वस्तु को जिसे हम देख रहे हैं, जोड़ने वाली रेखा दृष्टि रेखा कहलाती है, (vi) माध्यक वर्ग।

5. सत्य/असत्य बताइए— 1 × 6 = 6
- (i) प्रत्येक पूर्णांक प्राकृत संख्या होती है।
- (ii) घात 2 के किसी बहुपद के अधिक से अधिक दो सूचक हो सकते हैं।
- (iii) समान्तर श्रेणी 10, 7, 4,, का 10वाँ पद -17 है।
- (iv) समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे बड़ी भुजा होती है।
- (v) सर्वांगसम वृत्तों की परिमाप सदैव बराबर होती है।
- (vi) अर्द्ध गोले का आयतन $= \frac{4}{3} \pi r^3$ है।

उत्तर—(i) असत्य, (ii) सत्य, (iii) सत्य, (iv) सत्य, (v) सत्य, (vi) असत्य।

6. संख्या 5005 को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए। 2
 हल : पृष्ठ 26 पर, प्रश्न 1 (iv) देखिए।

अथवा

संख्या 7429 को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल : पृष्ठ 26 पर, प्रश्न 1 (v) देखिए।

7. पूर्णांकों 336 और 54 के HCF और LCM ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM है। 2
 हल : पृष्ठ 27 पर, प्रश्न 3 (iii) देखिए।

अथवा

पूर्णांकों 6 और 20 के HCF और LCM ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM है।

हल : पृष्ठ 27 पर, प्रश्न 3 (iv) देखिए।

8. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः 1, 1 संख्या हैं। 2

हल : पृष्ठ 39 पर, प्रश्न 1 (iv) देखिए।

अथवा

एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः -3, 2 संख्या हैं।

हल : पृष्ठ 39 पर, प्रश्न 1 (vii) देखिए।

9. द्विघात व्यंजक $6x^2 - 3 - 7x$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की जाँच कीजिए।

हल : पृष्ठ 34 पर, प्रश्न 1 (iii) देखिए।

अथवा

- द्विघात व्यंजक $4u^2 + 8u$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की जाँच कीजिए।

हल : पृष्ठ 34 पर, प्रश्न 1 (iv) देखिए।

10. निम्न रैखिक समीकरण युग्म को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए :

$$0.2x + 0.3y = 1.3 ; 0.4x + 0.5y = 2.3.$$

हल : पृष्ठ 45 पर, प्रश्न 2 (i) देखिए।

अथवा

- एक क्रिकेट टीम के कोच ने 7 बल्ले तथा 6 गेंदें ₹ 3,800 में खरीदीं। बाद में उसने 3 बल्ले तथा 5 गेंदें ₹ 1,750 में खरीदीं। प्रत्येक बल्ले एवं प्रत्येक गेंद का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : पृष्ठ 46 पर, प्रश्न 4 (iii) देखिए।

11. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 27 और गुणनफल 182 हो।

हल : पृष्ठ 67 पर, प्रश्न 4 देखिए।

अथवा

- दो ऐसे क्रमागत विषम धन पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 290 हो।

हल : पृष्ठ 68 पर, प्रश्न 6 देखिए।

12. किसी AP का प्रथम पद 5, अन्तिम पद 45 और योग 400 है, पदों की संख्या एवं सार्वान्तर ज्ञात कीजिए।

हल : पृष्ठ 85 पर, प्रश्न 19 देखिए।

अथवा

- यदि किसी समान्तर श्रेणी (AP) के प्रथम 14 पदों का योग 1050 है तथा इसका प्रथम पद 10 है, तो 20वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : पृष्ठ 89 पर, प्रश्न 30 देखिए।

13. सिद्ध कीजिए कि समचतुर्भुज की भुजाओं के वर्गों का योग उसके विकर्णों के वर्गों के योग के बराबर होता है।

हल : पृष्ठ 99 पर, प्रश्न 17 देखिए।

अथवा

- समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा $2a$ है। उसके प्रत्येक शीर्षलम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : पृष्ठ 101 पर, प्रश्न 21 देखिए।

14. x और y में एक ऐसा सम्बन्ध ज्ञात कीजिए कि बिन्दु (x, y) बिन्दुओं $(3, 6)$ और $(-3, 4)$ से समदूरस्थ हो।

हल : पृष्ठ 108 पर, प्रश्न 4 देखिए।

अथवा

- बिन्दुओं $(5, -6)$ और $(-1, -4)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को y -अक्ष किस अनुपात में विभाजित करती है ? प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हल : पृष्ठ 109 पर, प्रश्न 5 देखिए।

15. $2\tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए। 2
हल : पृष्ठ 113 पर, प्रश्न 4 (ii) देखिए।

अथवा

यदि $\angle A$ और $\angle B$ न्यूनकोण हों, जहाँ $\cos A = \cos B$, तो दिखाइए $\angle A = \angle B$.
हल : पृष्ठ 113 पर, प्रश्न 2 देखिए।

16. 900 सेबों के एक ढेर में से यादृच्छया एक सेब चुनने पर सड़ा सब निकलने की प्रायिकता 0.18 है। ढेर में सड़े हुए सेबों की संख्या क्या है ? 2
हल : पृष्ठ 184 पर, प्रश्न 18 देखिए।

अथवा

एक पासे को एक बार फेंका जाता है। निम्नलिखित को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए :
(i) एक अभाज्य संख्या, (ii) एक विषम संख्या है।
हल : पृष्ठ 186 पर, प्रश्न 3 (i) व (iii) देखिए।

17. एक डिब्बे में 5 लाल कंचे, 8 सफेद कंचे और 4 हरे कंचे हैं। इस डिब्बे में से एक कंचा यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाला गया कंचा लाल है ? 2
हल : पृष्ठ 185 पर, प्रश्न 1(i) देखिए।

अथवा

असम्भव घटना को परिभाषित कीजिए।
हल : पृष्ठ 180 पर, प्रश्न 1 देखिए।

18. 1.5 m लम्बा एक लड़का 30 m ऊँचे एक भवन से कुछ दूरी पर खड़ा है। जब वह ऊँचे भवन की ओर जाता है, तब उसकी आँख से भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° से 60° हो जाता है। बताइए कि वह भवन की ओर कितनी दूरी तक चलकर गया है ? 3
हल : पृष्ठ 129 पर, प्रश्न 2 देखिए।

अथवा

एक 80 m चौड़ी सड़क के दोनों ओर आमने-सामने समान लम्बाई वाले दो खम्भे लगे हुए हैं। इन दोनों खम्भों के बीच सड़क के एक बिन्दु से खम्भों के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 60° और 30° हैं। खम्भों की ऊँचाई और खम्भों से बिन्दु की दूरी ज्ञात कीजिए।
हल : पृष्ठ 131 पर, प्रश्न 6 देखिए।

19. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरों पर खींची गयी स्पर्श रेखाएँ समान्तर होती हैं। 3
हल : पृष्ठ 139 पर, प्रश्न 3 देखिए।

अथवा

दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ 5 cm तथा 3 cm हैं। बड़े वृत्त की त्रिज्या की उस जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती हो।

हल : पृष्ठ 139 पर, प्रश्न 5 देखिए।

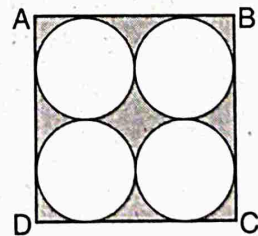
20. दी गई आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जहाँ ABCD भुजा 14 cm का एक वर्ग है। 3
हल : पृष्ठ 153 पर, प्रश्न 14 देखिए।

अथवा

10 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केन्द्र पर समकोण अन्तरित करती है। निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

(i) संगत लघु वृत्तखण्ड, (ii) संगत दीर्घ त्रिज्याखण्ड। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)

हल : पृष्ठ 153 पर, प्रश्न 1 देखिए।



21. एक आयताकार बाग, जिसकी लम्बाई, चौड़ाई से 4 m अधिक है, का अर्ध परिमाण 36 m है। बाग की विमाएँ ज्ञात कीजिए।
हल : पृष्ठ 60 पर, प्रश्न 6 देखिए।

अथवा

निम्न समीकरण युग्म को रैखिक समीकरण युग्म में बदल करके हल कीजिए :

$$\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4} \text{ एवं } \frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = -\frac{1}{8}$$

हल : पृष्ठ 60 पर, प्रश्न 7 देखिए।

22. ऊँचाई 2.4 cm और व्यास 1.4 cm वाले एक ठोस बेलन में से इसी ऊँचाई और इसी व्यास वाला एक शंक्वाकार खोल (Cavity) काट लिया जाता है। शेष बचे ठोस का निकटतम वर्ग सेण्टीमीटर तक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
हल : पृष्ठ 165 पर, प्रश्न 2 देखिए।

अथवा

ऊँचाई 220 cm और आधार व्यास 24 cm वाले एक बेलन जिस पर ऊँचाई 60 cm और त्रिज्या 8 cm वाला एक अन्य बेलन आरोपित है, से लोहे का एक स्तम्भ बना है। इस स्तम्भ का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए जबकि दिया है 1 cm^3 लोहे का द्रव्यमान 8 g होता है ($\pi = 3.14$ लीजिए)।

हल : पृष्ठ 167 पर, प्रश्न 6 देखिए।

23. निम्नलिखित बंटन एक मोहल्ले के बच्चों के दैनिक जेब खर्च दर्शाता है। माध्य जेब खर्च ₹ 18 है। लुप्त बारम्बारता f ज्ञात कीजिए।

दैनिक जेब भत्ता (₹ में)	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
बच्चों की संख्या	7	6	9	13	f	5	4

हल : पृष्ठ 173 पर, प्रश्न 5 देखिए।

अथवा

निम्नलिखित आँकड़े 225 बिजली उपकरणों के प्रेक्षित जीवनकाल (घण्टों में) की सूचना देते हैं :

जीवनकाल (घण्टों में)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
बारम्बारता	10	35	52	61	38	29

हल : पृष्ठ 173 पर, प्रश्न 7 देखिए।



वास्तविक संख्याएँ

[Real Numbers]

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

बहु-विकल्पीय प्रश्न

- किसी पूर्णांक m के लिए प्रत्येक सम पूर्णांक का रूप होगा :
 (a) m (b) $m + 1$ (c) $2m$ (d) $2m + 1$.
- किसी पूर्णांक q के लिए प्रत्येक विषम पूर्णांक का रूप होगा :
 (a) q (b) $q + 1$ (c) $2q$ (d) $2q + 1$.
- वह बड़ी-से-बड़ी संख्या जिससे 70 और 125 को विभाजित करने पर क्रमशः 5 एवं 8 शेषफल बचते हैं, निम्न है :
 (a) 13 (b) 65 (c) 875 (d) 1750.
- यदि दो धनात्मक पूर्णांक a एवं b निम्न रूप में लिखे हों : $a = x^3y^2$ एवं $b = xy^3$, जहाँ x एवं y अभाज्य संख्या हैं, तब HCF (a, b) होगा :
 (a) xy (b) xy^2 (c) x^3y^3 (d) x^3y^2 .
- यदि दो धनात्मक पूर्णांक p एवं q निम्न की तरह व्यक्त किए जाएँ : $p = ab^2$ एवं $q = a^3b$, जहाँ a एवं b अभाज्य संख्याएँ हैं, तब LCM (p, q) होगा :
 (a) ab (b) a^2b^2 (c) a^3b^2 (d) a^3b^3 .
- एक अशून्य परिमेय संख्या एवं एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल होगा :
 (a) सदैव अपरिमेय संख्या (b) सदैव परिमेय संख्या
 (c) परिमेय अथवा अपरिमेय (d) एक।
- वह छोटी-से-छोटी संख्या जो 1 से 10 की सभी संख्याओं (दोनों को सम्मिलित करते हुए) से विभाज्य है :
 (a) 10 (b) 100 (c) 504 (d) 2520.
- 96 और 404 का HCF होगा : (2019)
 (a) 120 (b) 4 (c) 10 (d) 3.

उत्तर—1. (c), 2. (d), 3. (a), 4. (b), 5. (c), 6. (a), 7. (d), 8. (b).

रिक्त स्थानों की पूर्ति

- एक सिद्ध किया हुआ कथन जिसे अन्य कथन को सिद्ध करने के लिए प्रयोग किया जाता है कहलाता है।
- सुपरिभाषित चरणों की एक शृंखला जो एक विशेष प्रकार की समस्या को हल करने की एक प्रक्रिया या विधि प्रदान करती है कहलाती है।
- \sqrt{p} , जहाँ p एक अभाज्य संख्या होती है, एक संख्या कहलाती है।
- संख्याओं में प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्डों की सबसे छोटी घात का गुणनफल कहलाता है।
- संख्याओं में सम्बद्ध प्रत्येक अभाज्य गुणनखण्ड की सबसे बड़ी घात का गुणनफल कहलाता है।

6. कोई संख्या p/q , जहाँ p एवं q परस्पर अभाज्य पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$, कहलाती है। (2022)
 7. $HCF(a, b) \times LCM(a, b) = \dots\dots\dots$ है।
 उत्तर—1. प्रमेयिका, 2. एल्गोरिथ्म, 3. अपरिमेय, 4. महत्तम समापवर्तक (HCF), 5. लघुतम समापवर्तक (LCM), 6. परिमेय संख्या, 7. $a \times b$.

जोड़ी मिलाइए

स्तम्भ 'अ'

- $2n + 1$, जहाँ n कोई धन पूर्णांक है।
- $2m$, जहाँ m कोई धन पूर्णांक है।
- धन पूर्णांक
- परिमेय एवं अपरिमेय संख्याएँ
- $\sqrt{-p}$, जहाँ p धन पूर्णांक है।

उत्तर—1. \rightarrow (c), 2. \rightarrow (d), 3. \rightarrow (e), 4. \rightarrow (a), 5. \rightarrow (b).

स्तम्भ 'ब'

- वास्तविक संख्याएँ
- अधिकल्पित संख्या
- विषम संख्याएँ
- सम संख्याएँ
- प्राकृत संख्याएँ

सत्य/असत्य

- प्रत्येक प्राकृत संख्या पूर्ण संख्या होती है।
- प्रत्येक पूर्णांक प्राकृत संख्या होती है।
- प्रत्येक परिमेय संख्या वास्तविक संख्या होती है।
- प्रत्येक वास्तविक संख्या अपरिमेय संख्या होती है।
- प्रत्येक पूर्णांक को p/q के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p एवं q कोई पूर्णांक हैं, लेकिन $q \neq 0$.
- $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

(2020)

उत्तर—1. सत्य, 2. असत्य, 3. सत्य, 4. असत्य, 5. सत्य, 6. असत्य।

एक शब्द/वाक्य में उत्तर

- 4 एवं 5 का महत्तम समापवर्तक (HCF) क्या होगा ?
- 3 और 12 का लघुतम समापवर्तक (LCM) क्या होगा ?
- दो संख्याओं a एवं b के $LCM(a, b)$ एवं $HCF(a, b)$ क्रमशः x एवं y हैं। a, b, x और y में क्या सम्बन्ध होगा ?
- यदि $a = bq$, तो a और b में क्या सम्बन्ध है ?

(2022)

उत्तर—1. 1 (एक); 2. 12, 3. $a \times b = x \times y$, 4. b, a का एक गुणनखण्ड है।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए :

- (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429.

हल : (i) $140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 5^1 \times 7^1$

उत्तर

(ii) $156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13 = 2^2 \times 3^1 \times 13^1$

उत्तर

(iii) $3825 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17 = 3^2 \times 5^2 \times 17^1$

उत्तर

(iv) $5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 5^1 \times 7^1 \times 11^1 \times 13^1$

उत्तर

(v) $7429 = 17 \times 19 \times 23 = 17^1 \times 19^1 \times 23^1$

उत्तर

प्रश्न 2. "दो क्रमागत धनात्मक पूर्णाकों का गुणनफल 2 से विभाज्य होता है।" यह कथन सत्य है या असत्य। कारण दीजिए।

उत्तर— कथन सत्य है।

क्योंकि दो क्रमागत पूर्णाकों का गुणनफल $n(n+1)$ होगा, जहाँ n एक पूर्णांक है और यदि n विषम है तो $n+1$ सम और यदि $n+1$ विषम है तो n सम होगा। इस प्रकार $n(n+1)$ एक सम पूर्णांक होगा, जो 2 से विभाज्य है।

प्रश्न 3. "तीन क्रमागत धन पूर्णाकों का गुणनफल 6 से विभाज्य होता है।" क्या यह कथन सत्य है या असत्य? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए।

उत्तर— उक्त कथन सत्य है, क्योंकि तीन क्रमागत धन पूर्णाकों में कम-से-कम एक पूर्णांक तीन से विभाज्य होगा तथा एक पद दो से विभाज्य होगा। अतः तीनों का गुणनफल 6 से विभाज्य होगा।

प्रश्न 4. क्या कोई दो संख्याओं का HCF = 18 एवं LCM = 380 हो सकता है? अपने उत्तर का कारण बताइए।

उत्तर— कभी नहीं हो सकता, क्योंकि दो संख्याओं का LCM उनके HCF से विभाज्य होता है जबकि संख्या 380 संख्या 18 से विभाज्य नहीं है।

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. किसी खेल के मैदान के चारों ओर एक वृत्ताकार पथ है। इस मैदान का एक चक्कर लगाने में सोनिया को 18 मिनट लगते हैं, जबकि इसी मैदान का एक चक्कर लगाने में रवि को 12 मिनट लगते हैं। मान लीजिए वे दोनों एक ही स्थान और एक ही समय पर चलना प्रारम्भ करके एक ही दिशा में चलते हैं। कितने समय बाद वे पुनः प्रारम्भिक स्थान पर मिलेंगे?

हल : $18 = 2 \times 3 \times 3 = 2^1 \times 3^2$
 $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3^1$

LCM (18, 12) = $2^2 \times 3^2 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$

अतः, वे पुनः 36 मिनट बाद प्रारम्भिक स्थान पर मिलेंगे।

उत्तर

प्रश्न 2. प्रातः भ्रमण (Morning Walk) पर तीन व्यक्ति एक साथ कदम बढ़ाते हैं। उनके कदमों की माप क्रमशः 40 cm, 42 cm एवं 45 cm है। वह लघुतम दूरी क्या होगी जिससे प्रत्येक व्यक्ति समान दूरी पूर्ण कदमों में तय कर सकें।

हल : इसके लिए हमको 40, 42, एवं 45 का LCM ज्ञात करना होगा।

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5^1$
 $42 = 2 \times 3 \times 7 = 2^1 \times 3^1 \times 7^1$
 $45 = 3 \times 3 \times 5 = 3^2 \times 5^1$
 LCM = $2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$
 $= 8 \times 9 \times 35 = 2520 \text{ cm}$

अतः, वह अभीष्ट लघुतम दूरी होगी, 2520 cm अर्थात् 25.20 m.

उत्तर

प्रश्न 3. पूर्णाकों के निम्नलिखित युग्मों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM है :

(i) 26 और 91 (ii) 510 और 92 (iii) 336 और 54 (iv) 6 और 20. (2019)

हल : (i) $26 = 2 \times 13$
 $91 = 7 \times 13$

HCF = 13

LCM = $2 \times 7 \times 13 = 182$

अब HCF (26, 91) × LCM (26, 91) = $13 \times 182 = 2366$

एवं $26 \times 91 = 2366$

अतः, HCF (26, 91) × LCM (26, 91) = 26×91

उत्तर

उत्तर

सत्यापित

(ii) $510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17$

$92 = 2 \times 2 \times 23$

HCF = 2

LCM = $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 23 = 23460$

अब HCF (510, 92) \times LCM (510, 92) = $2 \times 23460 = 46920$

एवं $510 \times 92 = 46920$

अतः, HCF (510, 92) \times LCM (510, 92) = 510×92

(iii) $336 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$

$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$

HCF = $2 \times 3 = 6$

LCM = $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 = 3024$

अब HCF (336, 54) \times LCM (336, 54) = $6 \times 3024 = 18144$

एवं $336 \times 54 = 18144$

अतः, HCF (336, 54) \times LCM (336, 54) = 336×54

(iv) $6 = 2 \times 3$

$20 = 2 \times 2 \times 5$

HCF = 2

LCM = $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$

अब HCF (6, 20) \times LCM (6, 20) = $2 \times 60 = 120$

अतः, HCF (6, 20) \times LCM (6, 20) = 6×20

प्रश्न 4. अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा निम्नलिखित पूर्णाकों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए :

(i) 12, 15 और 21 (2020) (ii) 17, 23 और 29

(iii) 8, 9 और 25 (iv) 6, 72 और 120. (2019, 22)

हल : (i) $12 = 2 \times 2 \times 3$

$15 = 3 \times 5$

$21 = 3 \times 7$

HCF = 3

LCM = $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$

अतः, अभीष्ट HCF = 3 एवं LCM = 420

(ii) $17 = 1 \times 17$

$23 = 1 \times 23$

$29 = 1 \times 29$

HCF = 1

LCM = $17 \times 23 \times 29 = 11339$

अतः, अभीष्ट HCF = 1 एवं LCM = 11339

(iii) $8 = 1 \times 2 \times 2 \times 2$

$9 = 1 \times 3 \times 3$

$25 = 1 \times 5 \times 5$

HCF = 1

LCM = $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 1800$

अतः, अभीष्ट HCF = 1 एवं LCM = 1800

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad & 6 = 2 \times 3 \\
 & 72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \\
 & \underline{120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5} \\
 & \text{HCF} = 2 \times 3 = 6 \\
 & \text{LCM} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 360
 \end{aligned}$$

अतः, अभीष्ट HCF = 6 एवं LCM = 360

उत्तर

प्रश्न 5. HCF (306, 657) = 9 दिया है। LCM (306, 657) ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल : LCM (306, 657) \times HCF (306, 657) = 306 \times 657}$$

$$\Rightarrow \text{LCM (306, 657)} = \frac{306 \times 657}{9} \quad [\because \text{HCF (306, 657)} = 9 \text{ (दिया है)}]$$

$$\Rightarrow \text{LCM (306, 657)} = \frac{201042}{9} = 22338$$

अतः, अभीष्ट LCM (306, 657) = 22338

उत्तर

प्रश्न 6. अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा 96 और 404 का HCF ज्ञात कीजिए फिर इनका LCM ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल : } \begin{aligned} 96 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ 404 &= 2 \times 2 \times 101 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{HCF (96, 404)} = 2 \times 2 = 4$$

उत्तर

$$\therefore \text{LCM (96, 404) \times HCF (96, 404) = 96 \times 404}$$

$$\therefore \text{LCM (96, 404) \times 4 = 96 \times 404}$$

$$\Rightarrow \text{LCM (96, 404)} = \frac{96 \times 404}{4} = 9696$$

उत्तर

दीर्घ उत्तरीय/विश्लेषणात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। (2020)

हल : हम इसके विपरीत यह मान लेते हैं कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अतः हम a और b दो सह-अभाज्य पूर्णांक ऐसे लेते हैं कि $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$, जहाँ $b \neq 0$

$$\Rightarrow b\sqrt{5} = a \Rightarrow 5b^2 = a^2 \quad (\text{दोनों ओर वर्ग करने पर})$$

अतः a^2 , 5 से विभाज्य है अर्थात् a , 5 से विभाज्य है।

अतः हम $a = 5c$ ले सकते हैं, जहाँ c एक पूर्णांक है।

$$\Rightarrow 5b^2 = (5c)^2 = 25c^2 \Rightarrow b^2 = 5c^2$$

अतः b^2 , 5 से विभाज्य है अर्थात् b भी 5 से विभाज्य है। इसलिए a और b में कम-से-कम एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 5 है।

लेकिन यह इस तथ्य से विरोधाभासी है कि a और b दो सह अभाज्य पूर्णांक हैं। यह विरोधाभास त्रुटि पूर्ण कल्पना के कारण हुआ।

अतः, इससे निष्कर्ष निकलता है कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

इति सिद्धम्

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय संख्याएँ हैं—

$$(i) \sqrt{2},$$

$$(ii) \sqrt{3}.$$

हल : प्रश्न 1 के अनुसार स्वयं हल कीजिए।

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : हम इसके विपरीत यह मान लेते हैं कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः हम ऐसी दो सह अभाज्य पूर्णांक संख्याएँ a और b ($b \neq 0$) ज्ञात कर सकते हैं कि $3 + 2\sqrt{5} = \frac{a}{b}$.

$$\Rightarrow 2\sqrt{5} = \frac{a}{b} - 3 \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a}{2b} - \frac{3}{2}$$

चूँकि a और b दो पूर्णांक हैं, जहाँ $b \neq 0$

अतः $\frac{a}{2b} - \frac{3}{2}$ एक परिमेय संख्या होगी और इसलिए $\sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या होगी, लेकिन यह इस तथ्य के विरोधाभासी है कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। यह विरोधाभास त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ।

अतः, इससे निष्कर्ष निकलता है कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। इति सिद्धम्

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय हैं :

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, (ii) $7\sqrt{5}$, (iii) $3\sqrt{2}$, (iv) $6 + \sqrt{2}$, (v) $5 - \sqrt{3}$. (2019)

हल : (i) हम इसके विपरीत यह मान लें कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है।

अर्थात् हम ऐसी सह अभाज्य अशून्य पूर्णांक संख्याएँ a और b ज्ञात कर सकते हैं कि $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{b}{a}, \text{ जहाँ } a \text{ और } b \text{ पूर्णांक हैं}$$

इसलिए $\frac{b}{a}$ एक परिमेय संख्या है और इसलिए $\sqrt{2}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

लेकिन इससे इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अतः, हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है। इति सिद्धम्

(ii) हम इसके विपरीत यह मान लें कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

अर्थात् हम ऐसी सह अभाज्य पूर्णांक संख्याएँ a और b ($b \neq 0$) ज्ञात कर सकते हैं कि

$$7\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a}{7b}$$

चूँकि $7, a$ एवं b पूर्णांक हैं। इसलिए $\frac{a}{7b}$ एक परिमेय संख्या होगी और इसलिए $\sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

लेकिन इससे इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अतः, हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। इति सिद्धम्

(iii) हम इसके विपरीत यह मान लें कि $3\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

अर्थात् हम ऐसी सह अभाज्य पूर्णांक संख्याएँ a और b ($b \neq 0$) ज्ञात कर सकते हैं कि

$$3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{3b}$$

चूँकि $3, a$ एवं b पूर्णांक हैं। इसलिए $\frac{a}{3b}$ एक परिमेय संख्या होगी और इसलिए $\sqrt{2}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

लेकिन इससे इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अतः, हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

इति सिद्धम्

(iv) हम इसके विपरीत यह मान लेते हैं कि $6 + \sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

अर्थात् हम सह अभाज्य ऐसी पूर्णांक संख्याएँ a और b ($b \neq 0$) ज्ञात कर सकते हैं कि

$$6 + \sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b} - 6$$

यहाँ a, b एवं 6 पूर्णांक हैं इसलिए $\frac{a}{b} - 6$ एक परिमेय संख्या है और इसलिए $\sqrt{2}$ भी एक परिमेय संख्या है।

इससे इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अतः, हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि $6 + \sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

इति सिद्धम्

(v) हम इसके विपरीत यह मान लेते हैं कि $5 - \sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

अर्थात् हम सह अभाज्य ऐसी पूर्णांक संख्याएँ a और b ($b \neq 0$) ज्ञात कर सकते हैं कि

$$5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b}$$

यहाँ a, b एवं 5 पूर्णांक हैं इसलिए $5 - \frac{a}{b}$ एक परिमेय संख्या होगी और इसलिए $\sqrt{3}$ भी एक परिमेय संख्या है।

लेकिन इससे इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अतः, हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि $5 - \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

इति सिद्धम्

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : मान लीजिए $\sqrt{3} + \sqrt{5} = a$, जहाँ a एक परिमेय संख्या है।

$$\Rightarrow \sqrt{3} = a - \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 3 = a^2 - 2a\sqrt{5} + 5 \quad (\text{दोनों ओर वर्ग करने पर})$$

$$\Rightarrow 2a\sqrt{5} = a^2 + 5 - 3$$

$$= a^2 + 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a^2 + 2}{2a} \text{ जो एक विरोधाभास है, क्योंकि } \sqrt{5} \text{ एक अपरिमेय}$$

संख्या तथा $\frac{a^2 + 2}{2a}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः, $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

इति सिद्धम्



अध्याय

2

बहुपद
[Polynomials]

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

बहु-विकल्पीय प्रश्न

- चर x के बहुपद $p(x)$ में x की निम्न घात बहुपद की घात कहलाती है :
 (a) निम्नतम घात (b) उच्चतम घात
 (c) समस्त घातों का योग (d) घातों का अन्तर।
- द्विघात बहुपद में बहुपद की घात होगी :
 (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) अनन्त।
- द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यकों का योग होगा : (2022)
 (a) $\frac{b}{a}$ (b) $\frac{a}{b}$ (c) $-\frac{b}{a}$ (d) $-\frac{c}{a}$
- यदि किसी द्विघात बहुपद $(k-1)x^2 + kx + 1$ का एक शून्यक -3 है तब k का मान होगा :
 (a) $\frac{4}{3}$ (b) $-\frac{4}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $-\frac{2}{3}$
- एक द्विघात बहुपद जिसके शून्यक -3 एवं 4 हैं होगा :
 (a) $x^2 - x + 12$ (b) $x^2 + x + 12$ (c) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - 6$ (d) $2x^2 + 2x - 24$
- यदि किसी द्विघात बहुपद $x^2 + (a+1)x + b$ के शून्यक 2 एवं -3 हों, तो :
 (a) $a = -7, b = -1$ (b) $a = 5, b = -1$ (c) $a = 2, b = -6$ (d) $a = 0, b = -6$
- -2 एवं 5 शून्यक वाले बहुपदों की संख्या होगी :
 (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 3 से अधिक।
- एक त्रिघात (घन) बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ का एक शून्यक शून्य (0) है, तो दो अन्य शून्यकों का गुणनफल होगा :
 (a) $-\frac{c}{a}$ (b) $\frac{c}{a}$ (c) 0 (d) $-\frac{b}{a}$
- यदि किसी त्रिघात (घन) बहुपद $x^3 + ax^2 + bx + c$ का एक शून्यक -1 हो, तब अन्य दो शून्यकों का गुणनफल होगा :
 (a) $b - a + 1$ (b) $b - a - 1$ (c) $a - b + 1$ (d) $a - b - 1$
- एक द्विघात (वर्ग) बहुपद $x^2 + 99x + 127$ के शून्यक होंगे :
 (a) दोनों धनात्मक (b) दोनों ऋणात्मक
 (c) एक धनात्मक तथा दूसरा ऋणात्मक (d) दोनों समान।

11. यदि किसी वर्ग (द्विघात) बहुपद $ax^2 + bx + c$, $c \neq 0$ के शून्यक समान हों, तब
 (a) c एवं a के चिह्न विपरीत होंगे (b) c एवं b के चिह्न विपरीत होंगे
 (c) c एवं a के चिह्न समान होंगे (d) c एवं b के चिह्न समान होंगे।
12. यदि द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक α और β हों, तो $\alpha.\beta$ का मान होगा : (2019)
 (a) $\frac{c}{a}$ (b) $\frac{a}{c}$ (c) $-\frac{c}{a}$ (d) $-\frac{a}{c}$.
13. बहुपद $x^2 - 3$ के शून्यक होंगे : (2019)
 (a) $\pm\sqrt{3}$ (b) ± 3 (c) 3 (d) 9.
- उत्तर—1. (b), 2. (b), 3. (c), 4. (a), 5. (c), 6. (d), 7. (d), 8. (b), 9. (a), 10. (b), 11. (c), 12. (a), 13. (a).

रिक्त स्थानों की पूर्ति

1. चर x के बहुपद $p(x)$ में x की उच्चतम घात की घात कहलाती है।
 2. एक बहुपद जिसकी घात 3 है, वह बहुपद कहलाता है। (2022)
 3. $(x - 1)(x - 2)$ के शून्यक होंगे एवं
 4. दो बहुपदों का योग होता है।
 5. $ax^2 + bx + c$ एक बहुपद का उदाहरण है।
 6. चर के वे मान जिनको बहुपद में प्रतिस्थापित करने पर बहुपद का मान शून्य हो जाता है कहलाता है।
 7. रैखिक बहुपद के अधिकतम शून्यक हो सकते हैं।
 उत्तर—1. बहुपद, 2. त्रिघात, 3. 1, 2, 4. एक बहुपद, 5. द्विघात, 6. शून्यक, 7. एक।

जोड़ी मिलाइए

- | स्तम्भ 'अ' | स्तम्भ 'ब' |
|------------------------------|----------------------------|
| 1. दो बहुपदों का गुणन | (a) परिमेय व्यंजक नहीं है। |
| 2. दो परिमेय व्यंजकों का योग | (b) चक्रीय क्रम व्यंजक है। |
| 3. $x^2 + 2\sqrt{x} + 1$ | (c) बहुपद होता है। |
| 4. $\frac{x+2}{\sqrt{x}+3}$ | (d) परिमेय व्यंजक होता है। |
| 5. $ab + bc + ca$ | (e) बहुपद नहीं है। |
- उत्तर—1.→(c), 2.→(d), 3.→(e), 4.→(a), 5.→(b).

सत्य/असत्य

1. एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के रूप का होता है, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$.
 2. $\sqrt{x} + 2$ एक बहुपद है।
 3. बहुपद $p(x)$ में x की उच्चतम घात बहुपद की घात कहलाती है।
 4. द्विघात बहुपद में केवल एक शून्यक हो सकता है।
 5. घा. 2 के किसी बहुपद के अधिक-से-अधिक दो शून्यक हो सकते हैं। (2020)
 6. एक वास्तविक संख्या k बहुपद $p(x)$ का शून्यक कहलाती है, यदि $p(k) = 0$.
 7. घात 2 के बहुपद द्विघात बहुपद कहलाते हैं।
 उत्तर—1. सत्य, 2. असत्य, 3. सत्य, 4. असत्य, 5. सत्य, 6. सत्य, 7. सत्य।

एक शब्द/वाक्य में उत्तर

1. रैखिक बहुपद की घात कितनी होती है?
 2. यदि $ax^2 + bx + c$ के शून्यक α एवं β हों तो $\alpha + \beta$ का मान क्या होगा?
 3. यदि $ax^2 + bx + c$ के शून्यक α एवं β हों तो $\alpha \cdot \beta$ का मान क्या होगा?
 4. त्रिघात बहुपद के अधिकतम कितने शून्यक हो सकते हैं?
- उत्तर—1. एक, 2. $-\frac{b}{a}$, 3. $\frac{c}{a}$, 4. तीन।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. निम्न द्विघात व्यंजकों के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की जाँच कीजिए :

- (i) $x^2 - 2x - 8$, (2020) (ii) $4s^2 - 4s + 1$, (iii) $6x^2 - 3 - 7x$, (2022)
 (iv) $4u^2 + 8u$, (v) $t^2 - 15$, (vi) $3x^2 - x - 4$,
 (vii) $x^2 + 7x + 10$, (2019) (viii) $x^2 - 3$, (2020) (ix) $4x^2 - 3x - 1$,
 (x) $3x^2 + 4x - 4$, (xi) $5t^2 + 12t + 7$, (xii) $2x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{3}{4}$,
 (xiii) $4x^2 + 5\sqrt{2}x - 3$, (xiv) $2s^2 - (1 + 2\sqrt{2})s + \sqrt{2}$,
 (xv) $u^2 + 4\sqrt{3}u - 15$, (xvi) $y^2 + \frac{3}{2}\sqrt{5}y - 5$, (xvii) $7y^2 - \frac{11}{3}y - \frac{2}{3}$.

हल : (i) $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$ (गुणनखण्ड करने पर)

चूँकि $x^2 - 2x - 8$ का मान शून्य होगा जब या तो $x - 4 = 0$
 $\Rightarrow x = 4$

अथवा $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

अतः, $x^2 - 2x - 8$ के शून्यक 4 एवं -2 होंगे।

अब शून्यकों का योग $= 4 - 2 = 2 = \frac{-(-2)}{1} = -\frac{b}{a}$

एवं शून्यकों का गुणनफल $= 4(-2) = -8 = \frac{-8}{1} = \frac{c}{a}$

अतः, शून्यकों तथा गुणांकों के बीच सम्बन्धों की सत्यता प्रमाणित होती है।

(ii) $4s^2 - 4s + 1 = (2s - 1)^2$

चूँकि $4s^2 - 4s + 1$ का मान शून्य होगा जब

$$2s - 1 = 0 \Rightarrow 2s = 1 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$

अतः, $4s^2 - 4s + 1$ के प्रत्येक शून्यक का मान $= \frac{1}{2}$

अब शून्यकों का योग $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \frac{-(-4)}{4} = -\frac{b}{a}$

एवं शून्यकों का गुणनफल $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{c}{a}$

अतः, शून्यकों तथा गुणांकों के बीच सम्बन्धों की सत्यता प्रमाणित होती है।

(iii) $6x^2 - 3 - 7x = 6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1)$

चूँकि $6x^2 - 3 - 7x$ का मान शून्य होगा जब या तो

$$2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

अथवा $3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

अतः, $6x^2 - 3 - 7x$ के शून्यक $\frac{3}{2}$ और $-\frac{1}{3}$ होंगे।

उत्तर

अब शून्यकों का योग $= \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{9-2}{6} = \frac{7}{6}$
 $= \frac{-(-7)}{6} = \frac{-b}{a}$

एवं शून्यकों का गुणनफल $= \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2}$
 $= -\frac{3}{6} = \frac{c}{a}$

अतः, शून्यकों तथा गुणांकों के बीच सम्बन्धों की सत्यता प्रमाणित होती है।

उत्तर

(iv) $4u^2 + 8u = 4u(u + 2)$

चूँकि $4u^2 + 8u$ का मान शून्य होगा जब या तो $u = 0$

अथवा $u + 2 = 0 \Rightarrow u = -2$

अतः, $4u^2 + 8u$ के शून्यक 0 और -2 होंगे।

उत्तर

अब शून्यकों का योग $= 0 + (-2) = -2 = \frac{-(8)}{4} = \frac{-b}{a}$

एवं शून्यकों का गुणनफल $= 0 \times (-2) = 0 = \frac{0}{4} = \frac{c}{a}$

अतः, शून्यकों तथा गुणांकों के बीच सम्बन्धों की सत्यता प्रमाणित होती है।

उत्तर

(v) $t^2 - 15 = (t)^2 - (\sqrt{15})^2 = (t + \sqrt{15})(t - \sqrt{15})$

चूँकि $t^2 - 15$ का मान शून्य होगा जब या तो

$t + \sqrt{15} = 0 \Rightarrow t = -\sqrt{15}$

अथवा $t - \sqrt{15} = 0$

$\Rightarrow t = \sqrt{15}$

अतः, $t^2 - 15$ के शून्यक $-\sqrt{15}$ और $\sqrt{15}$ होंगे।

उत्तर

अब शून्यकों का योग $= -\sqrt{15} + \sqrt{15} = 0 = \frac{-0}{1} = \frac{-b}{a}$

एवं शून्यकों का गुणनफल $= -\sqrt{15} \times \sqrt{15} = -15 = \frac{-15}{1} = \frac{c}{a}$

अतः, शून्यकों तथा गुणांकों के बीच सम्बन्धों की सत्यता प्रमाणित होती है।

उत्तर

(vi) $3x^2 - x - 4 = (3x - 4)(x + 1)$

चूँकि $3x^2 - x - 4$ का मान शून्य होगा जब

या तो $3x - 4 = 0 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

अथवा $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

अतः, $3x^2 - x - 4$ के शून्यक $\frac{4}{3}$ और -1 होंगे।

उत्तर

अब शून्यकों का योग $= \frac{4}{3} + (-1) = \frac{1}{3} = \frac{-(-1)}{3} = \frac{-b}{a}$

एवं शून्यकों का गुणनफल = $\frac{4}{3} \times (-1) = \frac{-4}{3} = \frac{c}{a}$

अतः, शून्यकों तथा गुणांकों के बीच सम्बन्धों की सत्यता प्रमाणित होती है।

उत्तर

(vii) $x^2 + 7x + 10 = (x + 5)(x + 2)$

चूँकि $x^2 + 7x + 10$ का मान शून्य होगा जब

या तो $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

अथवा $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

अतः, $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक -5 और -2 होंगे।

उत्तर

अब शून्यकों का योग = $(-5) + (-2) = -7 = -\frac{7}{1} = -\frac{-b}{a}$

एवं शून्यकों का गुणनफल = $(-5) \times (-2) = 10 = \frac{10}{1} = \frac{c}{a}$

अतः, शून्यकों तथा गुणांकों के बीच सम्बन्धों की सत्यता प्रमाणित होती है।

उत्तर

(viii) $x^2 - 3 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

चूँकि $x^2 - 3$ का मान शून्य होगा जब

या तो $x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}$

अथवा $x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}$

अतः, $x^2 - 3$ के शून्यक $-\sqrt{3}$ और $\sqrt{3}$ होंगे।

उत्तर

अब शून्यकों का योग = $(-\sqrt{3}) + \sqrt{3} = 0 = \frac{-b}{a}$

एवं शून्यकों का गुणनफल = $(-\sqrt{3}) \times (\sqrt{3}) = -3 = \frac{c}{a}$

अतः, शून्यकों तथा गुणांकों के बीच सम्बन्धों की सत्यता प्रमाणित होती है।

उत्तर

(ix) $4x^2 - 3x - 1 = 4x^2 - 4x + x - 1$
 $= 4x(x - 1) + 1(x - 1)$
 $= (x - 1)(4x + 1)$

जब $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ एवं जब $4x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

अतः, अभीष्ट शून्यक 1 एवं $-\frac{1}{4}$ हैं।

उत्तर

अब शून्यकों का योग = $1 + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$

$= -\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{-b}{a}$

एवं शून्यकों का गुणनफल = $1 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{c}{a}$

अतः, अभीष्ट सम्बन्धों का सत्यापन होता है।

उत्तर

(x) $3x^2 + 4x - 4 = 3x^2 + 6x - 2x - 4$
 $= 3x(x + 2) - 2(x + 2)$
 $= (x + 2)(3x - 2)$

जब $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ एवं जब $3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

अतः, अभीष्ट शून्यक -2 एवं $\frac{2}{3}$ हैं।

उत्तर

अब शून्यकों का योग $= -2 + \frac{2}{3} = -\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{-b}{a}$

एवं शून्यकों का गुणनफल $= -2 \times \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} = \left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{c}{a}$

अतः, अभीष्ट सम्बन्धों का सत्यापन होता है।

उत्तर

(xi) $5t^2 + 12t + 7 = 5t^2 + 5t + 7t + 7$
 $= 5t(t+1) + 7(t+1)$
 $= (t+1)(5t+7)$

जब $t+1=0 \Rightarrow t=-1$ एवं जब $5t+7=0 \Rightarrow t=-\frac{7}{5}$

अतः, अभीष्ट शून्यक -1 एवं $-\frac{7}{5}$ हैं।

उत्तर

अब शून्यकों का योग $= (-1) + \left(-\frac{7}{5}\right) = -\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{-b}{a}$

एवं शून्यकों का गुणनफल $= (-1) \times \left(-\frac{7}{5}\right) = \frac{7}{5} = \frac{c}{a}$

अतः, अभीष्ट सम्बन्धों का सत्यापन होता है।

उत्तर

(xii) $2x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(8x^2 + 14x + 3) = \frac{1}{4}(8x^2 + 12x + 2x + 3)$
 $= \frac{1}{4}[4x(2x+3) + 1(2x+3)]$
 $= \frac{1}{4}(2x+3)(4x+1)$

जब $2x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ और जब $4x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{4}$

अतः, अभीष्ट शून्यक $-\frac{3}{2}$ एवं $-\frac{1}{4}$ हैं।

उत्तर

अब शून्यकों का योग $= -\frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) = -\left(\frac{7}{4}\right)$
 $= -\left(\frac{7/2}{2}\right) = \frac{-b}{a}$

एवं शून्यकों का गुणनफल $= \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8} = \left(\frac{3/4}{2}\right) = \frac{c}{a}$

अतः, अभीष्ट सम्बन्धों का सत्यापन होता है।

उत्तर

(xiii) $4x^2 + 5\sqrt{2}x - 3 = 4x^2 + 6\sqrt{2}x - \sqrt{2}x - 3$
 $= 2\sqrt{2}x(\sqrt{2}x+3) - 1(\sqrt{2}x+3)$
 $= (\sqrt{2}x+3)(2\sqrt{2}x-1)$

जब $\sqrt{2}x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{\sqrt{2}}$ एवं जब $2\sqrt{2}x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

अतः, अभीष्ट शून्यक $-\frac{3}{\sqrt{2}}$ एवं $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ हैं।

उत्तर

अब शून्यकों का योग $= -\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{-5}{2\sqrt{2}} = -\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{-b}{a}$

एवं शून्यकों का गुणनफल = $-\frac{3}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right) = \left(-\frac{3}{4} \right) = \frac{c}{a}$

अतः, अभीष्ट सम्बन्धों का सत्यापन होता है।

$$\begin{aligned} \text{(xiv)} \quad 2s^2 - (1 + 2\sqrt{2})s + \sqrt{2} &= 2s^2 - s - 2\sqrt{2}s + \sqrt{2} \\ &= s(2s - 1) - \sqrt{2}(2s - 1) \\ &= (2s - 1)(s - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

जब $2s - 1 = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$ एवं जब $s - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow s = \sqrt{2}$

अतः, अभीष्ट शून्यक $\frac{1}{2}$ एवं $\sqrt{2}$ हैं।

अब शून्यकों का योग = $\frac{1}{2} + \sqrt{2} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} = -\left[\frac{-(1 + 2\sqrt{2})}{2} \right] = \frac{-b}{a}$

एवं शून्यकों का गुणनफल = $\frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{c}{a}$

अतः, अभीष्ट सम्बन्धों का सत्यापन होता है।

$$\begin{aligned} \text{(xv)} \quad u^2 + 4\sqrt{3}u - 15 &= u^2 + 5\sqrt{3}u - \sqrt{3}u - 15 \\ &= u(u + 5\sqrt{3}) - \sqrt{3}(u + 5\sqrt{3}) \\ &= (u + 5\sqrt{3})(u - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

जब $u + 5\sqrt{3} = 0 \Rightarrow u = -5\sqrt{3}$ एवं जब $u - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow u = \sqrt{3}$

अतः, अभीष्ट शून्यक $-5\sqrt{3}$ एवं $\sqrt{3}$ हैं।

अब शून्यकों का योग = $-5\sqrt{3} + \sqrt{3} = \left[\frac{-(4\sqrt{3})}{1} \right] = \frac{-b}{a}$

एवं शून्यकों का गुणनफल = $(-5\sqrt{3})\sqrt{3} = -\frac{15}{1} = \frac{c}{a}$

अतः, अभीष्ट सम्बन्धों का सत्यापन होता है।

$$\begin{aligned} \text{(xvi)} \quad y^2 + \frac{3}{2}\sqrt{5}y - 5 &= \frac{1}{2}(2y^2 + 3\sqrt{5}y - 10) \\ &= \frac{1}{2}(2y^2 + 4\sqrt{5}y - \sqrt{5}y - 10) \\ &= \frac{1}{2}[2y(y + 2\sqrt{5}) - \sqrt{5}(y + 2\sqrt{5})] \\ &= \frac{1}{2}(y + 2\sqrt{5})(2y - \sqrt{5}) \end{aligned}$$

जब $y + 2\sqrt{5} = 0 \Rightarrow y = -2\sqrt{5}$ और जब $2y - \sqrt{5} = 0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{5}}{2}$

अतः, अभीष्ट शून्यक $-2\sqrt{5}$ एवं $\frac{\sqrt{5}}{2}$ हैं।

अब शून्यकों का योग = $-2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} = -\left[\frac{\frac{3}{2}\sqrt{5}}{1} \right] = \frac{-b}{a}$

एवं शून्यकों का गुणनफल = $-2\sqrt{5} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) = \left(\frac{-5}{1} \right) = \frac{c}{a}$

अतः, अभीष्ट सम्बन्धों का सत्यापन होता है।

उत्तर

उत्तर

उत्तर

उत्तर

उत्तर

उत्तर

उत्तर

$$\begin{aligned}
 \text{(xvii)} \quad 7y^2 - \frac{11}{3}y - \frac{2}{3} &= \frac{1}{3} [21y^2 - 11y - 2] \\
 &= \frac{1}{3} [21y^2 - 14y + 3y - 2] \\
 &= \frac{1}{3} [7y(3y - 2) + 1(3y - 2)] \\
 &= \frac{1}{3} (3y - 2)(7y + 1)
 \end{aligned}$$

जब $3y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$ एवं जब $7y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{7}$

अतः, अभीष्ट शून्यक $\frac{2}{3}$ एवं $-\frac{1}{7}$ हैं।

उत्तर

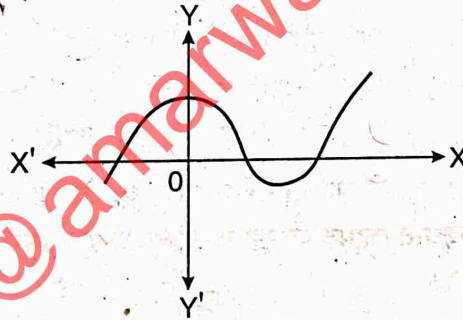
अब शून्यकों का योग $= \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{11}{3 \times 7} = -\left(\frac{-11}{3 \times 7}\right) = \frac{-b}{a}$

एवं शून्यकों का गुणनफल $= \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{7}\right) = \left(\frac{-2/3}{7}\right) = \frac{c}{a}$

अतः, अभीष्ट सम्बन्धों का सत्यापन होता है।

उत्तर

प्रश्न 2. किसी बहुपद $p(x)$ के लिए, $y = p(x)$ का ग्राफ नीचे आकृति में दिया है। $p(x)$ के शून्यकों की संख्या ज्ञात कीजिए। (2020)



आकृति : 2.1

उत्तर— तीन शून्यक।

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः दी गई संख्या हैं :

(i) $\frac{1}{4}, -1$, (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$, (iii) $0, \sqrt{5}$, (iv) $1, 1$, (2022)

(v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$, (vi) $4, 1$, (vii) $-3, 2$. (2019)

हल : (i) मान लीजिए कि अभीष्ट द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है जिसके शून्यक α एवं β हैं, तो हम पाते हैं कि

$$\alpha + \beta = \frac{1}{4} = -\frac{b}{a} = \frac{-(-1)}{4}$$

और $\alpha\beta = -1 = \frac{c}{a} = \frac{(-4)}{4}$ (हर समान करने पर)

⇒ यदि $a = 4$ तब

$b = -1$ एवं $c = -4$ होगा।

अतः, एक द्विघात बहुपद जिसमें दी गई शर्तें सन्तुष्ट होती हैं, $4x^2 - x - 4$ है एवं अन्य कोई द्विघात बहुपद जो इन शर्तों को सन्तुष्ट करे $k(4x^2 - x - 4)$ होगा, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है। उत्तर

(ii) मान लीजिए अभीष्ट द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है जिसके शून्यक α एवं β हैं, तो हम पाते हैं कि

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \sqrt{2} = -\frac{(-3\sqrt{2})}{3}$$

और

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \quad (\text{हर समान करने पर})$$

⇒ यदि $a = 3$ तब

$b = -3\sqrt{2}$ एवं $c = 1$ होगा।

अतः, एक द्विघात बहुपद जिसमें दी गई शर्तें सन्तुष्ट होती हैं, $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ है एवं अन्य कोई द्विघात बहुपद जो इन शर्तों को सन्तुष्ट करे $k(3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1)$ होगा, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है। उत्तर

(iii) मान लीजिए अभीष्ट द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है जिसमें शून्यक α एवं β हैं तो हम पाते हैं कि

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 0 = -\frac{0}{1}$$

और

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{1}$$

⇒ यदि $a = 1$ तब

$b = 0$ एवं $c = \sqrt{5}$ होगा।

अतः, एक द्विघात बहुपद जिसमें दी गई शर्तें सन्तुष्ट होती हैं $x^2 + 0x + \sqrt{5}$ अर्थात् $x^2 + \sqrt{5}$ है एवं अन्य कोई द्विघात बहुपद जो इन शर्तों को सन्तुष्ट करे $k(x^2 + \sqrt{5})$ होगा, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है। उत्तर

(iv) मान लीजिए अभीष्ट द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है जिसके शून्यक α एवं β हैं, तो हम पाते हैं कि

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 1 = -\frac{(-1)}{1}$$

और

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = 1 = \frac{1}{1}$$

⇒ यदि $a = 1$ तब

$b = -1$ एवं $c = 1$ होगा।

अतः, एक द्विघात बहुपद जिसमें दी गई शर्तें सन्तुष्ट होती हैं $x^2 - x + 1$ है एवं अन्य कोई द्विघात बहुपद जो इन शर्तों को सन्तुष्ट करे $k(x^2 - x + 1)$ होगा, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है। उत्तर

(v) मान लीजिए अभीष्ट द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है जिसके शून्यक α एवं β हैं, तो हम पाते हैं कि

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{4}$$

और

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{4}$$

⇒ यदि $a = 4$ तब

$b = 1$ एवं $c = 1$ होगा।

अतः, एक द्विघात बहुपद जिसमें दी गई शर्तें सन्तुष्ट होती हैं, $4x^2 + x + 1$ है एवं अन्य कोई द्विघात बहुपद जो इन शर्तों को सन्तुष्ट करे $k(4x^2 + x + 1)$ होगा, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।

उत्तर

(vi) मान लीजिए अभीष्ट द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है जिसके शून्यक α एवं β हैं, तो हम पाते हैं कि

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 4 = -\frac{(-4)}{1}$$

और

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = 1 = \frac{1}{1}$$

\Rightarrow यदि $a = 1$ तब

$$b = -4 \text{ एवं } c = 1 \text{ होगा।}$$

अतः, एक द्विघात बहुपद जिसमें दी गई शर्तें सन्तुष्ट होती हैं, $x^2 - 4x + 1$ है एवं अन्य कोई द्विघात बहुपद जो इन शर्तों को सन्तुष्ट करे $k(4x^2 - 4x + 1)$ होगा, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।

उत्तर

(vii) मान लीजिए अभीष्ट द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है जिसके शून्यक α एवं β हैं, तो हम पाते हैं कि

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -3 = \frac{-(3)}{1}$$

और

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = 2 = \frac{2}{1}$$

\Rightarrow यदि $a = 1$ तब

$$b = 3 \text{ एवं } c = 2 \text{ होगा।}$$

अतः, एक द्विघात बहुपद जिसमें दी गई शर्तें सन्तुष्ट होती हैं, $x^2 + 3x + 2$ है एवं अन्य कोई द्विघात बहुपद जो इन शर्तों को सन्तुष्ट करे $k(x^2 + 4x + 2)$ होगा, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।

उत्तर



अध्याय

3

दो चरों वाले रैखिक समीकरण युग्म

[Pair of Linear Equations in Two Variables]

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

बहु-विकल्पीय प्रश्न

1. समीकरण युग्म $6x - 3y + 10 = 0$ एवं $2x - y + 9 = 0$ ग्राफ पर दो रेखाएँ प्रदर्शित करती हैं

जो :

- एक निश्चित बिन्दु पर परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं
- दो निश्चित बिन्दुओं पर परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं
- सम्पाती होती हैं
- समान्तर होती हैं।

2. समीकरण निकाय $x + 2y + 5 = 0$ और $-3x - 6y + 1 = 0$ का हल होगा : (2022)
 (a) अद्वितीय हल (b) कोई हल नहीं (c) अनन्ततः अनेक हल (d) दो हल।
3. यदि एक समीकरण युग्म संगत है, तो रेखाएँ होंगी :
 (a) समान्तर (b) सदैव सम्पाती (c) प्रतिच्छेदी या सम्पाती (d) सदैव प्रतिच्छेदी।
4. समीकरण युग्म $y = 0$ और $y = -7$ के होंगे :
 (a) एक हल (b) दो हल (c) अनन्ततः अनेक हल (d) कोई हल नहीं।
5. समीकरण युग्म $x = a$ एवं $y = b$ ग्राफीय रूप से रेखाएँ प्रदर्शित करता है जो होती हैं :
 (a) समान्तर (b) (b, a) पर प्रतिच्छेदी (c) सम्पाती (d) (a, b) पर प्रतिच्छेदी।
6. जब $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ हो, तो समीकरण निकाय $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$: (2019)
 (a) के दो हल होंगे (b) का कोई हल नहीं होगा
 (c) के अनन्त अनेक हल होंगे (d) का अद्वितीय हल होगा।
7. जब $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ हो, तो समीकरण निकाय $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$: (2020)
 (a) का एक अद्वितीय हल होगा (b) का कोई हल नहीं होगा
 (c) के दो हल होंगे (d) के अनन्त अनेक हल होंगे।
8. $x - 2y = 0$ और $3x + 4y - 20 = 0$ रेखाएँ : (2019)
 (a) प्रतिच्छेद करती हैं (b) संपाती हैं
 (c) समान्तर हैं (d) इनमें से कोई नहीं।

उत्तर—1. (d), 2. (b), 3. (c), 4. (d), 5. (d), 6. (b), 7. (d), 8. (a).

रिक्त स्थानों की पूर्ति

1. एक ऐसा समीकरण, जिसका आलेख एक सरल रेखा होता है समीकरण कहलाता है।
 2. रैखिक समीकरण $ax + by + c = 0$ का आलेख एक रेखा है।
 3. x एवं y का मान युग्म (x, y) जो दिए हुए समीकरण $ax + by + c = 0$ को सन्तुष्ट करता है, उस समीकरण का कहलाता है।
 4. जब किसी समीकरण निकाय का कोई हल होता है, तब निकाय निकाय कहलाता है।
 5. जब किसी समीकरण निकाय का कोई भी हल नहीं होता, तब निकाय निकाय कहलाता है।
 6. समीकरण $x + y = 8$ में यदि $x = 3$, तब $y =$ होगा। (2022)

उत्तर—1. रैखिक, 2. सरल, 3. हल, 4. संगत, 5. असंगत, 6. 5.

जोड़ी मिलाइए

स्तम्भ 'अ'

- रेखाएँ सम्पाती हों
- रेखाएँ प्रतिच्छेदी हों
- रेखाएँ समान्तर हों
- रेखा x -अक्ष को काटे
- रेखा y -अक्ष को काटे

स्तम्भ 'ब'

- y का मान शून्य
- x का मान शून्य
- अनन्ततः अनेक हल
- अद्वितीय हल
- कोई हल नहीं

उत्तर—1.→(c), 2.→(d), 3.→(e), 4.→(a), 5.→(b).

सत्य/असत्य

- समीकरण $x + 2y = 5$ में यदि $x = 1$, तो $y = 2$ होगा।
 - वर्ग समीकरण का आरेख एक सरल रेखा होती है।
 - रैखिक समीकरण युग्म के कोई हल नहीं हो सकते या एक अद्वितीय हल हो सकता है अथवा अनन्ततः अनेक हल भी हो सकते हैं।
 - समीकरण युग्म $x = a$ एवं $y = b$ दो समान्तर रेखाओं को निरूपित करते हैं।
 - $ax + by + c = 0$ प्रकार के समीकरण रैखिक युगपद समीकरण होते हैं।
- उत्तर—1. सत्य, 2. असत्य, 3. सत्य, 4. असत्य, 5. सत्य।

एक शब्द/वाक्य में उत्तर

- वह समीकरण निकाय क्या कहलाता है, जिसका कोई हल न हो ?
 - वह समीकरण निकाय क्या कहलाता है जिसका कोई हल होता है।
 - जिस समीकरण का आलेख एक सरल रेखा हो, वह क्या कहलाता है ?
 - जब किसी समीकरण निकाय के अनन्तशः अनेक हल हों, तो उसका आलेख कैसा होगा ?
 - जब किसी समीकरण निकाय का कोई अद्वितीय हल हो, तो उसका आलेख कैसा होगा ?
 - दो चरों x व y वाले रैखिक समीकरण का मानक रूप लिखिए।
- उत्तर—1. असंगत, 2. संगत, 3. रैखिक समीकरण, 4. सम्पाती रेखाएँ, 5. प्रतिच्छेदी रेखाएँ,
6. $ax + by + c = 0$

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. अनुपातों $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि निम्न समीकरण युग्म द्वारा निरूपित रेखाएँ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं, समान्तर हैं अथवा सम्पाती हैं।

(i) $5x - 4y + 8 = 0$ (ii) $9x + 3y + 12 = 0$
 $7x + 6y - 9 = 0$ $18x + 6y + 24 = 0$
 (iii) $6x - 3y + 10 = 0$
 $2x - y + 9 = 0$

हल : (i) चूँकि $5x - 4y + 8 = 0$... (1)
 एवं $7x + 6y - 9 = 0$... (2)

इसलिए $\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{7}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-4}{6}$ एवं $\frac{c_1}{c_2} = \frac{8}{-9} = \frac{-8}{9}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

अतः समीकरण युग्म द्वारा निरूपित रेखाएँ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं।

(ii) चूँकि $9x + 3y + 12 = 0$... (1)
 एवं $18x + 6y + 24 = 0$... (2)

इसलिए, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ एवं $\frac{c_1}{c_2} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

अतः समीकरण युग्म द्वारा निरूपित रेखाएँ सम्पाती हैं।

(iii) चूँकि $6x - 3y + 10 = 0$... (1)
 एवं $2x - y + 9 = 0$... (2)

इसलिए, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-1} = \frac{3}{1}$ एवं $\frac{c_1}{c_2} = \frac{10}{9}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

अतः समीकरण युग्म द्वारा निरूपित रेखाएँ समान्तर हैं।

प्रश्न 2. अनुपातों $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ और $\frac{c_1}{c_2}$ की तुलना कर ज्ञात कीजिए कि निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म

संगत हैं या असंगत :

- $3x + 2y = 5$; $2x - 3y = 7$
- $2x - 3y = 8$; $4x - 6y = 9$
- $5x - 3y = 11$; $-10x + 6y = -22$.

हल : (i) चूँकि $3x + 2y = 5 \Rightarrow 3x + 2y - 5 = 0$... (1)

एवं $2x - 3y = 7 \Rightarrow 2x - 3y - 7 = 0$... (2)

इसलिए $\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{2}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$ एवं $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (अर्थात् रेखा युग्म प्रतिच्छेदी है)

अतः, उक्त रैखिक समीकरणों के युग्म संगत हैं। उत्तर

(ii) चूँकि $2x - 3y = 8 \Rightarrow 2x - 3y - 8 = 0$... (1)

एवं $4x - 6y = 9 \Rightarrow 4x - 6y - 9 = 0$... (2)

इसलिए $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$ एवं $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-8}{-9} = \frac{8}{9}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (अर्थात् रेखा युग्म समान्तर है)

अतः, उक्त रैखिक समीकरणों के युग्म असंगत हैं। उत्तर

(iii) चूँकि $5x - 3y = 11 \Rightarrow 5x - 3y - 11 = 0$... (1)

एवं $-10x + 6y = -22 \Rightarrow -10x + 6y + 22 = 0$... (2)

इसलिए $\frac{a_1}{a_2} = \frac{5}{-10} = -\frac{1}{2}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$ एवं $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-11}{22} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (अर्थात् रेखा युग्म सम्पाती है)

अतः, उक्त रैखिक समीकरणों के युग्म संगत हैं। उत्तर

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. समीकरणों $x - y + 1 = 0$ और $3x + 2y - 12 = 0$ का ग्राफ खींचिए। x -अक्ष और इन रेखाओं से बने त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए और त्रिभुजाकार पटल को छायांकित कीजिए।

हल : चूँकि $x - y + 1 = 0$... (1)

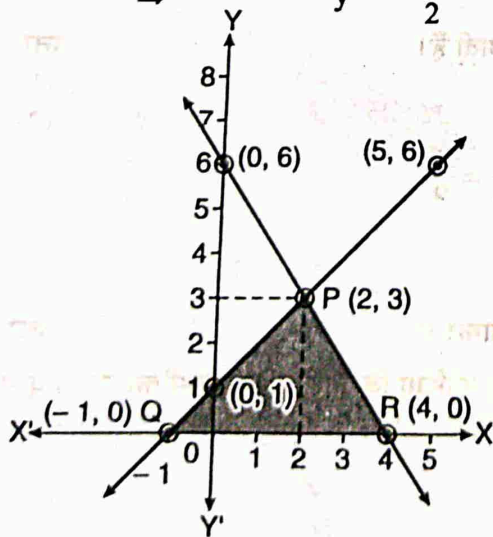
$\Rightarrow y = x + 1$

एवं $3x + 2y - 12 = 0$... (2)

$\Rightarrow y = \frac{12 - 3x}{2}$

x	0	5
$y = x + 1$	1	6

x	0	4
$y = \frac{12 - 3x}{2}$	6	0



आकृति : 3.1

अतः, दिए हुए रैखिक समीकरण रैखिक निरूपित रेखाओं एवं x -अक्ष से बने अभीष्ट त्रिभुज PQR के शीर्षों के अभीष्ट निर्देशांक $P(2, 3)$, $Q(-1, 0)$ और $R(4, 0)$ हैं तथा प्राप्त त्रिभुजाकार पटल को उपर्युक्त आकृति में छायांकित किया गया है। उत्तर

प्रश्न 2. निम्न रैखिक समीकरण युग्मों को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए :

(i) $0.2x + 0.3y = 1.3$; $0.4x + 0.5y = 2.3$ (ii) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$; $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$.

(iii) $x + y = 5$; $2x - 3y = 4$. (2022)

हल : (i) चूँकि $0.2x + 0.3y = 1.3$... (1)

एवं $0.4x + 0.5y = 2.3$... (2)

$\Rightarrow 2x + 3y = 13$... (3)

एवं $4x + 5y = 23$... (4) } [दोनों समीकरणों को 10 से गुणा करने पर]

समीकरण (3) से, $x = \frac{13-3y}{2}$ समीकरण (4) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं :

$$4 \left(\frac{13-3y}{2} \right) + 5y = 23 \Rightarrow 26 - 6y + 5y = 23$$

$\Rightarrow 6y - 5y = 26 - 23 \Rightarrow y = 3$ उत्तर

एवं $x = \frac{13-3y}{2} = \frac{13-3 \times 3}{2} = \frac{13-9}{2} = \frac{4}{2} = 2$ उत्तर

(ii) चूँकि $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$... (1)

एवं $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$... (2)

$\Rightarrow 9x - 10y = -12$... (3)

एवं $2x + 3y = 13$... (4) } [दोनों समीकरणों को 6 से गुणा करने पर]

समीकरण (4) से, $x = \frac{13-3y}{2}$ समीकरण (3) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं :

$$9 \left(\frac{13-3y}{2} \right) - 10y = -12$$

$\Rightarrow 117 - 27y - 20y = -24$

$\Rightarrow 27y + 20y = 117 + 24 \Rightarrow 47y = 141$

$\Rightarrow y = \frac{141}{47} = 3$ उत्तर

एवं $x = \frac{13-3y}{2} = \frac{13-9}{2} = \frac{4}{2} = 2$ उत्तर

(iii) $x + y = 5$... (1)

व $2x - 3y = 4$... (2)

$\Rightarrow y = (5-x)$... (3)

y के इस मान को समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$2x - 3(5-x) = 4 \Rightarrow 2x - 15 + 3x = 4$$

$\Rightarrow 5x = 4 + 15 \Rightarrow 5x = 19$

$\Rightarrow x = 19/5$

x के इस मान को समीकरण (3) में रखने पर,

$$y = 5 - \frac{19}{5} = \frac{25-19}{5} = \frac{6}{5}$$

अतः, $x = \frac{19}{5}$ व $y = \frac{6}{5}$ उत्तर

प्रश्न 3. $2x + 3y = 11$ और $2x - 4y = -24$ को हल कीजिए और इससे 'm' का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $y = mx + 3$ हो।

हल : चूँकि $2x + 3y = 11$... (1)

एवं $2x - 4y = -24$... (2)

समीकरण (2) से $x = 2y - 12$ समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं :

$$2(2y - 12) + 3y = 11 \Rightarrow 4y - 24 + 3y = 11$$

$$\Rightarrow 7y = 11 + 24 = 35 \Rightarrow y = \frac{35}{7} = 5$$

$$\text{एवं } x = 2y - 12 = 2 \times 5 - 12 = 10 - 12 = -2$$

अतः, दत्त समीकरणों का अभीष्ट हल $x = -2$ एवं $y = 5$ है।

उत्तर

अब चूँकि

$$y = mx + 3$$

$$\Rightarrow$$

$$5 = m(-2) + 3$$

(x एवं y के मान रखने पर)

$$\Rightarrow$$

$$2m = 3 - 5 = -2 \Rightarrow m = \frac{-2}{2} = -1$$

उत्तर

प्रश्न 4. निम्न समस्याओं में रैखिक समीकरण युग्म बनाइए और उनके हल प्रतिस्थापन विधि द्वारा ज्ञात कीजिए :

(i) दो संख्याओं का अन्तर 26 है और एक संख्या दूसरी संख्या की तीन गुनी है। उन्हें ज्ञात कीजिए।

(ii) दो सम्पूरक कोणों में बड़ा कोण छोटे कोण से 18 डिग्री अधिक है। उन्हें ज्ञात कीजिए। (2020)

(iii) एक क्रिकेट टीम के कोच ने 7 बल्ले तथा 6 गेंदें ₹ 3800 में खरीदीं। बाद में उसने 3 बल्ले तथा 5 गेंदें ₹ 1750 में खरीदीं। प्रत्येक बल्ले एवं प्रत्येक गेंद का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(iv) एक नगर में टैक्सी के भाड़े में एक नियत भाड़े के अतिरिक्त चली गई दूरी पर भाड़ा सम्मिलित किया जाता है। 10 km दूरी के लिए भाड़ा ₹ 105 है, तथा 15 km दूरी के लिए भाड़ा ₹ 155 है। नियत भाड़ा तथा प्रति km भाड़ा क्या है? एक व्यक्ति को 25 km यात्रा करने के लिए कितना भाड़ा देना होगा?

(v) यदि किसी भिन्न के अंश और हर दोनों में 2 जोड़ दिया जाए, तो वह $\frac{9}{11}$ हो जाती है। यदि अंश और हर दोनों में 3 जोड़ दिया जाए तो वह $\frac{5}{6}$ हो जाती है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

(vi) पाँच वर्ष बाद जैकब की आयु उसके पुत्र की आयु से तीन गुनी हो जाएगी। पाँच वर्ष पूर्व जैकब की आयु उसके पुत्र की आयु से सात गुनी थी। उनकी वर्तमान आयु क्या है?

हल : (i) मान लीजिए अभीष्ट संख्याएँ x एवं y हैं और $x > y$ तो प्रश्नानुसार,

$$x - y = 26 \dots(1) \quad \text{एवं} \quad x = 3y \dots(2)$$

अब समीकरण (2) से x का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं :

$$3y - y = 26 \Rightarrow 2y = 26 \Rightarrow y = \frac{26}{2} = 13$$

$$\text{एवं}$$

$$x = 3y = 3 \times 13 = 39$$

उत्तर

उत्तर

(ii) मान लीजिए कि दो अभीष्ट सम्पूरक कोण x एवं y हैं और $x > y$ तो प्रश्नानुसार,

$$x + y = 180 \quad (\text{सम्पूरक कोणों का योग} = 180^\circ) \dots(1)$$

$$\text{एवं}$$

$$x - y = 18 \dots(2)$$

समीकरण (2) से $x = 18 + y$ समीकरण (1) में रखने पर हम पाते हैं :

$$18 + y + y = 180 \Rightarrow 2y = 180 - 18 = 162$$

$$\Rightarrow$$

$$y = \frac{162}{2} = 81^\circ$$

उत्तर

एवं $x = 18 + y = 18 + 81 = 99^\circ$

उत्तर

(iii) मान लीजिए एक बल्ले का मूल्य ₹ x एवं एक गेंद का मूल्य ₹ y है तो प्रश्नानुसार,

$$7x + 6y = 3800 \dots(1)$$

$$\text{एवं}$$

$$3x + 5y = 1750 \dots(2)$$

...

समीकरण (2) से, $x = \frac{1750 - 5y}{3}$ समीकरण (1) में रखने पर,

$$7 \left(\frac{1750 - 5y}{3} \right) + 6y = 3800$$

$$\Rightarrow 12250 - 35y + 18y = 11400$$

$$\Rightarrow -17y = 11400 - 12250 = -850$$

$$\Rightarrow y = \frac{-850}{-17} = ₹ 50$$

उत्तर

$$\text{एवं } x = \frac{1750 - 5y}{3} = \frac{1750 - 5 \times 50}{3}$$

$$= \frac{1750 - 250}{3} = \frac{1500}{3} = ₹ 500$$

उत्तर

(iv) मान लीजिए कि नियत भाड़ा ₹ x एवं प्रति km भाड़े की दर ₹ y है, तो प्रश्नानुसार,

$$x + 10y = 105 \quad \dots(1)$$

$$\text{एवं } x + 15y = 155 \quad \dots(2)$$

अब समीकरण (1) से, $x = 105 - 10y$ समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$105 - 10y + 15y = 155 \Rightarrow -10y + 15y = 155 - 105$$

$$\Rightarrow 5y = 50 \Rightarrow y = \frac{50}{5} = ₹ 10$$

$$\text{एवं } x = 105 - 10y = 105 - 10 \times 10 = 105 - 100 = ₹ 5$$

अतः, अभीष्ट नियत भाड़ा ₹ 5 एवं प्रति km भाड़े की दर ₹ 10 है। उत्तर

अब, व्यक्ति को 25 km यात्रा करने के लिए भाड़ा देना होगा = $25 \times 10 + 5$

$$= 250 + 5 = ₹ 255$$

उत्तर

(v) मान लीजिए कि भिन्न का अभीष्ट अंश x एवं हर y है, तो अभीष्ट भिन्न = $\frac{x}{y}$ है।

$$\text{अब प्रश्नानुसार, } \frac{x+2}{y+2} = \frac{9}{11}$$

$$\Rightarrow 11x + 22 = 9y + 18$$

$$\Rightarrow 11x - 9y = 18 - 22 = -4 \quad \dots(1)$$

$$\text{एवं } \frac{x+3}{y+3} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow 6x + 18 = 5y + 15$$

$$\Rightarrow 6x - 5y = 15 - 18 = -3 \quad \dots(2)$$

समीकरण (2) से, $x = \frac{5y-3}{6}$ समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं :

$$11 \left(\frac{5y-3}{6} \right) - 9y = -4$$

$$\Rightarrow 55y - 33 - 54y = -24$$

$$\Rightarrow 55y - 54y = 33 - 24$$

$$\Rightarrow y = 9$$

$$\text{एवं } x = \frac{5y-3}{6} = \frac{5 \times 9 - 3}{6} = \frac{45 - 3}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

अतः, अभीष्ट भिन्न $\frac{7}{9}$ है। उत्तर

(vi) मान लीजिए जैकब की वर्तमान आयु x वर्ष एवं उसके पुत्र की वर्तमान आयु y वर्ष है, तो

$$\text{प्रश्नानुसार, } (x+5) = 3(y+5)$$

$$\Rightarrow x - 3y = 15 - 5 = 10 \quad \dots(1)$$

$$\text{एवं } (x-5) = 7(y-5)$$

$$\Rightarrow x - 7y = -35 + 5 = -30 \quad \dots(2)$$

समीकरण (2) से, $x = 7y - 30$ समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं :

$$7y - 30 - 3y = 10$$

$$\Rightarrow 7y - 3y = 10 + 30$$

$$\Rightarrow 4y = 40 \Rightarrow y = \frac{40}{4} = 10 \text{ वर्ष}$$

$$\text{एवं } x = 7y - 30 = 7 \times 10 - 30 = 70 - 30 = 40 \text{ वर्ष}$$

अतः, जैकब की अभीष्ट वर्तमान आयु = 40 वर्ष एवं उसके पुत्र की वर्तमान आयु = 10 वर्ष है।

उत्तर

प्रश्न 5. निम्न समस्याओं में रैखिक समीकरण के युग्म बनाइए और उनके हल (यदि उनका अस्तित्व हो) विलोपन विधि से ज्ञात कीजिए :

- यदि हम अंश में 1 जोड़ दें तथा हर में से 1 घटा दें, तो भिन्न 1 में बदल जाती है। यदि हर में 1 जोड़ दें तो यह $\frac{1}{2}$ हो जाती है। वह भिन्न क्या है?
- पाँच वर्ष पूर्व नूरी की आयु सोनू की आयु की तीन गुनी थी। दस वर्ष पश्चात्, नूरी की आयु सोनू की आयु की दो गुनी हो जाएगी। नूरी और सोनू की आयु कितनी है?
- दो अंकों की संख्या के अंकों का योग 9 है। इस संख्या का नौ गुना संख्या के अंकों को पलटने से बनी संख्या का दो गुना है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।
- मीना ₹ 2000 निकालने के लिए एक बैंक गई। उसने खजांची से ₹ 50 तथा ₹ 100 के नोट देने के लिए कहा। मीना ने कुल 25 नोट प्राप्त किए। ज्ञात कीजिए कि उसने ₹ 50 और ₹ 100 के कितने-कितने नोट प्राप्त किए?
- किराये पर पुस्तक देने वाले किसी पुस्तकालय का प्रथम तीन दिनों का एक नियत किराया है तथा उसके बाद प्रत्येक अतिरिक्त दिन का अलग किराया है। सरिता ने सात दिनों तक एक पुस्तक रखने के लिए ₹ 27 अदा किए जबकि सूसी ने एक पुस्तक पाँच दिनों तक रखने के लिए ₹ 21 अदा किए। नियत किराया तथा प्रत्येक अतिरिक्त दिन का किराया ज्ञात कीजिए।

हल : (i) मान लीजिए अभीष्ट भिन्न का अंश x एवं हर y है, तो भिन्न का स्वरूप होगा $\frac{x}{y}$

$$\text{प्रश्नानुसार, } \frac{x+1}{y-1} = 1 \Rightarrow x+1 = y-1 \Rightarrow x-y = -2 \quad \dots(1)$$

$$\text{एवं } \frac{x}{y+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = y+1 \Rightarrow 2x - y = 1 \quad \dots(2)$$

$\Rightarrow x = 3$ [समीकरण (2) में से समीकरण (1) को घटाने पर]
 x के मान को समीकरण (1) में रखने पर हम पाते हैं :

$$3 - y = -2 \Rightarrow y = 3 + 2 = 5$$

अतः, अभीष्ट भिन्न $\frac{3}{5}$ होगी।

उत्तर

(ii) मान लीजिए नूरी की आयु x वर्ष एवं सोनू की आयु y वर्ष है,

$$\text{तो प्रश्नानुसार, } (x-5) = 3(y-5) \Rightarrow x-5 = 3y-15$$

$$\Rightarrow x - 3y = 5 - 15 = -10 \quad \dots(1)$$

$$\text{एवं } (x+10) = 2(y+10) \Rightarrow x+10 = 2y+20$$

$$\Rightarrow x - 2y = 20 - 10 = 10 \quad \dots(2)$$

$\Rightarrow y = 20$ [समीकरण (2) में से समीकरण (1) को घटाने पर]
 एवं y का मान समीकरण (2) में रखने पर हम पाते हैं :

$$x - 2(20) = 10 \Rightarrow x - 40 = 10$$

$$\Rightarrow x = 40 + 10 = 50$$

अतः, नूरी एवं सोनू की अभीष्ट वर्तमान आयु क्रमशः 50 वर्ष एवं 20 वर्ष है।

उत्तर

(iii) मान लीजिए संख्या का दहाई का अंक x एवं इकाई का अंक y है, तो संख्या का मान होगा $10x + y$ अब प्रश्नानुसार,

$$x + y = 9 \quad \dots(1)$$

संख्या के अंकों को पलटने पर बनी नई संख्या का मान होगा $10y + x$ एवं प्रश्नानुसार अब

$$9(10x + y) = 2(10y + x)$$

$$\Rightarrow 90x + 9y = 20y + 2x$$

$$\Rightarrow 88x - 11y = 0 \Rightarrow 8x - y = 0 \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) एवं समीकरण (2) को जोड़ने पर हम पाते हैं :

$$9x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{9} = 1$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर हम पाते हैं :

$$1 + y = 9 \Rightarrow y = 9 - 1 = 8$$

अतः, अभीष्ट संख्या = $10x + y = 10 \times 1 + 8 = 18$

उत्तर

(iv) मान लीजिए मीना बैंक से ₹ 50 के x नोट तथा ₹ 100 के y नोट प्राप्त करती है, तो प्रश्नानुसार

$$x + y = 25 \quad \dots(1)$$

$$\text{एवं} \quad 50x + 100y = 2000$$

$$\Rightarrow x + 2y = 40 \quad \dots(2)$$

समीकरण (2) में से समीकरण (1) को घटाने पर प्राप्त होता है :

$$y = 40 - 25 = 15$$

y का मान समीकरण (1) में रखने पर प्राप्त होता है :

$$x + 15 = 25 \Rightarrow x = 25 - 15 = 10$$

अतः, ₹ 50 एवं ₹ 100 के नोटों की अभीष्ट संख्या क्रमशः 10 एवं 15 है।

उत्तर

(v) मान लीजिए पुस्तक का प्रथम तीन दिन तक का नियत किराया ₹ x एवं शेष दिनों के लिए प्रतिदिन का किराया ₹ y है तो प्रश्नानुसार,

$$x + 4y = 27 \quad \dots(1)$$

$$[\because \text{अतिरिक्त दिन} = 7 - 3 = 4]$$

$$\text{एवं} \quad x + 2y = 21 \quad \dots(2)$$

$$[\because \text{अतिरिक्त दिन} = 5 - 3 = 2]$$

$$\Rightarrow 2y = 6$$

[समीकरण (1) - समीकरण (2) से]

$$\Rightarrow y = \frac{6}{2} = 3$$

y का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$x + 4(3) = 27 \Rightarrow x + 12 = 27$$

$$\Rightarrow x = 27 - 12 = 15$$

अतः, पुस्तक का प्रथम तीन दिनों तक अभीष्ट नियत किराया = ₹ 15 एवं प्रत्येक अतिरिक्त दिन का किराया = ₹ 3.

उत्तर

प्रश्न 6. निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए :

$$8x + 5y = 9 ; 3x + 2y = 4.$$

$$\text{हल :} \quad 8x + 5y = 9 \quad \dots(1)$$

$$3x + 2y = 4 \quad \dots(2)$$

चूँकि समीकरण (2) से, $y = \frac{4 - 3x}{2}$ समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं :

$$8x + 5 \left(\frac{4 - 3x}{2} \right) = 9$$

$$\Rightarrow 16x + 20 - 15x = 18$$

$$\Rightarrow 16x - 15x = 18 - 20$$

$$\Rightarrow x = -2$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर प्राप्त होता है :

$$8(-2) + 5y = 9$$

$$\Rightarrow -16 + 5y = 9$$

$$\Rightarrow 5y = 9 + 16 = 25$$

$$\Rightarrow y = \frac{25}{5} = 5$$

प्रश्न 7. निम्न समीकरणों के युग्मों को रैखिक समीकरणों के युग्म में बदल कर हल कीजिए :

$$(i) \frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = 2; \frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} = \frac{13}{6}$$

$$(ii) \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2; \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1$$

$$(iii) \frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2; \frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

$$(iv) 6x + 3y = 6xy; 2x + 4y = 5xy$$

$$(v) \frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4; \frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2.$$

हल : (i) चूँकि $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = 2$... (1)

एवं $\frac{1}{3x} + \frac{1}{2y} = \frac{13}{6}$... (2)

मान लीजिए कि $\frac{1}{x} = s$ एवं $\frac{1}{y} = t$ हो, तो

$$\frac{s}{2} + \frac{t}{3} = 2 \Rightarrow 3s + 2t = 12$$
 ... (3)

एवं $\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = \frac{13}{6} \Rightarrow 2s + 3t = 13$... (4)

समीकरण (3) से, $t = \frac{12-3s}{2}$ समीकरण (4) में रखने पर,

$$2s + 3 \left(\frac{12-3s}{2} \right) = 13$$

$$\Rightarrow 4s + 36 - 9s = 26 \Rightarrow -5s = 26 - 36 = -10$$

$$\Rightarrow s = \frac{-10}{-5} = 2$$

s का मान समीकरण (3) में रखने पर,

$$3 \times 2 + 2t = 12 \Rightarrow 2t = 12 - 6 = 6$$

$$\Rightarrow t = \frac{6}{2} = 3$$

अब $\frac{1}{x} = s = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ उत्तर

एवं $\frac{1}{y} = t = 3 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$ उत्तर

(ii) चूँकि $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 2$... (1)

एवं $\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{9}{\sqrt{y}} = -1$... (2)

मान लीजिए $\frac{1}{\sqrt{x}} = s$ एवं $\frac{1}{\sqrt{y}} = t$, तो

$2s + 3t = 2$... (3)

एवं $4s - 9t = -1$... (4)

$\Rightarrow 6s + 9t = 6$ [समीकरण (3) $\times 3$ से] ... (5)

$\Rightarrow 10s = 5$ [समीकरण (4) + समीकरण (5) से]

$\Rightarrow s = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

s का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$2 \times \frac{1}{2} + 3t = 2 \Rightarrow 1 + 3t = 2$

$\Rightarrow 3t = 2 - 1 = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$

अब $\frac{1}{\sqrt{x}} = s = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$ उत्तर

एवं $\frac{1}{\sqrt{y}} = t = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{y} = 3 \Rightarrow y = 9$ उत्तर

(iii) चूँकि $\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$... (1)

एवं $\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$... (2)

मान लीजिए कि $\frac{1}{x-1} = s$ एवं $\frac{1}{y-2} = t$ है

$\Rightarrow 5s + t = 2$... (3)

एवं $6s - 3t = 1$... (4)

अब समीकरण (3) से, $t = 2 - 5s$ समीकरण (4) में रखने पर प्राप्त होता है :

$6s - 3(2 - 5s) = 1$

$\Rightarrow 6s - 6 + 15s = 1$

$\Rightarrow 21s = 1 + 6 = 7$

$\Rightarrow s = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{x-1} = s = \frac{1}{3}$ [$\because \frac{1}{x-1} = s$ माना है]

$\Rightarrow x - 1 = 3 \Rightarrow x = 3 + 1 = 4$ उत्तर

अब s का मान समीकरण (3) में रखने पर,

$5 \times \frac{1}{3} + t = 2 \Rightarrow t = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{y-2} = t = \frac{1}{3} \quad \left[\because \frac{1}{y-2} = t \text{ माना है} \right]$$

$$\Rightarrow y-2=3 \Rightarrow y=3+2=5 \quad \text{उत्तर}$$

$$\text{(iv) चूँकि} \quad 6x+3y=6xy \Rightarrow \frac{6}{y} + \frac{3}{x} = 6 \quad \dots(1)$$

$$\text{एवं} \quad 2x+4y=5xy \Rightarrow \frac{2}{y} + \frac{4}{x} = 5 \quad \dots(2)$$

[दोनों समीकरणों को xy से भाग देने पर]

$$\text{मान लीजिए } \frac{1}{y} = s \text{ एवं } \frac{1}{x} = t \quad \dots(3)$$

$$\Rightarrow 6s + 3t = 6 \quad \dots(4)$$

$$2s + 4t = 5 \quad \dots(5)$$

$$\Rightarrow 6s + 12t = 15 \quad \dots(5)$$

[समीकरण (4) \times 3 से]

$$\Rightarrow 9t = 9 \Rightarrow t = \frac{9}{9} = 1 \quad \text{[समीकरण (5) - समीकरण (3) से]}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = t = 1 \Rightarrow x = 1 \quad \left[\because \frac{1}{x} = t \text{ माना है} \right] \text{ उत्तर}$$

t का मान समीकरण (3) में रखने पर,

$$6s + 3 \times 1 = 6 \Rightarrow 6s = 6 - 3 = 3$$

$$\Rightarrow s = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = s = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2 \quad \text{उत्तर}$$

$$\text{(v) चूँकि} \quad \frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4 \quad \dots(1)$$

$$\text{एवं} \quad \frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2 \quad \dots(2)$$

$$\text{मान लीजिए } \frac{1}{x+y} = s \text{ एवं } \frac{1}{x-y} = t$$

$$\Rightarrow 10s + 2t = 4 \quad \dots(3)$$

$$\text{एवं} \quad 15s - 5t = -2 \quad \dots(4)$$

$$\Rightarrow 30s + 6t = 12 \quad \text{[समीकरण (3) \times 3 से]} \dots(5)$$

$$\text{एवं} \quad 30s - 10t = -4 \quad \text{[समीकरण (4) \times 2 से]} \dots(6)$$

$$\Rightarrow 16t = 16 \quad \text{[समीकरण (5) - समीकरण (6) से]}$$

$$\Rightarrow t = \frac{16}{16} = 1 = \frac{1}{x-y} \quad \left[\because \frac{1}{x-y} = t \text{ माना है} \right]$$

$$\Rightarrow x-y=1 \quad \dots(7)$$

t का मान समीकरण (3) में रखने पर,

$$10s + 2 \times 1 = 4$$

$$\Rightarrow 10s = 4 - 2 = 2$$

$$\Rightarrow s = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = \frac{1}{x+y} \quad \left[\because \frac{1}{x+y} = s \text{ माना है} \right]$$

$$\Rightarrow x+y=5 \quad \dots(8)$$

$$\Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3 \quad [\text{समीकरण (7) + समीकरण (8) से}]$$

उत्तर

$$\Rightarrow 3 + y = 5 \Rightarrow y = 5 - 3 = 2$$

[x का मान समीकरण (8) में रखने पर] उत्तर

प्रश्न 8. निम्न समस्याओं को रैखिक समीकरण युग्म के रूप में व्यक्त कीजिए और फिर उनके हल ज्ञात कीजिए :

- (i) रितु धारा के अनुकूल 2 घण्टे में 20 km तैर सकती है और धारा के प्रतिकूल 2 घण्टे में 4 km तैर सकती है। उसकी स्थिर जल में तैरने की चाल तथा धारा की चाल ज्ञात कीजिए।
- (ii) 2 महिलाएँ एवं 5 पुरुष एक कसीदे के काम को साथ-साथ 4 दिन में पूरा कर सकते हैं जबकि 3 महिलाएँ एवं 6 पुरुष इसको 3 दिन में पूरा कर सकती हैं। ज्ञात कीजिए कि इसी कार्य को करने में एक अकेली महिला कितना समय लेगी। पुनः इसी कार्य को करने में एक पुरुष कितना समय लेगा ?
- (iii) रूही 300 km दूरी पर स्थित अपने घर जाने के लिए कुछ दूरी रेलगाड़ी द्वारा तथा कुछ दूरी बस द्वारा तय करती है। यदि वह 60 km रेलगाड़ी द्वारा तथा शेष बस द्वारा यात्रा करती है, तो उसे 4 घण्टे लगते हैं। यदि वह 100 km रेलगाड़ी से तथा शेष बस से यात्रा करे, तो उसे 10 मिनट अधिक लगते हैं। रेलगाड़ी एवं बस की क्रमशः चाल ज्ञात कीजिए।

हल : (i) माना कि रितु की स्थिर जल में तैरने की चाल x km/hr एवं धारा की चाल y km/hr है, तो

$$\text{प्रश्नानुसार, } 2(x + y) = 20 \quad [\because \text{समय} \times \text{चाल} = \text{दूरी}]$$

$$\Rightarrow x + y = 10 \quad \dots(1)$$

$$\text{एवं } 2(x - y) = 4 \quad [\because \text{समय} \times \text{चाल} = \text{दूरी}]$$

$$\Rightarrow x - y = 2 \quad \dots(2)$$

$$\Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{2} = 6 \text{ km/hr} \quad [\text{समीकरण (1) + समीकरण (2) से}]$$

$$\text{एवं } 2y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{2} = 4 \text{ km/hr} \quad [\text{समीकरण (1) - समीकरण (2) से}]$$

अतः, रितु की स्थिर जल में तैरने की अभीष्ट चाल = 6 km/hr एवं धारा की अभीष्ट चाल = 4 km/hr है।

(ii) माना एक महिला अकेले एक कसीदे के कार्य को x दिन में तथा एक पुरुष अकेले उसी कार्य को y दिन में करते हैं, तो प्रश्नानुसार,

$$\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{4} \quad [\text{एक दिन का संयुक्त कार्य}] \dots(1)$$

$$\text{एवं } \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{3} \quad [\text{एक दिन का संयुक्त कार्य}] \dots(2)$$

मान लीजिए $\frac{1}{x} = s$ एवं $\frac{1}{y} = t$ तब

$$2s + 5t = \frac{1}{4} \Rightarrow 8s + 20t - 1 = 0 \quad \dots(3)$$

$$\text{एवं } 3s + 6t = \frac{1}{3} \Rightarrow 9s + 18t - 1 = 0 \quad \dots(4)$$

$$\Rightarrow 72s + 180t - 9 = 0 \quad [\text{समीकरण (3) } \times 9 \text{ से}] \dots(5)$$

$$\text{एवं } 72s + 144t - 8 = 0 \quad [\text{समीकरण (4) } \times 8 \text{ से}] \dots(6)$$

$$\Rightarrow 36t - 1 = 0 \quad [\text{समीकरण (5) - समीकरण (6) से}]$$

$$36t = 1$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{36} = \frac{1}{y} \quad \left[\because \frac{1}{y} = t \text{ माना है} \right]$$

$$y = 36 \text{ दिन में}$$

t का मान समीकरण (3) में रखने पर,

$$8s + 20 \times \frac{1}{36} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 8s + \frac{5}{9} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 8s = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow s = \frac{4}{8 \times 9} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{18} = \frac{1}{x} \quad \left[\because \frac{1}{x} = s \text{ माना है} \right]$$

$$\Rightarrow x = 18 \text{ दिन में}$$

अतः, एक अकेली महिला अभीष्ट कार्य को करने में 18 दिन लेगी तथा पुरुष अकेला उसी कार्य को 36 दिन में करेगा।

(iii) माना कि रेलगाड़ी की चाल x km/hr तथा बस की चाल y km/hr है, उत्तर

जब रूही 60 km की दूरी रेलगाड़ी से तय करती है, तो बस द्वारा $300 - 60 = 240$ km की दूरी तय करेगी तो यात्रा में कुल 4 घण्टे का समय लगेगा।

$$\text{अतः} \quad \frac{60}{x} + \frac{240}{y} = 4 \Rightarrow \frac{15}{x} + \frac{60}{y} = 1 \quad \dots(1)$$

जब रूही 100 km की दूरी रेलगाड़ी से तय करती है, तो

बस द्वारा $300 - 100 = 200$ km की दूरी तय करेगी तो यात्रा में कुल समय = 4 घण्टे 10 मिनट

लगेगे अर्थात् $4 \frac{10}{60} = \frac{25}{6}$ घण्टे।

$$\text{अतः} \quad \frac{100}{x} + \frac{200}{y} = \frac{25}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{24}{x} + \frac{48}{y} = 1 \quad \dots(2)$$

माना लीजिए $\frac{1}{x} = s$ एवं $\frac{1}{y} = t$ तब

$$15s + 60t = 1 \Rightarrow 15s + 60t - 1 = 0 \quad \dots(3)$$

$$24s + 48t = 1 \Rightarrow 24s + 48t - 1 = 0 \quad \dots(4)$$

$$\Rightarrow 120s + 480t - 8 = 0$$

$$\text{एवं} \quad 120s + 240t - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 240t - 3 = 0$$

$$240t = 3$$

$$\Rightarrow t = \frac{3}{240} = \frac{1}{80} = \frac{1}{y} \quad \left[\because \frac{1}{y} = t \text{ माना है} \right]$$

$$y = 80 \text{ km/hr}$$

t का मान समीकरण (3) में रखने पर,

$$15s + 60 \times \frac{1}{80} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 15s + \frac{3}{4} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 15s = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{60} = \frac{1}{x} \quad \left[\because \frac{1}{x} = s \text{ माना है} \right]$$

$$\Rightarrow x = 60 \text{ km/hr}$$

अतः, रेलगाड़ी एवं बस की अभीष्ट चाल क्रमशः 60 km/hr एवं 80 km/hr है। उत्तर

प्रश्न 9. निम्न रैखिक समीकरण युग्मों को विलोपन विधि से हल कीजिए :

(i) $3x + y = 10$; $2x + 2y = 12$ (2022) (ii) $2x + 3y = 8$; $4x + 6y = 7$ (2019)

हल : (i) यहाँ, $3x + y = 10$... (1)

$2x + 2y = 12$... (2)

$6x + 2y = 20$ [समी. (1) को 2 से गुणा करने पर] ... (3)

(घटाने पर) $(-)$ $(-)$ $(-)$

$$-4x = -8 \Rightarrow x = 2$$

x के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर,

$$3 \times 2 + y = 10 \Rightarrow y = 4$$

अतः, $x = 2$ व $y = 4$ उत्तर

(ii) यहाँ, $2x + 3y = 8$... (1)

व $4x + 6y = 7$... (2)

समीकरण (1) को 2 से गुणा करने पर,

$4x + 6y = 16$... (3)

$4x + 6y = 7$... (2)

(घटाने पर) $(-)$ $(-)$ $(-)$

$$0 = 9, \text{ जो एक असत्य कथन है।}$$

अतः दत्त समीकरण युग्म का कोई हल सम्भव नहीं है। उत्तर

प्रश्न 10. 5 संतरे और 3 सेबों का मूल्य ₹ 35 है तथा 2 संतरे और 4 सेबों का मूल्य ₹ 28 है। तब 1 संतरा तथा 1 सेब का मूल्य ज्ञात कीजिए। (2019)

हल : माना, 1 संतरे व 1 सेब का मूल्य क्रमशः ₹ x तथा ₹ y है।

अतः, $5x + 3y = 35$... (1)

$2x + 4y = 28$... (2)

समीकरण (1) में 4 से व समीकरण (2) में 3 से गुणा करने पर,

$20x + 12y = 140$... (3)

$6x + 12y = 84$... (4)

(घटाने पर) $(-)$ $(-)$ $(-)$

$$14x = 56 \Rightarrow x = \frac{56}{14} = 4$$

x के इस मान को समीकरण (1) में रखने पर,

$$5 \times 4 + 3y = 35$$

$\Rightarrow 20 + 3y = 35 \Rightarrow y = 5$

अतः, 1 संतरे का मूल्य = ₹ 4 व 1 सेब का मूल्य = ₹ 5। उत्तर

दीर्घ उत्तरीय/विश्लेषणात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. आफताब अपनी पुत्री से कहता है, "सात वर्ष पूर्व मैं तुमसे सात गुनी आयु का था। अब से 3 वर्ष बाद मैं तुमसे केवल तीन गुनी आयु का रह जाऊँगा।" (क्या यह मनोरंजक है?) इस स्थिति को बीजगणितीय एवं ग्राफीय रूपों में व्यक्त कीजिए।

हल : मान लीजिए कि आफताब एवं उसकी पुत्री की वर्तमान आयु क्रमशः x वर्ष और y वर्ष है, तो

प्रश्नानुसार, $(x - 7) = 7(y - 7)$

$$\Rightarrow x - 7 = 7y - 49 \quad \dots(1)$$

$$\Rightarrow x - 7y + 42 = 0 \quad \dots(1)$$

$$\text{एवं} \quad (x + 3) = 3(y + 3)$$

$$\Rightarrow x + 3 = 3y + 9$$

$$\Rightarrow x - 3y - 6 = 0 \quad \dots(2)$$

यह स्थिति मनोरंजक भी है तथा गणितीय तथ्यपरक है। इस स्थिति का बीजगणितीय निरूपण है :

$$x - 7y + 42 = 0 \text{ एवं } x - 3y - 6 = 0$$

उत्तर

ग्राफीय निरूपण के लिए :

$$\therefore x - 7y + 42 = 0 \quad \dots(1)$$

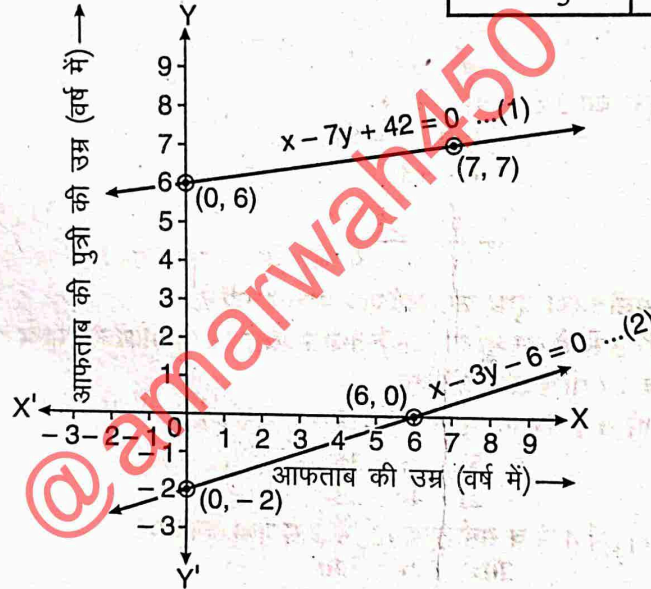
$$\Rightarrow y = \frac{42 + x}{7}$$

$$\text{चूँकि } x - 3y - 6 = 0 \quad \dots(2)$$

$$\Rightarrow y = \frac{x - 6}{3}$$

x	0	7
$y = \frac{42 + x}{7}$	6	7

x	0	6
$y = \frac{x - 6}{3}$	-2	0



आकृति : 3.2

उपर्युक्त आकृति अभीष्ट ग्राफीय निरूपण है।

प्रश्न 2. क्रिकेट टीम के एक कोच ने ₹ 3900 में 3 बल्ले तथा 6 गेंदें खरीदीं। बाद में उसने एक और बल्ला तथा उसी प्रकार की 3 गेंदें ₹ 1300 में खरीदीं। इस स्थिति को बीजगणितीय तथा ज्यामितीय रूपों में व्यक्त कीजिए।

उत्तर

हल : माना 1 बल्ले एवं 1 गेंद का मूल्य क्रमशः ₹ x तथा ₹ y है।

$$\text{तो प्रश्नानुसार,} \quad 3x + 6y = 3900$$

$$\Rightarrow x + 2y = 1300 \quad \dots(1)$$

$$\text{एवं} \quad x + 3y = 1300 \quad \dots(2)$$

अतः दी गई स्थितियों का बीजगणितीय निरूपण है :

$$x + 2y = 1300 \quad \dots(1) \text{ एवं } x + 3y = 1300 \quad \dots(2)$$

जहाँ x एवं y क्रमशः 1 बल्ले और 1 गेंद के मूल्य (₹ में) हैं।

ज्ञातव्य— उपर्युक्त स्थितियाँ व्यावहारिक रूप से अनुपयुक्त हैं। ये तभी सम्भव हो सकती हैं जबकि प्रत्येक गेंद मुफ्त में मिल रही हो अथवा मूल्य में परिवर्तन हुआ हो।

ज्यामितीय (ग्राफीय) निरूपण के लिए:

चूँकि $x + 2y = 1300$... (1)

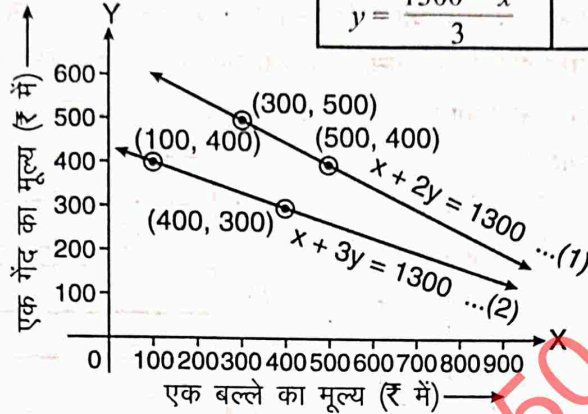
$\Rightarrow y = \frac{1300 - x}{2}$

एवं $x + 3y = 1300$... (2)

$\Rightarrow y = \frac{1300 - x}{3}$

x (₹ में)	300	500
$y = \frac{1300 - x}{2}$	500	400

x (₹ में)	400	100
$y = \frac{1300 - x}{3}$	300	400



आकृति : 3.3

अतः, उपर्युक्त आकृति दी गई स्थितियों का ज्यामितीय (ग्राफीय) निरूपण है। उत्तर
 प्रश्न 3. 2 kg सेब और 1 kg अंगूर का मूल्य किसी दिन ₹ 160 था। एक महीने बाद 4 kg सेब और 2 kg अंगूर का मूल्य ₹ 300 हो जाता है। इस स्थिति को बीजगणितीय तथा ज्यामितीय रूपों में व्यक्त कीजिए।

हल : मान लीजिए कि 1 किग्रा सेब एवं 1 किग्रा अंगूर का मूल्य क्रमशः ₹ x एवं ₹ y है।

तो प्रश्नानुसार, $2x + y = 160$... (1)

एवं $4x + 2y = 300$

$\Rightarrow 2x + y = 150$... (2)

अतः, दी गई स्थितियों का बीजगणितीय निरूपण है :

$2x + y = 160$... (1) $2x + y = 150$... (2) उत्तर

ज्यामितीय (ग्राफीय) निरूपण के लिए :

चूँकि $2x + y = 160$... (1)

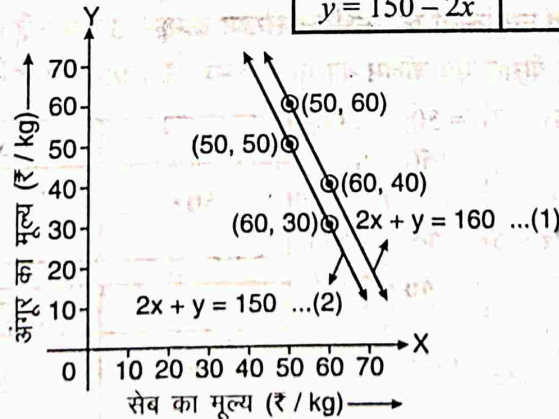
$\Rightarrow y = 160 - 2x$

एवं $2x + y = 150$... (2)

$\Rightarrow y = 150 - 2x$

x (₹ में)	50	60
$y = 160 - 2x$	60	40

x (₹ में)	50	60
$y = 150 - 2x$	50	30



आकृति : 3.4

अतः उपर्युक्त आकृति दी गई स्थितियों का ज्यामितीय (ग्राफीय) निरूपण है। उत्तर

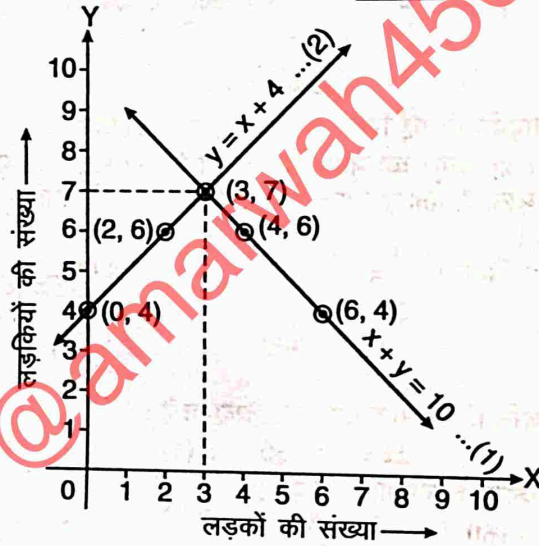
प्रश्न 4. निम्न समस्याओं में रैखिक समीकरणों के युग्म बनाइए और उनके ग्राफीय विधि से हल ज्ञात कीजिए :

- (i) कक्षा X के 10 विद्यार्थियों ने एक गणित की पहली प्रतियोगिता में भाग लिया। यदि लड़कियों की संख्या लड़कों की संख्या से 4 अधिक हो, तो प्रतियोगिता में भाग लिये लड़कों और लड़कियों की संख्या ज्ञात कीजिए।
- (ii) 5 पेंसिल तथा 7 कलमों का कुल मूल्य ₹ 50 है जबकि 7 पेंसिल तथा 5 कलमों का मूल्य ₹ 46 है। एक पेंसिल का मूल्य तथा एक कलम का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : (i) मान लीजिए प्रतियोगिता में भाग लेने वाले लड़कों एवं लड़कियों की संख्या क्रमशः x एवं y है तो प्रश्नानुसार,

$$\begin{aligned} & x + y = 10 \quad \dots(1) \\ \Rightarrow & y = 10 - x \\ \text{एवं} & y = x + 4 \quad \dots(2) \end{aligned}$$

x	4	6
$y = 10 - x$	6	4
x	0	2
$y = x + 4$	4	6



आकृति : 3.5

दोनों ग्राफ परस्पर बिन्दु P (3, 7) पर प्रतिच्छेद करते हैं।

अतः, लड़के एवं लड़कियों की अभीष्ट संख्या क्रमशः 3 एवं 7 है।

उत्तर

(ii) मान लीजिए पेंसिल एवं कलम का मूल्य क्रमशः ₹ x प्रति नग एवं ₹ y प्रति नग है।

तो प्रश्नानुसार, $5x + 7y = 50 \quad \dots(1)$

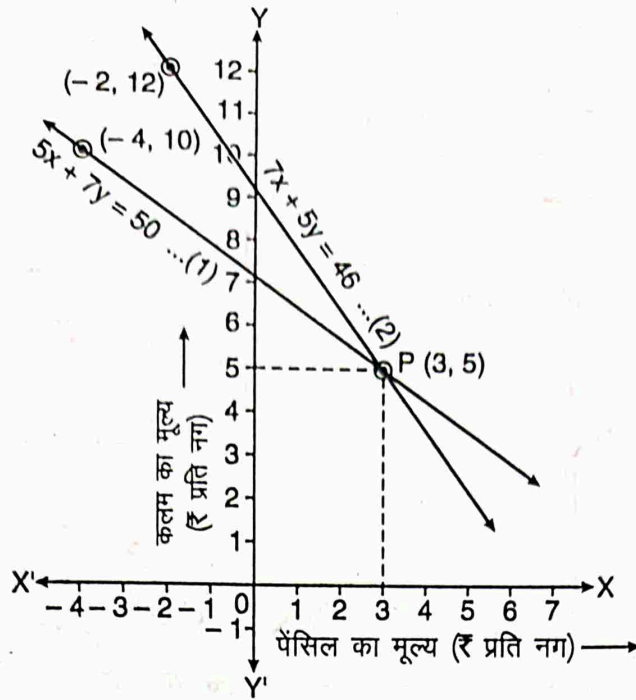
$$\Rightarrow y = \frac{50 - 5x}{7}$$

एवं $7x + 5y = 46 \quad \dots(2)$

$$\Rightarrow y = \frac{46 - 7x}{5}$$

x	3	-4
$y = \frac{50 - 5x}{7}$	5	10

x	3	-2
$y = \frac{46 - 7x}{5}$	5	12



आकृति : 3.6

चूँकि दोनों ग्राफ बिन्दु P (3, 5) पर परस्पर प्रतिच्छेद करते हैं।

अतः पेंसिल एवं कलम के मूल्य क्रमशः ₹ 3 प्रति नग एवं ₹ 5 प्रति नग है।

उत्तर

प्रश्न 5. क्या रैखिक समीकरण युग्म $2x + y - 6 = 0$ एवं $4x - 2y - 4 = 0$ संगत हैं ? यदि हाँ तो इसको ग्राफीय विधि से हल कीजिए।

हल : चूँकि $2x + y - 6 = 0$... (1)

एवं $4x - 2y - 4 = 0$... (2)

इसलिए $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$ एवं $\frac{c_1}{c_2} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (अर्थात् रेखा युग्म प्रतिच्छेदी हैं)

अतः उक्त रैखिक समीकरणों का युग्म संगत है।

उत्तर

रैखिक समीकरण युग्म का ग्राफीय हल :

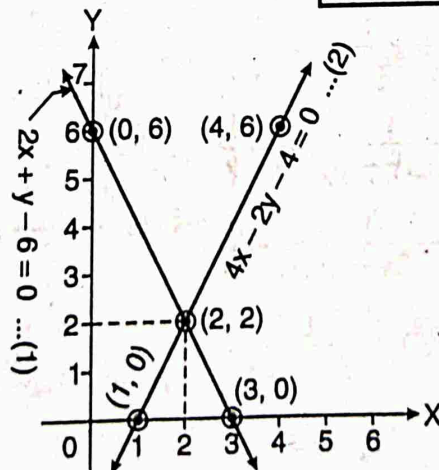
चूँकि $2x + y - 6 = 0$... (1)

$\Rightarrow y = 6 - 2x$

एवं $4x - 2y - 4 = 0$... (2)

$\Rightarrow y = 2x - 2$

x	0	3
$y = 6 - 2x$	6	0
x	1	4
$y = 2x - 2$	0	6



आकृति : 3.7

चूँकि दोनों ग्राफ परस्पर बिन्दु (2, 2) पर प्रतिच्छेद करते हैं।

अतः रैखिक समीकरण युग्म का अभीष्ट हल (2, 2) है अर्थात् $x = 2$ एवं $y = 2$.

उत्तर

प्रश्न 6. एक आयताकार बाग, जिसकी लम्बाई, चौड़ाई से 4 m अधिक है, का अर्ध परिमाण 36 m है। बाग की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि बाग की लम्बाई x m एवं चौड़ाई y m है।

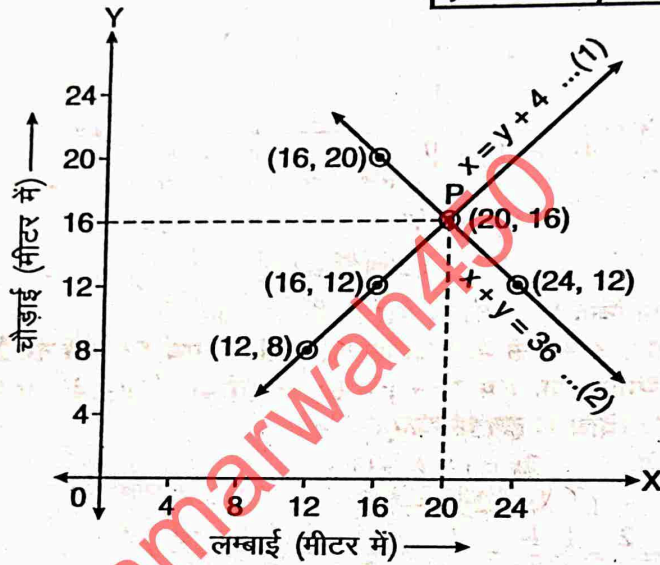
तो प्रश्नानुसार, $x = y + 4$... (1)

$\Rightarrow y = x - 4$

एवं $x + y = 36$... (2)

$\Rightarrow y = 36 - x$

x	16	12
$y = x - 4$	12	8
x	16	24
$y = 36 - x$	20	12



आकृति - 3.8

चूँकि दोनों ग्राफ बिन्दु $P(20, 16)$ पर प्रतिच्छेद करते हैं।

अतः आयताकार बाग की अभीष्ट विमाएँ 20 m एवं 16 m हैं।

उत्तर

प्रश्न 7. निम्न समीकरण युग्म को रैखिक समीकरण युग्म में बदल करके हल कीजिए :

$$\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4}$$

$$\text{एवं } \frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = -\frac{1}{8}$$

$$\text{हल : चूँकि } \frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4} \quad \dots(1)$$

$$\text{एवं } \frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3x+y} - \frac{1}{3x-y} = -\frac{1}{4} \quad \dots(2)$$

$$\text{मान लीजिए } \frac{1}{3x+y} = s \text{ एवं } \frac{1}{3x-y} = t$$

$$\Rightarrow s + t = \frac{3}{4} \quad \dots(3)$$

एवं $s - t = \frac{-1}{4}$... (4)

$\Rightarrow 2s = \frac{1}{2}$ [समीकरण (3) + समीकरण (4) से]

$\Rightarrow s = \frac{1}{4} = \frac{1}{3x + y}$ $\left[\because \frac{1}{3x + y} = s \text{ माना है} \right]$

$\Rightarrow 3x + y = 4$... (5)

$2t = 1$ [समीकरण (3) - समीकरण (4) से]

$\Rightarrow t = \frac{1}{2} = \frac{1}{3x - y}$ $\left[\because \frac{1}{3x - y} = t \text{ माना है} \right]$

$\Rightarrow 3x - y = 2$... (6)

$\Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{6} = 1$ [समीकरण (5) + समीकरण (6) से]

उत्तर

एवं $2y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{2} = 1$ [समीकरण (5) - समीकरण (6) से]

उत्तर

□

अध्याय

4

द्विघात समीकरण
[Quadratic Equations]

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

बहु-विकल्पीय प्रश्न

1. निम्न में कौन एक वर्ग समीकरण है?

(a) $x^2 + 2x + 1 = (4 - x)^2 + 3$

(b) $-2x^2 = (5 - x) \left(2x - \frac{2}{5} \right)$

(c) $(k + 1)x^2 + \frac{3}{2}x = 7$, जहाँ $k = -1$

(d) $x^3 - x^2 = (x - 1)^3$

2. निम्न में कौन एक वर्ग समीकरण नहीं है?

(a) $2(x - 1)^2 = 4x^2 - 2x + 1$

(b) $2x - x^2 = x^2 + 5$

(c) $(\sqrt{2}x + \sqrt{3})^2 + x^2 = 3x^2 - 5x$

(d) $(x^2 + 2x)^2 = x^4 + 3 + 4x^3$

3. निम्न में से किस वर्ग समीकरण का मूल 2 है?

(a) $x^2 - 4x + 5 = 0$

(b) $x^2 + 3x - 12 = 0$

(c) $2x^2 - 7x + 6 = 0$

(d) $3x^2 - 6x - 2 = 0$

4. यदि $\frac{1}{2}$ वर्ग समीकरण $x^2 + kx - \frac{5}{4} = 0$ का एक मूल है, तो k का मान है :
 (a) 2 (b) -2 (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{2}$.
5. निम्न में किस वर्ग समीकरण के मूलों का योग 3 है?
 (a) $2x^2 - 3x + 6 = 0$ (b) $-x^2 + 3x - 3 = 0$
 (c) $\sqrt{2}x^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}x + 1 = 0$ (d) $3x^2 - 3x + 3 = 0$.
6. यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c$ के शून्यक α और β हों, तो $\alpha + \beta$ का मान होगा : (2020)
 (a) $-\frac{b}{a}$ (b) $\frac{b}{a}$ (c) $\frac{a}{b}$ (d) $-\frac{a}{b}$.
7. द्विघात समीकरण $x^2 - 4x + 4 = 0$ के विविक्तकर का मान होगा : (2022)
 (a) 4 (b) 2 (c) 0 (d) 1.
- उत्तर—1. (d), 2. (c), 3. (c), 4. (a), 5. (b), 6. (a), 7. (c).

रिक्त स्थानों की पूर्ति

- यदि $p(x)$ एक द्विघात बहुपद है, तो $p(x) = 0$ को कहते हैं।
 - किसी वर्ग समीकरण में अधिकतम मूल होते हैं।
 - वर्ग समीकरण में $ax^2 + bx + c = 0$ का विविक्तकर $D = \dots$ है।
 - वह समीकरण जिसमें अज्ञात राशि की अधिकतम घात दो हो कहलाता है।
 - वर्ग समीकरण $(x - 4)(x - 3) = 0$ में मूल होंगे।
 - एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ में कोई वास्तविक मूल नहीं होते यदि (2019)
 - समीकरण $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ का विविक्तकर है। (2019)
- उत्तर—1. वर्ग समीकरण, 2. दो, 3. $b^2 - 4ac$, 4. वर्ग समीकरण, 5. 4 और -3, 6. $b^2 < 4ac$, 7. 0 (शून्य)।

जोड़ी मिलाइए

- | स्तम्भ 'अ' | स्तम्भ 'ब' |
|----------------------------------|-----------------------|
| 1. विविक्तकर ऋणात्मक | (a) मूल वास्तविक |
| 2. विविक्तकर शून्य | (b) मूल अपरिमेय |
| 3. विविक्तकर धनात्मक पूर्ण वर्ग | (c) मूल अधिकल्पित |
| 4. विविक्तकर धनात्मक | (d) मूल समान वास्तविक |
| 5. विविक्तकर धनात्मक अपूर्ण वर्ग | (e) मूल परिमेय असमान |
- उत्तर—1.→(c), 2.→(d), 3.→(e), 4.→(a), 5.→(b).

सत्य/असत्य कथन

- वर्ग समीकरण के अनेक हल हो सकते हैं।
 - वर्ग समीकरण को हल करने के लिए सूत्र के प्रणेता श्रीधराचार्य थे।
 - वर्ग समीकरण में चर की अधिकतम घात कुछ भी हो सकती है।
 - $x(x - 1) = 0$ में x का मान शून्य एवं 1 है।
 - $x^2 - 4x + 4 = 0$ के मूल बराबर हैं।
- उत्तर—1. असत्य, 2. सत्य, 3. असत्य, 4. सत्य, 5. सत्य।

एक शब्द/वाक्य में उत्तर

- वह समीकरण जिसमें अज्ञात राशि (चर) की अधिकतम घात दो हो क्या कहलाता है?
- समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ में $(b^2 - 4ac)$ को क्या कहते हैं?

3. किसी वर्ग समीकरण के चर के दोनों मान उस वर्ग समीकरण के क्या कहलाते हैं ?
 4. यदि किसी वर्ग समीकरण का विविक्तकर शून्य हो तो उसके मूल कैसे होंगे ?
 5. यदि किसी वर्ग समीकरण का विविक्तकर धनात्मक पूर्ण वर्ग संख्या हो तो उसके मूल कैसे होंगे ?
 6. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के विविक्तकर ज्ञात करने का सूत्र लिखिए। (2020)
 7. क्या $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$ द्विघात समीकरण है ? (2020)
 8. यदि a, b और c वास्तविक संख्याएँ हैं, और $a \neq 0$ तब द्विघात समीकरण किस रूप का होगा ? (2022)
- उत्तर—1. वर्ग समीकरण, 2. विविक्तकर, 3. मूल, 4. समान एवं वास्तविक, 5. परिमेय एवं असमान,
6. $b^2 - 4ac$, 7. हाँ, 8. $ax^2 + bx + c = 0$.

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. जाँच कीजिए कि क्या निम्न द्विघात समीकरण हैं :

- (i) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$
- (ii) $x^2 - 2x = (-2)(3 - x)$
- (iii) $(x - 2)(x + 1) = (x - 1)(x + 3)$
- (iv) $(x - 3)(2x + 1) = x(x + 5)$
- (v) $(2x - 1)(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$
- (vi) $x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$
- (vii) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$
- (viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$

हल : (i) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$
 $\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x - 6$
 $\Rightarrow x^2 + 0x + 7 = 0$

चूँकि उपरोक्त समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ प्रकार का है, जहाँ a, b एवं c वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $a \neq 0$

अतः, दत्त समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

उत्तर

(ii) $x^2 - 2x = (-2)(3 - x)$
 $\Rightarrow x^2 - 2x = -6 + 2x$
 $\Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 0$

चूँकि उपरोक्त समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ प्रकार का है, जहाँ $a \neq 0$ तथा a, b और c वास्तविक संख्याएँ हैं।

अतः, दत्त समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

उत्तर

(iii) $(x - 2)(x + 1) = (x - 1)(x + 3)$
 $\Rightarrow x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x + 3x - 3$
 $\Rightarrow x^2 - x - 2 = x^2 + 2x - 3$
 $\Rightarrow 3x - 1 = 0$

चूँकि उपरोक्त समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ प्रकार का नहीं है, क्योंकि यहाँ $a = 0$ है। यह रैखिक समीकरण है।

अतः, दत्त समीकरण एक द्विघात समीकरण नहीं है।

उत्तर

(iv) $(x - 3)(2x + 1) = x(x + 5)$
 $\Rightarrow 2x^2 + x - 6x - 3 = x^2 + 5x$
 $\Rightarrow x^2 - 10x - 3 = 0$

चूँकि उपरोक्त समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ प्रकार का है, जहाँ a, b और c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$.

अतः, दत्त समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

उत्तर

(v) $(2x - 1)(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$
 $\Rightarrow 2x^2 - 6x - x + 3 = x^2 - x + 5x - 5$
 $\Rightarrow x^2 - 11x + 8 = 0$

चूँकि उपरोक्त समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ प्रकार का है, जहाँ a, b और c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$.

अतः, उक्त समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

$$\begin{aligned} \text{(vi)} \quad & x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2 \\ \Rightarrow & x^2 + 3x + 1 = x^2 - 4x + 4 \\ \Rightarrow & 7x - 3 = 0 \end{aligned}$$

चूँकि उपरोक्त समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ प्रकार का नहीं है, क्योंकि यहाँ $a = 0$ है। यह एक रेखिक समीकरण है।

अतः, दत्त समीकरण एक द्विघात समीकरण नहीं है।

$$\begin{aligned} \text{(vii)} \quad & (x+2)^3 = 2x(x^2-1) \\ \Rightarrow & x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 2x^3 - 2x \\ \Rightarrow & x^3 - 6x^2 - 14x - 8 = 0 \end{aligned}$$

चूँकि उपरोक्त समीकरण त्रिघात समीकरण है।

अतः, दत्त समीकरण द्विघात समीकरण नहीं है।

$$\begin{aligned} \text{(viii)} \quad & x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3 \\ \Rightarrow & x^3 - 4x^2 - x + 1 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \\ \Rightarrow & 2x^2 - 13x + 9 = 0 \end{aligned}$$

चूँकि उपरोक्त समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ प्रकार का है, जहाँ a, b और c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$.

अतः, दत्त समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

प्रश्न 2. निम्न स्थितियों को द्विघात समीकरणों के रूप में निरूपित कीजिए :

- एक आयताकार भूखण्ड का क्षेत्रफल 528 m^2 है। क्षेत्र की लम्बाई (मीटरों में) चौड़ाई के दुगने से एक अधिक है। हमें भूखण्ड की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात करनी है।
- दो क्रमागत धनात्मक पूर्णाकों का गुणनफल 306 है। हमें पूर्णाकों को ज्ञात करना है।
- रोहन की माँ उससे 26 साल बड़ी है। उनकी आयु (वर्षों में) का गुणनफल अब से तीन वर्ष पश्चात् 360 हो जाएगा। हमें रोहन की वर्तमान आयु ज्ञात करनी है।
- एक रेलगाड़ी 480 km की दूरी समान चाल से तय करती है। यदि इसकी चाल 8 km/hr कम होती तो वह उसी दूरी को तय करने में 3 घण्टे अधिक लेती। हमें रेलगाड़ी की चाल ज्ञात करनी है।

हल : (i) मान लीजिए आयताकार भूखण्ड की चौड़ाई $x \text{ m}$ है, तो प्रश्नानुसार,

$$\begin{aligned} \text{लम्बाई} &= 2 \times \text{चौड़ाई} + 1 = 2x + 1 \\ \text{क्षेत्रफल} &= \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई} \\ \Rightarrow & (2x + 1)(x) = 528 \\ \Rightarrow & 2x^2 + x - 528 = 0 \end{aligned}$$

अतः, अभीष्ट द्विघात समीकरण $2x^2 + x - 528 = 0$ है, जहाँ x आयताकार भूखण्ड की चौड़ाई (मीटर में) है।

(ii) मान लीजिए दो क्रमागत धनात्मक पूर्णाक क्रमशः x और $x + 1$ हैं, तो प्रश्नानुसार,

$$\begin{aligned} x(x+1) &= 306 \\ \Rightarrow & x^2 + x = 306 \\ \Rightarrow & x^2 + x - 306 = 0 \end{aligned}$$

अतः, अभीष्ट द्विघात समीकरण $x^2 + x - 306 = 0$ है, जहाँ x एक धनात्मक पूर्णाक है।

(iii) मान लीजिए कि रोहन की वर्तमान आयु x वर्ष है, तो प्रश्नानुसार, उसकी माँ की वर्तमान आयु $= x + 26$ वर्ष

$$\begin{aligned} \text{एवं} & (x+3)(x+26+3) = 360 \\ \Rightarrow & (x+3)(x+29) = 360 \\ \Rightarrow & x^2 + 29x + 3x + 87 = 360 \\ \Rightarrow & x^2 + 32x + 87 - 360 = 0 \\ \Rightarrow & x^2 + 32x - 273 = 0 \end{aligned}$$

अतः, अभीष्ट द्विघात समीकरण $x^2 + 32x - 273 = 0$ है, जहाँ $x =$ रोहन की वर्तमान आयु (वर्ष में) है।

(iv) मान लीजिए कि रेलगाड़ी की चाल x km/hr है, तो प्रश्नानुसार,

$$480 \text{ km दूरी तय करने में लगा समय} = \frac{480}{x} \text{ hrs}$$

$$\text{एवं} \quad \frac{480}{x-8} = \frac{480}{x} + 3$$

$$\Rightarrow \frac{160}{x-8} - \frac{160}{x} = 1$$

$$\Rightarrow 160x - 160(x-8) = x(x-8)$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x = 1280$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 1280 = 0$$

अतः, अभीष्ट द्विघात समीकरण $x^2 - 8x - 1280 = 0$ है, जहाँ x रेलगाड़ी की चाल km/hr में है।

प्रश्न 3. निम्न प्रत्येक द्विघात समीकरण में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि उसके दो बराबर मूल हों

(i) $2x^2 + kx + 3 = 0$, (2020) (ii) $kx(x-2) + 6 = 0$.

हल : (i) चूँकि समीकरण $2x^2 + kx + 3 = 0$ में $a = 2, b = k, c = 3$

एवं बराबर मूलों के लिए $b^2 - 4ac = 0$

$$\Rightarrow k^2 - 4 \times 2 \times 3 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 = 24 \Rightarrow k = \pm 2\sqrt{6}$$

उत्तर

(ii) चूँकि समीकरण $kx(x-2) + 6 = 0$

$$\Rightarrow kx^2 - 2kx + 6 = 0 \text{ में } a = k, b = -2k \text{ एवं } c = 6$$

एवं बराबर मूलों के लिए $b^2 - 4ac = 0$

$$\Rightarrow (-2k)^2 - 4(k)(6) = 0$$

$$\Rightarrow 4k^2 - 24k = 0 \Rightarrow k^2 - 6k = 0$$

$$\Rightarrow k(k-6) = 0$$

या तो $k = 0$ तब समीकरण $6 = 0$ जो सम्भव नहीं है।

अथवा $k - 6 = 0 \Rightarrow k = 6$

उत्तर

प्रश्न 4. द्विघात समीकरण $2x^2 - 3x + 5 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए। (2022)

हल : यहाँ, $2x^2 - 3x + 5 = 0$ में, $a = 2, b = -3$ एवं $c = 5$

$$\therefore \text{विविक्तकर, } b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(5) \\ = 9 - 40 = -31$$

चूँकि, विविक्तकर ऋणात्मक है।

अतः वास्तविक मूलों का अस्तित्व नहीं है।

उत्तर

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. गुणनखण्ड विधि से निम्न द्विघात समीकरणों के मूल ज्ञात कीजिए :

(i) $x^2 - 3x - 10 = 0$, (ii) $2x^2 + x - 6 = 0$, (2022)

(iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$, (iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$,

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$.

हल : (i) $x^2 - 3x - 10 = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 2x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow x(x-5) + 2(x-5) = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+2) = 0$$

या तो $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$
 अथवा $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

अतः, दत्त समीकरण के अभीष्ट मूल 5 एवं -2 हैं।

(ii) $2x^2 + x - 6 = 0$
 $\Rightarrow 2x^2 + 4x - 3x - 6 = 0$
 $\Rightarrow 2x(x + 2) - 3(x + 2) = 0$
 $\Rightarrow (x + 2)(2x - 3) = 0$

या तो $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

अथवा $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

अतः, दत्त समीकरण के अभीष्ट मूल -2 एवं $\frac{3}{2}$ हैं।

(iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$
 $\Rightarrow \sqrt{2}x^2 + 5x + 2x + 5\sqrt{2} = 0$
 $\Rightarrow x(\sqrt{2}x + 5) + \sqrt{2}(\sqrt{2}x + 5) = 0$
 $\Rightarrow (\sqrt{2}x + 5)(x + \sqrt{2}) = 0$

या तो $\sqrt{2}x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{\sqrt{2}}$

अथवा $x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$

अतः, दत्त समीकरण के अभीष्ट मूल $-\frac{5}{\sqrt{2}}$ एवं $-\sqrt{2}$ हैं।

(iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$
 $\Rightarrow 16x^2 - 8x + 1 = 0$
 $\Rightarrow 16x^2 - 4x - 4x + 1 = 0$
 $\Rightarrow 4x(4x - 1) - 1(4x - 1) = 0$
 $\Rightarrow (4x - 1)(4x - 1) = 0$
 $\Rightarrow (4x - 1)^2 = 0$
 $\Rightarrow 4x - 1 = 0$
 $\Rightarrow x = \frac{1}{4}$

अतः, दत्त समीकरण के अभीष्ट मूल $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ हैं।

(v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$
 $\Rightarrow 100x^2 - 10x - 10x + 1 = 0$
 $\Rightarrow 10x(10x - 1) - 1(10x - 1) = 0$
 $\Rightarrow (10x - 1)(10x - 1) = 0$
 $\Rightarrow (10x - 1)^2 = 0$
 $\Rightarrow 10x - 1 = 0$
 $\Rightarrow x = \frac{1}{10}$

अतः, दत्त समीकरण के अभीष्ट मूल $\frac{1}{10}, \frac{1}{10}$ हैं।

प्रश्न 2. निम्न समीकरण के मूल ज्ञात कीजिए ($x \neq 0$):

(i) $x + \frac{1}{x} = 3$ (2019), (ii) $x - \frac{1}{x} = 3$. (2020)

हल : (i) $x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x^2 + 1 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$; जो एक द्विघात समीकरण है।

अब, अभीष्ट मूल, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ व } x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

(ii) $x - \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x^2 - 1 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0$; जो एक द्विघात समीकरण है।

अब, अभीष्ट मूल, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \text{ व } x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

उत्तर

उत्तर

प्रश्न 3. (i) जॉन और जीवन्ती दोनों के पास कुल 45 कंचे हैं। दोनों पाँच-पाँच कंचे खो देते हैं और अब उनके पास कंचों की संख्या का गुणनफल 124 है। बताइए आरम्भ में उनके पास कितने-कितने कंचे थे?

(ii) एक कुटीर उद्योग एक दिन में कुछ खिलौने निर्मित करता है। प्रत्येक खिलौने का मूल्य (₹ में) 55 में से एक दिन में निर्माण किए गए खिलौनों की संख्या को घटाने से प्राप्त संख्या के बराबर है। किसी एक दिन कुल निर्माण लागत ₹ 750 थी। उस दिन निर्माण किए गए खिलौने की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : (i) मान लीजिए जॉन के पास प्रारम्भ में x कंचे थे तो जीवन्ती के पास प्रारम्भिक कंचों की संख्या $= 45 - x$ ।
पाँच-पाँच कंचे खोने के बाद दोनों के पास शेष बचे कंचों की संख्या क्रमशः $(x - 5)$ एवं $(40 - x)$ हुई।

अब प्रश्नानुसार, $(x - 5)(40 - x) = 124$

$$\Rightarrow 40x - x^2 - 200 + 5x = 124$$

$$\Rightarrow x^2 - 45x + 324 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x - 36x + 324 = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 9) - 36(x - 9) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 9)(x - 36) = 0$$

या तो $x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$

अथवा $x - 36 = 0 \Rightarrow x = 36$

चूँकि 9 और 36 का योग 45 और गुणनफल 324 है।

अतः, जॉन एवं जीवन्ती के पास क्रमशः 9 और 36 कंचे थे।

उत्तर

(ii) मान लीजिए किसी दिन निर्मित खिलौनों की संख्या x है। इसलिए प्रश्नानुसार प्रत्येक खिलौने का मूल्य = ₹ $(55 - x)$

खिलौनों का कुल मूल्य $x(55 - x) = 750$

$$\Rightarrow 55x - x^2 = 750$$

$$\Rightarrow x^2 - 55x + 750 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 25x - 30x + 750 = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 25) - 30(x - 25) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 25)(x - 30) = 0$$

या तो $x - 25 = 0 \Rightarrow x = 25$

अथवा $x - 30 = 0 \Rightarrow x = 30$

अतः, उस दिन निर्मित खिलौनों की संख्या या तो 25 अथवा 30 है।

उत्तर

प्रश्न 4. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 27 और गुणनफल 182 हो।

हल : मान लीजिए एक संख्या x है, तो दूसरी संख्या $27 - x$ होगी (चूँकि योग 27 दिया है)

अब प्रश्नानुसार,

$$x(27-x) = 182$$

$$\Rightarrow 27x - x^2 = 182$$

$$\Rightarrow x^2 - 27x + 182 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 13x - 14x + 182 = 0$$

$$\Rightarrow x(x-13) - 14(x-13) = 0$$

$$\Rightarrow (x-13)(x-14) = 0$$

या तो $x-13=0 \Rightarrow x=13$
 अथवा $x-14=0 \Rightarrow x=14$

चूँकि 13 और 14 का योग 27 और गुणनफल 182 है।

अतः, अभीष्ट संख्याएँ 13 एवं 14 हैं।

उत्तर

प्रश्न 5. दो क्रमागत घनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 365 है।

हल : मान लीजिए दो क्रमागत घनात्मक पूर्णांक x एवं $x+1$ हैं, तो प्रश्नानुसार,

$$(x+1)^2 + (x)^2 = 365$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + x^2 = 365$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x - 364 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 182 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 14x - 13x - 182 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+14) - 13(x+14) = 0$$

$$\Rightarrow (x+14)(x-13) = 0$$

या तो $x+14=0 \Rightarrow x=-14$
 अथवा $x-13=0 \Rightarrow x=13$

(जो घनात्मक नहीं है)

अतः, अभीष्ट घनात्मक पूर्णांक 13 एवं 14 हैं।

उत्तर

प्रश्न 6. दो ऐसे क्रमागत विषम घनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 290 हो। (2019)

हल : माना, दो क्रमागत विषम घनात्मक पूर्णांक x व $(x+2)$ हैं।

प्रश्नानुसार,

$$x^2 + (x+2)^2 = 290$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 4 + 4x = 290$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x + 4 = 290$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 143 = 0; \text{ जो एक द्विघात समीकरण है।}$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-143)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

$\Rightarrow x = 11$ या $x = -13$; परन्तु x एक घनात्मक पूर्णांक दिया है।

अतः, $x = 11$ होगा।

इसलिए, अभीष्ट क्रमागत विषम घनात्मक पूर्णांक = 11 व 13

उत्तर

प्रश्न 7. एक समकोण त्रिभुज की ऊँचाई उसके आधार से 7 cm कम है। यदि कर्ण 13 cm का हो, तो अन्य दो भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए समकोण त्रिभुज का आधार x cm है, तो त्रिभुज की ऊँचाई = $(x-7)$ cm (प्रश्नानुसार)

चूँकि $(\text{आधार})^2 + (\text{ऊँचाई})^2 = (\text{कर्ण})^2$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

$$\Rightarrow (x)^2 + (x-7)^2 = (13)^2$$

(\because कर्ण = 13 cm दिया है)

$$\Rightarrow x^2 + x^2 - 14x + 49 = 169$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 14x - 120 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x - 60 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 12x + 5x - 60 = 0$$

$$\Rightarrow x(x-12) + 5(x-12) = 0$$

$$\Rightarrow (x-12)(x+5) = 0$$

या तो $x+5=0 \Rightarrow x=-5$

(जो असम्भव है)

अथवा $x-12=0 \Rightarrow x=12$ cm

\Rightarrow ऊँचाई = $x = 12 - 7 = 5$ cm

अतः, समकोण त्रिभुज का आधार = 12 cm तथा ऊँचाई = 5 cm है।

उत्तर

प्रश्न 8. एक कुटीर उद्योग एक दिन में कुछ बर्तनों का निर्माण करता है। एक विशेष दिन यह देखा गया कि प्रत्येक नग की निर्माण लागत (₹ में) उस दिन के निर्माण किए गए बर्तनों की संख्या के दुगने से 3 अधिक थी। यदि उस दिन की कुल निर्माण लागत ₹ 90 थी, तो निर्मित बर्तनों की संख्या और प्रत्येक नग की लागत ज्ञात कीजिए।

हल : माना विशेष दिन निर्मित बर्तनों की संख्या x है, तो प्रत्येक बर्तन की लागत = $(2x + 3)$, प्रश्नानुसार

अब लागत दर \times बर्तनों की संख्या = कुल लागत

$$\Rightarrow (2x + 3) \times x = 90$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x = 90$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x - 90 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 15x - 12x - 90 = 0$$

$$\Rightarrow x(2x + 15) - 6(2x + 15) = 0$$

$$\Rightarrow (2x + 15)(x - 6) = 0$$

या तो $2x + 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{-15}{2}$

(जो असम्भव है)

अथवा $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$

प्रति बर्तन लागत = $2x + 3 = 2 \times 6 + 3$

= $12 + 3 = 15$

अतः, निर्मित बर्तनों की अभीष्ट संख्या = 6 तथा प्रत्येक बर्तन की लागत = ₹ 15 है। उत्तर

प्रश्न 9. निम्न (द्विघात) समीकरणों के मूल द्विघाती सूत्र का उपयोग करके ज्ञात कीजिए—

(i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$, (ii) $2x^2 + x - 4 = 0$,

(iii) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$, (iv) $2x^2 + x + 4 = 0$.

हल : (i) चूँकि $2x^2 - 7x + 3 = 0$ में $a = 2$, $b = -7$ एवं $c = 3$

एवं मूल $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(2)(3)}}{2 \times 2}$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm 5}{4}$$

या तो $x = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3$

अथवा $x = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

अतः, दत्त वर्ग समीकरण के अभीष्ट मूल 3 एवं $\frac{1}{2}$ हैं। उत्तर

(ii) चूँकि $2x^2 + x - 4 = 0$ में $a = 2$, $b = 1$, एवं $c = -4$

एवं मूल $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(2)(-4)}}{2 \times 2}$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 32}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$$

या तो $x = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}$

अथवा $x = \frac{-1 - \sqrt{33}}{4}$

अतः, द्विघात समीकरण के अभीष्ट मूल $\frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$ हैं। उत्तर

(iii) चूँकि $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ में $a = 4$, $b = 4\sqrt{3}$ एवं $c = 3$

एवं मूल $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4\sqrt{3} \pm \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 4 \times 4 \times 3}}{2 \times 4}$

$$\Rightarrow x = \frac{-4\sqrt{3} \pm \sqrt{48-48}}{8} = \frac{-4\sqrt{3} \pm 0}{8}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

अतः, दत्त वर्ग समीकरण के अभीष्ट मूल $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ और $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ हैं।

उत्तर

(iv) चूँकि $2x^2 + x + 4 = 0$ में $a = 2$, $b = 1$ एवं $c = 4$

$$\text{एवं मूल } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \times 2 \times 4}}{2 \times 2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-32}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{-31}}{4}$$

चूँकि $\sqrt{-31}$ एक वास्तविक संख्या नहीं है।

अतः, वर्ग समीकरण का कोई भी वास्तविक मूल नहीं है।

उत्तर

दीर्घ उत्तरीय/विश्लेषणात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. यदि निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के मूलों का अस्तित्व हो तो इन्हें पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा ज्ञात कीजिए :

$$(i) 2x^2 - 7x + 3 = 0, \quad (ii) 2x^2 + x - 4 = 0.$$

हल : (i) चूँकि $2x^2 - 7x + 3 = 0$ में $a = 2$, $b = -7$ एवं $c = 3$

$$\text{इसलिए } b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(2)(3) = 49 - 24 = 25 > 0$$

अतः मूलों का अस्तित्व है।

$$\text{अब } 2x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow (x)^2 - 2 \times (x) \left(\frac{7}{4}\right) + \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{49-24}{16}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{7}{4} + \frac{5}{4}\right) \left(x - \frac{7}{4} - \frac{5}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right) (x - 3) = 0$$

$$\text{या तो } x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{अथवा } x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

अतः, समीकरण के अभीष्ट मूल $\frac{1}{2}$ एवं 3 हैं।

उत्तर

(ii) चूँकि $2x^2 + x - 4 = 0$ में $a = 2$, $b = 1$ एवं $c = -4$

$$\text{इसलिए } b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)(-4) = 1 + 32 = 33$$

अतः मूलों का अस्तित्व है।

अब $2x^2 + x - 4 = 0$

$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0$

$\Rightarrow (x)^2 + 2(x) \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2 = 0$

$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - 2 = 0$

$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1+32}{16}\right) = 0$

$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{33}}{4}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}\right) \left(x + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4}\right) = 0$

$\Rightarrow \left(x + \frac{1+\sqrt{33}}{4}\right) \left(x + \frac{1-\sqrt{33}}{4}\right) = 0$

या तो $x + \frac{1+\sqrt{33}}{4} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1+\sqrt{33}}{4}$

अथवा $x + \frac{1-\sqrt{33}}{4} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1-\sqrt{33}}{4}$

अतः, समीकरण के अभीष्ट मूल = $\frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$ हैं।

उत्तर

प्रश्न 2. निम्न समीकरण के मूल ज्ञात कीजिए:

$$\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}$$

हल : ∴

$$\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30} \text{ (दिया है)}$$

\Rightarrow

$$30(x-7) - 30(x+4) = 11(x+4)(x-7)$$

\Rightarrow

$$30x - 210 - 30x - 120 = 11(x^2 - 7x + 4x - 28)$$

\Rightarrow

$$-330 = 11(x^2 - 3x - 28)$$

\Rightarrow

$$x^2 - 3x - 28 = -30$$

\Rightarrow

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

\Rightarrow

$$x^2 - x - 2x + 2 = 0$$

\Rightarrow

$$x(x-1) - 2(x-1) = 0$$

\Rightarrow

$$(x-1)(x-2) = 0$$

या तो

$$x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

अथवा

$$x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

अतः, दत्त समीकरण के अभीष्ट मूल 1 और 2 हैं।

उत्तर

प्रश्न 3. 3 वर्ष पूर्व रहमान की आयु (वर्षों में) का व्युत्क्रम और अब से 5 वर्ष पश्चात् आयु के व्युत्क्रम का योग $\frac{1}{3}$ है। उसकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि रहमान की वर्तमान आयु x वर्ष है तो प्रश्नानुसार,

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{3}$$

\Rightarrow

$$3(x+5) + 3(x-3) = (x-3)(x+5)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & 3x + 15 + 3x - 9 = x^2 + 5x - 3x - 15 \\ \Rightarrow & 6x + 6 = x^2 + 2x - 15 \\ \Rightarrow & x^2 - 4x - 21 = 0 \\ \Rightarrow & x^2 - 7x + 3x - 21 = 0 \\ \Rightarrow & x(x-7) + 3(x-7) = 0 \\ \Rightarrow & (x-7)(x+3) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{या तो} & x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \\ \text{अथवा} & x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7 \end{aligned}$$

(जो असम्भव है)

अतः, रहमान की अभीष्ट आयु = 7 वर्ष।

प्रश्न 4. एक क्लास टेस्ट में शोफाली के गणित और अंग्रेजी में प्राप्त किए गए अंकों का योग 30 है। यदि उसको गणित में 2 अंक अधिक और अंग्रेजी में 3 अंक कम मिले होते, तो उसके अंकों का गुणनफल 210 होता। उसके द्वारा दोनों विषयों में प्राप्त किए अंक ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए शोफाली ने गणित में x अंक प्राप्त किए तो उसके अंग्रेजी में प्राप्त अंक = $30 - x$ चूँकि दोनों विषयों के अंकों का योग 30 दिया गया है।

$$\text{अब प्रश्नानुसार, } (x + 2) \times (30 - x - 3) = 210$$

$$\Rightarrow (x + 2)(27 - x) = 210$$

$$\Rightarrow 27x - x^2 + 54 - 2x = 210$$

$$\Rightarrow x^2 - 25x + 156 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 12x - 13x + 156 = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 12) - 13(x - 12) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 12)(x - 13) = 0$$

$$\text{या तो} \quad (x - 12) = 0 \Rightarrow x = 12$$

$$\text{अथवा} \quad x - 13 = 0 \Rightarrow x = 13$$

जब गणित में $x = 12$ अंक तो अंग्रेजी में = $30 - x = 30 - 12 = 18$ अंक प्राप्त होंगे और जब गणित में $x = 13$ अंक तो अंग्रेजी में = $30 - 13 = 17$ अंक प्राप्त होंगे

अतः, गणित एवं अंग्रेजी में प्राप्त अभीष्ट अंक क्रमशः 12 एवं 18 अथवा 13 एवं 17 होंगे।

उत्तर

प्रश्न 5. एक आयताकार खेत का विकर्ण उसकी छोटी भुजा से 60 मी अधिक लम्बा है। यदि बड़ी भुजा छोटी भुजा से 30 मी अधिक हो, तो खेत की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए आयताकार खेत की छोटी भुजा x मी है तो प्रश्नानुसार विकर्ण = $(x + 60)$ मी एवं बड़ी भुजा = $(x + 30)$ मी।

अब पाइथागोरस प्रमेय से,

$$(\text{विकर्ण})^2 = (\text{बड़ी भुजा})^2 + (\text{छोटी भुजा})^2$$

$$\Rightarrow (x + 60)^2 = (x + 30)^2 + (x)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 120x + 3600 = x^2 + 60x + 900 + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 60x - 2700 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 90x + 30x - 2700 = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 90) + 30(x - 90) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 90)(x + 30) = 0$$

$$\text{या तो} \quad x + 30 = 0 \Rightarrow x = -30, \text{ जो असम्भव है।}$$

$$\text{अथवा} \quad x - 90 = 0 \Rightarrow x = 90 \text{ मी}$$

$$\Rightarrow \text{छोटी भुजा } x = 90 \text{ मी}$$

$$\text{एवं} \quad \text{बड़ी भुजा} = x + 30 = 90 + 30 = 120 \text{ मी}$$

अतः, आयताकार खेत की अभीष्ट भुजाएँ 120 मी एवं 90 मी हैं।

उत्तर

प्रश्न 6. दो संख्याओं के वर्गों का अन्तर 180 है। छोटी संख्या का वर्ग बड़ी संख्या का आठ गुना है। दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए बड़ी संख्या x है, तो प्रश्नानुसार,

$$(छोटी संख्या)^2 = 8x \Rightarrow छोटी संख्या = \sqrt{8x}$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x = 180$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 180 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 18x + 10x - 180 = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 18) + 10(x - 18) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 18)(x + 10) = 0$$

$$\text{या तो } x - 18 = 0 \Rightarrow x = 18 \text{ बड़ी संख्या}$$

$$\text{तो छोटी संख्या} = \sqrt{8x} = \sqrt{8 \times 18} = \sqrt{144} = \pm 12$$

$$\text{अथवा } x + 10 = 0 \Rightarrow x = -10, \text{ जो असम्भव है।}$$

अतः, अभीष्ट संख्याएँ या तो 18 और 12 अथवा 18 और -12 हैं।

उत्तर

प्रश्न 7. एक रेलगाड़ी एक समान चाल से 360 km की दूरी तय करती है। यदि यह चाल 5 km/h अधिक होती, तो वह उसी यात्रा में 1 घण्टा कम समय लेती। रेलगाड़ी की चाल ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए रेलगाड़ी की चाल x km/h है, तो 360 km दूरी तय करने में लगा समय = $\frac{360}{x}$ h

$$\text{अब प्रश्नानुसार, } \frac{360}{x+5} = \frac{360}{x} - 1$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{360}{x} - \frac{360}{x+5}$$

$$\Rightarrow x(x+5) = 360(x+5) - 360(x)$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x = 360x + 1800 - 360x$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x - 1800 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 45x - 40x - 1800 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+45) - 40(x+45) = 0$$

$$\Rightarrow (x+45)(x-40) = 0$$

$$\text{या तो } x + 45 = 0 \Rightarrow x = -45, \text{ जो असम्भव है।}$$

$$\text{अथवा } x - 40 = 0 \Rightarrow x = 40$$

अतः, रेलगाड़ी की अभीष्ट चाल = 40 km/h है।

उत्तर

प्रश्न 8. दो पानी के नल एक साथ एक हौज को $9\frac{3}{8}$ घण्टों में भर सकते हैं। बड़े व्यास वाला नल हौज को भरने में कम व्यास वाले नल से 10 घण्टे कम समय लेता है। प्रत्येक नल द्वारा अलग से हौज को भरने का समय ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए छोटा नल हौज को भरने में x घण्टे लेता है, तो बड़ा नल उस हौज को भरने में $(x-10)$ घण्टे लेगा। दोनों मिलकर उस हौज को भरने में $9\frac{3}{8} = \frac{75}{8}$ घण्टे लेते हैं। 1 घण्टे में छोटा

नल $\frac{1}{x}$ हौज तथा बड़ा नल $\frac{1}{x-10}$ हौज भरेगा तथा 1 घण्टे में कुल $\frac{8}{75}$ हौज भरेगा।

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{8}{75}$$

$$\Rightarrow 75(x-10) + 75x = 8x(x-10)$$

$$\Rightarrow 75x - 750 + 75x = 8x^2 - 80x$$

$$\Rightarrow 8x^2 - 150x - 80x + 750 = 0$$

$$\Rightarrow 8x^2 - 230x + 750 = 0$$

$$\Rightarrow 8x^2 - 200x - 30x + 750 = 0$$

$$\Rightarrow 8x(x-25) - 30(x-25) = 0$$

⇒

$$(x - 25)(8x - 30) = 0$$

या तो

$$8x - 30 = 0 \Rightarrow x = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} = 3.75 \text{ घण्टे}$$

तब बढ़े नल द्वारा लिया समय $x - 10 = 3.75 - 10 = -6.25$ घण्टे, जो असम्भव है।

अथवा

$$x - 25 = 0 \Rightarrow x = 25 \text{ घण्टे}$$

तब बढ़े नल द्वारा लिया समय $= x - 10 = 25 - 10 = 15$ घण्टे

अतः, दोनों नलों द्वारा हौज को भरने में अलग-अलग लिया गया समय 25 घण्टे एवं 15 घण्टे है।

उत्तर
प्रश्न 9. मैसूर और बैंगलौर के बीच 132 km यात्रा करने में एक एक्सप्रेस रेलगाड़ी सवारी गाड़ी से 1 घण्टा कम समय लेती है। (मध्य के स्टेशनों पर ठहरने का समय ध्यान न लिया जाए) यदि एक्सप्रेस रेलगाड़ी की औसत चाल सवारी गाड़ी की औसत चाल से 11 km/h अधिक हो, तो दोनों रेलगाड़ियों की औसत चाल ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए सवारी गाड़ी की चाल x km/h है तो एक्सप्रेस रेलगाड़ी की चाल $= (x + 11)$ km/h
132 km की दूरी तय करने में सवारी गाड़ी द्वारा लिया गया समय $= \frac{132}{x}$ h एवं एक्सप्रेस रेलगाड़ी द्वारा लिया गया समय $= \frac{132}{x+11}$ h, तब प्रश्नानुसार,

⇒

$$\frac{132}{x} - \frac{132}{x+11} = 1$$

⇒

$$132x + 132 \times 11 - 132x = x(x+11)$$

⇒

$$132x + 33 \times 44 - 132x = x^2 + 11x$$

⇒

$$x^2 + 11x - 33 \times 44 = 0$$

⇒

$$x^2 + 44x - 33x - 33 \times 44 = 0$$

⇒

$$x(x+44) - 33(x+44) = 0$$

⇒

$$(x+44)(x-33) = 0$$

या तो

$$x+44=0 \Rightarrow x=-44, \text{ जो असम्भव है।}$$

अथवा

$$x-33=0 \Rightarrow x=33 \text{ km/h सवारी गाड़ी की चाल}$$

⇒

$$\text{एक्सप्रेस रेलगाड़ी की अभीष्ट चाल} = x+11 = 33+11 = 44 \text{ km/h}$$

अतः, एक्सप्रेस रेलगाड़ी की अभीष्ट चाल $= 44$ km/h एवं सवारी रेलगाड़ी की अभीष्ट चाल $= 33$ km/h.

उत्तर
प्रश्न 10. दो वर्गों के क्षेत्रफलों का योग 468 m² है। यदि उनके परिमापों का अन्तर 24 m हो, तो दोनों वर्गों की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि वर्गों के परिमापों का अन्तर $= 24$ m दिया है तब उनकी भुजाओं का अन्तर $= \frac{24}{4} = 6$ m मान लीजिए कि छोटे वर्ग की भुजा x m है

तब बड़े वर्ग की भुजा $= (x+6)$ m होगी

⇒

$$\text{क्षेत्रफलों का योग} = (x+6)^2 + x^2 = 468$$

⇒

$$x^2 + 12x + 36 + x^2 = 468$$

⇒

$$2x^2 + 12x - 432 = 0$$

⇒

$$x^2 + 6x - 216 = 0$$

⇒

$$x^2 + 18x - 12x - 216 = 0$$

⇒

$$x(x+18) - 12(x+18) = 0$$

⇒

$$(x+18)(x-12) = 0$$

या तो

$$x+18=0 \Rightarrow x=-18, \text{ जो असम्भव है।}$$

अथवा

$$x-12=0 \Rightarrow x=12 \text{ m छोटे वर्ग की भुजा}$$

अब बड़े वर्ग की भुजा $= x+6 = 12+6 = 18$ m.

अतः, वर्गों की अभीष्ट भुजाएँ 12 m एवं 18 m हैं।

उत्तर



समान्तर श्रेढियाँ

[Arithmetic Progressions]

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

अ बहु-विकल्पीय प्रश्न

- किसी AP में यदि $d = -4$, $n = 7$ एवं $a_n = 4$, तो a है :
(a) 6 (b) 7 (c) 20 (d) 28.
 - किसी AP में यदि $a = 3 \cdot 5$, $d = 0$, $n = 101$, तब a_n का मान होगा :
(a) 0 (b) $3 \cdot 5$ (c) $103 \cdot 5$ (d) $104 \cdot 5$.
 - संख्याओं की सूची $-10, -6, -2, 2, \dots$ है :
(a) एक AP, जहाँ $d = -16$ (b) एक AP, जहाँ $d = 4$
(c) एक AP, जहाँ $d = -4$ (d) एक AP नहीं।
 - एक AP : $-5, -\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}, \dots$ का 11वाँ पद होगा :
(a) -20 (b) 20 (c) -30 (d) 30.
 - एक AP का प्रथम पद -2 और सार्वान्तर -2 है के प्रथम चार पद होंगे :
(a) $-2, 0, 2, 4$ (b) $-2, 4, -8, 16$
(c) $-2, -4, -6, -8$ (d) $-2, -4, -8, -16$.
 - AP : $10, 7, 4, \dots$ का 10वाँ पद है : (2020)
(a) 14 (b) 17 (c) -14 (d) -17 .
 - AP : $-3, -\frac{1}{2}, 2, \dots$ का 11वाँ पद है :
(a) 28 (b) 22 (c) -38 (d) $-48 \frac{1}{2}$.
- उत्तर—1. (d), 2. (b), 3. (b), 4. (b), 5. (c), 6. (d), 7. (b).

अ रिक्त स्थानों की पूर्ति

- जब किसी अनुक्रम के पदों को किसी नियम द्वारा लिखा जाता है, तो इसे कहते हैं।
 - वह अनुक्रम जिसका प्रत्येक पद अपने पूर्ववर्ती पद से एक निश्चित अन्तर रखता है कहलाता है।
 - समान्तर श्रेढी के किसी पद का उसके पूर्ववर्ती पद में अन्तर कहलाता है।
 - कोई तीन राशियाँ समान्तर श्रेढी में हों तो मध्य वाली राशि शेष दो राशियों का कहलाती है।
 - एक समान्तर श्रेढी का प्रथम पद a तथा सार्वान्तर d हो, तो उसका n वाँ पद होगा। (2022)
 - समान्तर श्रेढी $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots$ में सार्वान्तर $d = \dots$ है। (2019)
- उत्तर—1. श्रेढी, 2. समान्तर श्रेढी, 3. सार्वान्तर, 4. समान्तर माध्य, 5. $a + (n-1)d$, 6. -1 .

जोड़ी मिलाइए

स्तम्भ 'अ'

1. 2, -2, -6, -10,
2. $a = -18, n = 10, a_n = 0$
3. $a = 0, a_{10} = 6$
4. $a_2 = 13, a_4 = 3$
5. प्रथम पद a एवं सार्वान्तर d वाली AP के पदों का योग

स्तम्भ 'ब'

- (a) $d = -5$
- (b) $S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$
- (c) $d = -4$
- (d) $d = 2$
- (e) $d = \frac{2}{3}$

उत्तर—1.→(c), 2.→(d), 3.→(e), 4.→(a), 5.→(b).

सत्य/असत्य कथन

1. समान्तर श्रेणी के पद सदैव बढ़ते क्रम में होते हैं।
2. 5 और 7 का समान्तर माध्य 6 होता है।
3. समान्तर श्रेणी के किन्हीं दो पदों का अन्तर सार्वान्तर होता है।
4. समान्तर श्रेणी 10, 5, का अगला पद 0 होगा।
5. 1, 2, 1, 3, एक समान्तर श्रेणी है।
6. समान्तर श्रेणी 10, 7, 4, का 10वाँ पद -17 है।

(2022)

उत्तर—1. असत्य, 2. सत्य, 3. असत्य, 4. सत्य, 5. असत्य, 6. सत्य।

एक शब्द/वाक्य में उत्तर

1. $2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0, \dots$ का अगला पद क्या होगा ?
2. 5, 10, 15, का अगला पद क्या होगा ?
3. $\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}, \sqrt{5}, \dots$ कौन-सी श्रेणी है ?
4. $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ समान्तर श्रेणी है या नहीं ?
5. यदि किसी श्रेणी में पदों की संख्या सीमित न हो तो उसे क्या कहते हैं ?
6. समान्तर श्रेणी का व्यापक रूप लिखिए।

(2020)

उत्तर—1. $-\sqrt{2}$, 2. 20, 3. समान्तर श्रेणी, 4. नहीं, 5. अनन्त श्रेणी, 6. $a, a \pm d, a \pm 2d, a \pm 3d, \dots$

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

- प्रश्न 1. निम्नलिखित स्थितियों में से किन स्थितियों में सम्बद्ध संख्याओं की सूची A.P. है और क्यों ?
- (i) प्रत्येक किलोमीटर के बाद का टैक्सी का किराया जबकि प्रथम किलोमीटर के लिए किराया ₹ 15 है और प्रत्येक अतिरिक्त किलोमीटर के लिए किराया ₹ 8 है।
 - (ii) किसी बेलन (Cylinder) में उपस्थित हवा की मात्रा, जबकि वायु निकालने वाला पम्प प्रत्येक बार बेलन की शेष हवा का $\frac{1}{4}$ भाग बाहर निकाल देता है।
 - (iii) प्रत्येक मीटर की खुदाई के बाद, एक कुआँ खोदने में आई लागत जबकि प्रथम मीटर खुदाई की लागत ₹ 150 है और बाद में प्रत्येक मीटर की खुदाई की लागत ₹ 50 बढ़ती जाती है।
 - (iv) खाते में प्रत्येक वर्ष का मिश्रधन, जबकि ₹ 10,000 की राशि 8% वार्षिक की दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर जमा की जाती है।
- हल : (i) हाँ, 15, 23, 31, 39, एक A.P. बनाते हैं, क्योंकि प्रत्येक अगला पद पिछले पद में एक निश्चित संख्या 8 जोड़ने से प्राप्त होता है।

- (ii) नहीं, आयतन $V, \frac{3V}{4}, \left(\frac{3}{4}\right)^2 V, \left(\frac{3}{4}\right)^3 V, \dots$ क्योंकि सार्वान्तर समान नहीं हैं।
- (iii) हाँ, खुदाई की लागत ₹ 150, 200, 250, 300, एक A.P. बनाते हैं क्योंकि प्रत्येक अगला पद पिछले पद में एक निश्चित संख्या 50 जोड़ने से प्राप्त होता है।
- (iv) नहीं, राशियाँ $10,000\left(1 + \frac{8}{100}\right), 10,000\left(1 + \frac{8}{100}\right)^2, 10,000\left(1 + \frac{8}{100}\right)^3, 10,000\left(1 + \frac{8}{100}\right)^4, \dots$ सार्वान्तर समान नहीं हैं।

प्रश्न 2. दी हुई A.P. के प्रथम चार पद लिखिए, जबकि प्रथम पद a और सार्वान्तर d निम्नलिखित हैं :

- (i) $a = 10, d = 10,$ (ii) $a = -2, d = 0,$
 (iii) $a = 4, d = -3,$ (iv) $a = -1, d = \frac{1}{2},$
 (v) $a = -1.25, d = -0.25.$

- हल : (i) अभीष्ट प्रथम चार पद हैं : 10, 20, 30, 40.
 (ii) अभीष्ट प्रथम चार पद हैं : -2, -2, -2, -2.
 (iii) अभीष्ट प्रथम चार पद हैं : 4, 1, -2, -5.
 (iv) अभीष्ट प्रथम चार पद हैं : -1, $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}.$
 (v) अभीष्ट प्रथम चार पद हैं : -1.25, -1.50, -1.75, -2.00.

प्रश्न 3. निम्नलिखित में से प्रत्येक A.P. के लिए प्रथम पद तथा सार्वान्तर लिखिए :

- (i) 3, 1, -1, -3, (ii) -5, -1, 3, 7, (2022)
 (iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \dots$ (iv) 0.6, 1.7, 2.8, 3.9,

- हल : (i) प्रथम पद : $a = 3$ एवं सार्वान्तर $d = 1 - 3 = -2.$
 (ii) प्रथम पद $a = -5$ एवं सार्वान्तर $d = (-1) - (-5) = -1 + 5 = 4.$
 (iii) प्रथम पद : $a = \frac{1}{3}$ एवं सार्वान्तर $d = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$
 (iv) प्रथम पद : $a = 0.6$ एवं सार्वान्तर $d = 1.7 - 0.6 = 1.1.$

प्रश्न 4. निम्नलिखित में से कौन-कौन A.P. है? यदि कोई A.P. है, तो इसका सार्वान्तर ज्ञात कीजिए।

- (i) 2, 4, 8, 16, (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \dots$
 (iii) -1.2, -3.2, -5.2, -7.2, (iv) -10, -6, -2, 2,
 (v) $3, 3 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}, \dots$ (vi) 0.2, 0.22, 0.222, 0.2222,

हल : (i) 2, 4, 8, 16,

$$\Rightarrow \begin{aligned} a_2 - a_1 &= 4 - 2 = 2 \\ a_3 - a_2 &= 8 - 4 = 4 \\ a_4 - a_3 &= 16 - 8 = 8 \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a_2 - a_1) \neq (a_3 - a_2) \neq (a_4 - a_3)$$

अतः, यह A.P. नहीं है।

उत्तर

(ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \dots$

$$\Rightarrow a_2 - a_1 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 - a_2 = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_4 - a_3 = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$$

.....
.....

$$\Rightarrow (a_2 - a_1) = (a_3 - a_2) = (a_4 - a_3) = \frac{1}{2} \text{ [सर्वान्तर (d)]}$$

अतः, यह A.P. है तथा इसका सर्वान्तर $d = \frac{1}{2}$ है।

उत्तर

(iii) $-1 \cdot 2, -3 \cdot 2, -5 \cdot 2, -7 \cdot 2, \dots$

$$\Rightarrow a_2 - a_1 = (-3 \cdot 2) - (-1 \cdot 2) = -2$$

$$a_3 - a_2 = (-5 \cdot 2) - (-3 \cdot 2) = -2$$

$$a_4 - a_3 = (-7 \cdot 2) - (-5 \cdot 2) = -2$$

.....
.....

$$\Rightarrow (a_2 - a_1) = (a_3 - a_2) = (a_4 - a_3) = -2 \text{ [सर्वान्तर (d)]}$$

अतः, यह A.P. है जिसका सर्वान्तर $d = -2$ है।

उत्तर

(iv) $-10, -6, -2, 2, \dots$

$$\Rightarrow a_2 - a_1 = (-6) - (-10) = 4$$

$$a_3 - a_2 = (-2) - (-6) = 4$$

$$a_4 - a_3 = (2) - (-2) = 4$$

.....
.....

$$\Rightarrow (a_2 - a_1) = (a_3 - a_2) = (a_4 - a_3) = 4 \text{ [सर्वान्तर (d)]}$$

अतः, यह एक A.P. है, जिसका सर्वान्तर $d = 4$ है।

उत्तर

(v) $3, 3 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}, \dots$

$$\Rightarrow a_2 - a_1 = (3 + \sqrt{2}) - (3) = \sqrt{2}$$

$$a_3 - a_2 = (3 + 2\sqrt{2}) - (3 + \sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$$a_4 - a_3 = (3 + 3\sqrt{2}) - (3 + 2\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

.....
.....

$$\Rightarrow (a_2 - a_1) = (a_3 - a_2) = (a_4 - a_3) = \sqrt{2} \text{ [सर्वान्तर (d)]}$$

अतः, यह एक A.P. है जिसका सर्वान्तर $d = \sqrt{2}$ है।

उत्तर

(vi) $0 \cdot 2, 0 \cdot 22, 0 \cdot 222, 0 \cdot 2222, \dots$

$$\Rightarrow a_2 - a_1 = 0 \cdot 22 - 0 \cdot 2 = 0 \cdot 02$$

$$a_3 - a_2 = 2 \cdot 222 - 0 \cdot 22 = 0 \cdot 002$$

$$a_4 - a_3 = 2 \cdot 2222 - 0 \cdot 222 = 0 \cdot 0002$$

$$\Rightarrow (a_2 - a_1) \neq (a_3 - a_2) \neq (a_4 - a_3)$$

अतः, यह A.P. नहीं है।

उत्तर

प्रश्न 5. किसी AP का 17वाँ पद उसके 10वें पद से 7 अधिक है। इसका सार्वान्तर ज्ञात कीजिए।
हल : प्रश्नानुसार, $(a + 16d) - (a + 9d) = 7$

$$\Rightarrow 16d - 9d = 7 \Rightarrow 7d = 7 \Rightarrow d = \frac{7}{7} = 1$$

अतः, d का अभीष्ट मान = 1.

प्रश्न 6. AP : 3, 8, 13, 253 में अन्तिम पद से 20वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : AP को घटते क्रम में लिखने पर,
253, 248, 243, 13, 8, 3.

जहाँ $a = 253$ एवं $d = (248 - 253) = -5$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_{20} &= 253 + (20 - 1)(-5) \\ &= 253 + 19(-5) = 253 - 95 \\ &= 158 \end{aligned}$$

अतः, दत्त AP के अन्तिम पद से अभीष्ट 20वाँ पद = 158.

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. AP : 3, 8, 13, 18, का कौन-सा पद 78 है?

हल : प्रश्नानुसार, $a = 3$, $d = 8 - 3 = 5$, $a_n = 78$

$$\begin{aligned} \text{एवं} & a_n = a + (n - 1) \times d \\ \Rightarrow & 78 = 3 + (n - 1) \times 5 = 3 + 5n - 5 \\ \Rightarrow & 5n = 78 + 5 - 3 = 80 \\ \Rightarrow & n = \frac{80}{5} = 16 \end{aligned}$$

अतः, अभीष्ट 16वाँ पद 78 है।

प्रश्न 2. AP : 21, 18, 15, का कौन-सा पद -81 है?

हल : प्रश्नानुसार, $a = 21$, $d = 18 - 21 = -3$, $a_n = -81$

$$\begin{aligned} \text{एवं} & a_n = a + (n - 1) \times d \\ \Rightarrow & -81 = 21 + (n - 1)(-3) \\ \Rightarrow & -81 = 21 - 3n + 3 \\ \Rightarrow & 3n = 24 + 81 = 105 \\ \Rightarrow & n = \frac{105}{3} = 35 \end{aligned}$$

अतः, अभीष्ट 35वाँ पद -81 है।

प्रश्न 3. निम्नलिखित समान्तर श्रेणियों में से प्रत्येक श्रेणी में कितने पद हैं?

(i) 7, 13, 19, 205 (ii) $18, 15\frac{1}{2}, 13, \dots (-47)$.

हल : (i) चूँकि A.P : 7, 13, 19, 205 (दी गयी है)

प्रश्नानुसार, $a = 7$, $d = 13 - 7 = 6$ एवं $a_n = 205$

$$\begin{aligned} \text{चूँकि} & a_n = a + (n - 1)(d) \\ \Rightarrow & 205 = 7 + (n - 1)(6) \\ \Rightarrow & 205 = 7 + 6n - 6 \\ \Rightarrow & 6n = 205 + 6 - 7 = 204 \\ \Rightarrow & n = \frac{204}{6} = 34 \end{aligned}$$

(ii) चूँकि AP : $18, 15\frac{1}{2}, 13, \dots, (-47)$ (दी गयी है)

प्रश्नानुसार, $a = 18$, $d = 15\frac{1}{2} - 18 = -2\frac{1}{2}$ एवं $a_n = -47$

$$\begin{aligned} \text{चूँकि} \quad & a_n = a + (n-1)(d) \\ \Rightarrow & -47 = 18 + (n-1)\left(-2\frac{1}{2}\right) \\ \Rightarrow & -47 = 18 - 2\frac{1}{2}n + 2\frac{1}{2} \\ \Rightarrow & \frac{5}{2}n = 47 + 18 + 2\frac{1}{2} = 67\frac{1}{2} = \frac{135}{2} \\ \Rightarrow & n = \frac{135}{2} \times \frac{2}{5} = 27 \end{aligned}$$

उत्तर

प्रश्न 4. क्या AP : 11, 8, 5, 2 का एक पद - 150 है? क्यों?

हल : प्रश्नानुसार, $a = 11, d = 8 - 11 = -3, a_n = -150$.

$$\begin{aligned} \text{चूँकि} \quad & a_n = a + (n-1)(d) \\ \Rightarrow & -150 = 11 + (n-1)(-3) = 11 - 3n + 3 \\ \Rightarrow & 3n = 150 + 11 + 3 = 164 \\ \Rightarrow & n = \frac{164}{3} = 54\frac{2}{3} \text{ जो एक पूर्णांक नहीं है।} \end{aligned}$$

अतः, दत्त AP का कोई भी पद - 150 नहीं होगा।

उत्तर

प्रश्न 5. उस AP का 31वाँ पद ज्ञात कीजिए जिसका 11वाँ पद 38 है और 16वाँ पद 73 है। (2019)

हल : प्रश्नानुसार, $n_{11} = 38$ एवं $n_{16} = 73$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow & 38 = a + 10d \Rightarrow a + 10d = 38 \quad \dots(1) \\ \text{एवं} & 73 = a + 15d \Rightarrow a + 15d = 73 \quad \dots(2) \\ \Rightarrow & 5d = 35 \quad \text{[समीकरण (2) - समीकरण (1) से]} \\ \Rightarrow & d = \frac{35}{5} = 7 \end{aligned}$$

अब d का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$a + 10 \times 7 = 38 \Rightarrow a = 38 - 70 = -32$$

अब

$$a_{31} = a + 30d = -32 + 30 \times 7$$

\Rightarrow

$$a_{31} = -32 + 210 = 178$$

उत्तर

प्रश्न 6. एक AP में 50 पद हैं, जिसका तीसरा पद 12 है और अन्तिम पद 106 है। इसका 29वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार, $n = 50, a_3 = 12$ एवं $a_{50} = 106$

$$\begin{aligned} \text{चूँकि} \quad & a_n = a + (n-1)d \\ \Rightarrow & 106 = a + 49d \Rightarrow a + 49d = 106 \quad \dots(1) \\ \text{एवं} & 12 = a + 2d \Rightarrow a + 2d = 12 \quad \dots(2) \\ \Rightarrow & 47d = 94 \quad \text{[समीकरण (2) - समीकरण (1) से]} \\ \Rightarrow & d = \frac{94}{47} = 2 \end{aligned}$$

d का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$a + 2 \times 2 = 12 \Rightarrow a = 12 - 4 = 8$$

अब

$$n_{29} = 8 + 28 \times 2 = 8 + 56 = 64$$

उत्तर

प्रश्न 7. यदि किसी AP के तीसरे और नौवें पद क्रमशः 4 और - 8 हैं, तो इसका कौन-सा पद शून्य होगा? (2022)

हल : प्रश्नानुसार, $a_3 = 4$ एवं $a_9 = -8$ है।

$$\begin{aligned} \Rightarrow & a_3 = a + 2d = 4 \quad \dots(1) \\ \text{एवं} & a_9 = a + 8d = -8 \quad \dots(2) \\ \Rightarrow & 6d = -12 \quad \text{[समीकरण (2) - समीकरण (1) से]} \end{aligned}$$

⇒

d का मान समीकरण (1) में रखने पर,

चूँकि

अब

⇒

⇒

$$d = -\frac{12}{6} = -2$$

$$a + 2(-2) = 4 \Rightarrow a = 4 + 4 = 8$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$0 = 8 + (n-1)(-2) \Rightarrow 0 = 8 - 2n + 2$$

$$2n = 8 + 2 = 10 \Rightarrow n = \frac{10}{2} = 5$$

अतः, अभीष्ट पाँचवाँ पद शून्य होगा।

प्रश्न 8. AP : 3, 15, 27, 39, का कौन-सा पद उसके 54वें पद से 132 अधिक होगा? उत्तर

हल : प्रश्नानुसार, $a = 3$, $d = 15 - 3 = 12$ एवं $a_n - a_{54} = 132$

$$\Rightarrow [3 + (n-1)(12)] - [3 + (54-1)(12)] = 132$$

$$\Rightarrow (3 + 12n - 12) - (3 + 53 \times 12) = 132$$

$$\Rightarrow 12n - 12 - 636 = 132$$

$$\Rightarrow 12n = 132 + 12 + 636 = 780$$

$$\Rightarrow n = \frac{780}{12} = 65$$

अतः, अभीष्ट 65वाँ पद होगा।

प्रश्न 9. दो समान्तर श्रेणियों का सार्वान्तर समान है। यदि इनके 100वें पदों का अन्तर 100 है, तो इनके 1000वें पदों का अन्तर क्या होगा? उत्तर

हल : माना कि, दो समान्तर श्रेणियाँ क्रमशः $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n-1)d$

एवं $b, b + d, b + 2d, \dots, b + (n-1)d$ हैं।

प्रश्नानुसार $[a + (100-1)d] - [b + (100-1)d] = 100$

$$\Rightarrow (a + 99d) - (b + 99d) = 100$$

$$\Rightarrow a - b = 100 \quad \dots(1)$$

अब $[a + (1000-1)d] - [b + (1000-1)d]$

$$= (a + 999d) - (b + 999d)$$

$$= a - b = 100$$

[समीकरण (1) से]

अतः, हजारवें पदों का अभीष्ट अन्तर = 100 होगा। उत्तर

प्रश्न 10. तीन अंकों वाली कितनी संख्याएँ 7 से विभाज्य हैं।

हल : 7 से विभाज्य तीन अंकों वाली संख्याओं की सूची है :

$$105, 112, 119, \dots, 994$$

जहाँ, $a = 105$, $d = 112 - 105 = 7$ एवं $a_n = 994$

चूँकि

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$\Rightarrow 994 = 105 + (n-1) \times 7$$

$$\Rightarrow 994 = 105 + 7n - 7$$

$$\Rightarrow 7n = 994 + 7 - 105$$

$$\Rightarrow 7n = 1001 - 105 = 896$$

$$\Rightarrow n = \frac{896}{7} = 128$$

अतः, 7 से विभाज्य तीन अंकों वाली कुल अभीष्ट संख्याएँ 128 हैं। उत्तर

प्रश्न 11. 10 और 250 के बीच में 4 के कितने गुणज हैं? (2020)

हल : 10 और 250 के बीच 4 के गुणजों की सूची है :

$$12, 16, 20, 24, \dots, 248$$

जहाँ, $a = 12$, $d = 16 - 12 = 4$ एवं $a_n = 248$

चूँकि

$$a_n = a + (n - 1) d$$

$$\Rightarrow 248 = 12 + (n - 1) (4)$$

$$\Rightarrow 248 = 12 + 4n - 4 = 4n + 8$$

$$\Rightarrow 4n = 248 - 8 = 240$$

$$\Rightarrow n = \frac{240}{4} = 60$$

अतः, 10 और 250 के बीच 4 के गुणजों की अभीष्ट संख्या 60 है।

उत्तर

प्रश्न 12. n के किस मान के लिए दोनों समान्तर श्रेणियों 63, 65, 67, और 3, 10, 17, के n वें पद बराबर होंगे?

हल : चूँकि प्रथम AP का $a = 63$ एवं $d = 65 - 63 = 2$, एवं द्वितीय A.P. का $a' = 3$ एवं $d' = 10 - 3 = 7$ है, तो प्रश्नानुसार,

$$63 + (n - 1) (2) = 3 + (n - 1) (7)$$

$$63 + 2n - 2 = 3 + 7n - 7$$

$$\Rightarrow 61 + 2n = 7n - 4$$

$$\Rightarrow 7n - 2n = 61 + 4$$

$$\Rightarrow 5n = 65 \Rightarrow n = \frac{65}{5} = 13$$

अतः, n के अभीष्ट मान 13 के लिए दोनों श्रेणियों के n वें पद बराबर होंगे।

उत्तर

प्रश्न 13. वह AP ज्ञात कीजिए जिसका तीसरा पद 16 है और 7वाँ पद 5वें पद से 12 अधिक है।

हल : मान लीजिए कि AP का प्रथम पद a तथा सार्वान्तर d है, तो

प्रश्नानुसार,

$$a_3 = 16 \Rightarrow a + 2d = 16 \quad \dots(1)$$

एवं

$$a_7 - a_5 = 12 \Rightarrow (a + 6d) - (a + 4d) = 12$$

$$\Rightarrow 2d = 12 \Rightarrow d = \frac{12}{2} = 6 \quad \dots(2)$$

d का मान समीकरण (2) से समीकरण (1) में रखने पर,

$$a + 2 \times 6 = 16 \Rightarrow a + 12 = 16 \Rightarrow a = 16 - 12 = 4$$

अतः, अभीष्ट AP = 4, 10, 16, 22,

उत्तर

प्रश्न 14. सुब्बाराव ने 1995 में ₹ 5,000 के मासिक वेतन पर कार्य प्रारम्भ किया और प्रत्येक वर्ष ₹ 200 की वेतन वृद्धि प्राप्त की। किस वर्ष में उसका वेतन ₹ 7,000 हो गया?

हल : सुब्बाराव के प्रतिवर्ष के वेतन की सूची एक AP का निर्माण करेगी, जिसमें $a = ₹ 5,000$, $d = ₹ 200$ एवं $a_n = ₹ 7,000$ होगा।

इसलिए प्रश्नानुसार,

$$a_n = a + (n - 1) d$$

$$\Rightarrow 7000 = 5000 + (n - 1) \times 200$$

$$\Rightarrow 7000 = 5000 + 200n - 200$$

$$\Rightarrow 7000 = 4800 + 200n$$

$$\Rightarrow 200n = 7000 - 4800 = 2200$$

$$\Rightarrow n = \frac{2200}{200} = 11$$

अतः, सुब्बाराव का अभीष्ट वेतन 11वें वर्ष में होगा।

उत्तर

प्रश्न 15. रामकली ने किसी वर्ष के प्रथम सप्ताह में ₹ 5 की बचत की और फिर अपनी साप्ताहिक बचत में ₹ 1.75 बढ़ाती गयी। यदि n वें सप्ताह में उसकी बचत ₹ 20.75 हो जाती है, तो n ज्ञात कीजिए।

हल : रामकली के साप्ताहिक बचत की सूची एक AP का निर्माण करती है जिसमें $a = ₹ 5$ एवं $d = ₹ 1.75$ तथा $a_n = ₹ 20.75$, तो प्रश्नानुसार,

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$\Rightarrow 20.75 = 5 + (n-1)(1.75)$$

$$\Rightarrow 20.75 = 5 + 1.75n - 1.75$$

$$\Rightarrow 1.75n = 20.75 + 1.75 - 5$$

$$\Rightarrow 1.75n = 22.50 - 5 = 17.50$$

$$\Rightarrow n = \frac{17.50}{1.75} = 10$$

उत्तर

प्रश्न 16. निम्नलिखित समान्तर श्रेढ़ियों का योग ज्ञात कीजिए :

- (i) 2, 7, 12, 10 पदों तक।
 (ii) -37, -33, -29, 12 पदों तक।
 (iii) 0.6, 1.7, 2.8, 100 पदों तक।
 (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \dots$ 11 पदों तक।

हल : (i) 2, 7, 12, 10 पदों तक
 यहाँ $a = 2, d = 7 - 2 = 5$ एवं $n = 10$ है।

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}[2 \times 2 + (10-1) \times 5]$$

$$= 5(4 + 45)$$

$$\Rightarrow S_n = 5 \times 49 = 245$$

उत्तर

(ii) -37, -33, -29, 12 पदों तक
 यहाँ $a = -37, d = (-33) - (-37) = -33 + 37 = 4$ एवं $n = 12$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2}[2 \times (-37) + (12-1)(4)]$$

$$= 6(-74 + 11 \times 4)$$

$$= 6(-74 + 44)$$

$$= 6(-30) = -180$$

उत्तर

(iii) 0.6, 1.7, 2.8, 100 पदों तक
 यहाँ $a = 0.6, d = 1.7 - 0.6 = 1.1$ एवं $n = 100$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow S_{100} = \frac{100}{2}[2 \times 0.6 + (100-1)(1.1)]$$

$$= 50(1.2 + 99 \times 1.1)$$

$$= 50(1.2 + 108.9)$$

$$\Rightarrow S_{100} = 50 \times 110.1 = 5505.0$$

उत्तर

(iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \dots$ 11 पदों तक

यहाँ, $a = \frac{1}{15}, d = \frac{1}{12} - \frac{1}{15} = \frac{15-12}{180} = \frac{3}{180} = \frac{1}{60}$ एवं $n = 11$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\ \Rightarrow S_{11} &= \frac{11}{2} \left[2 \times \frac{1}{15} + (11-1) \times \frac{1}{60} \right] \\ &= \frac{11}{2} \left[\frac{2}{15} + \frac{1}{6} \right] \\ &= \frac{11}{2} \left[\frac{4+5}{30} \right] = \frac{11}{2} \times \frac{9}{30} = \frac{33}{20} \end{aligned}$$

अ

प्रश्न 17. नीचे दिए गए योगफलों को ज्ञात कीजिए :

- (i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \dots + 84$
(ii) $34 + 32 + 30 + \dots + 10$
(iii) $-5 + (-8) + (-11) + \dots + (-230)$.

हल : (i) $S_n = 7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \dots + 84$

चूँकि $\left(10\frac{1}{2} - 7\right) = \left(14 - 10\frac{1}{2}\right) = 3\frac{1}{2} = d = \frac{7}{2}$

अतः उक्त एक AP है, जहाँ $a = 7$ एवं $a_n = 84$.

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= a + (n-1)d \\ \Rightarrow 84 &= 7 + (n-1)\left(\frac{7}{2}\right) \\ \Rightarrow 168 &= 14 + 7n - 7 \\ \Rightarrow 7n &= 168 + 7 - 14 = 175 - 14 = 161 \\ \Rightarrow n &= \frac{161}{7} = 23, \text{ अतः श्रेणी में 23 पद हैं।} \end{aligned}$$

चूँकि $S_n = \frac{n}{2}[a + l] = \frac{n}{2}[a + a_n]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_n &= \frac{23}{2}[7 + 84] = \frac{23}{2} \times 91 \\ &= \frac{2093}{2} = 1046\frac{1}{2} \end{aligned}$$

उत्तर

(ii) $S_n = 34 + 32 + 30 + \dots + 10$

यहाँ $a = 34, d = 32 - 34 = -2$ एवं $a_n = 10$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= a + (n-1)d \\ \Rightarrow 10 &= 34 + (n-1)(-2) \\ \Rightarrow 10 &= 34 - 2n + 2 \\ \Rightarrow 2n &= 36 - 10 = 26 \\ \Rightarrow n &= \frac{26}{2} = 13, \text{ अतः श्रेणी में 13 पद हैं।} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{n}{2}(a + a_n) \\ \Rightarrow S_n &= \frac{13}{2}(34 + 10) \\ &= \frac{13}{2} \times 44 = 13 \times 22 = 286 \end{aligned}$$

उत्तर

(iii) $S_n = (-5) + (-8) + (-11) + \dots + (-230)$

यहाँ $a = -5, d = (-8) - (-5) = -8 + 5 = -3$ एवं $a_n = -230$

$$\therefore a_n = a + (n-1)d$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -230 &= -5 + (n-1)(-3) \\ \Rightarrow -230 &= -5 - 3n + 3 \\ \Rightarrow 3n &= 230 + 3 - 5 = 233 - 5 = 228 \\ \Rightarrow n &= \frac{228}{3} = 76 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{चूँकि } S_n &= \frac{n}{2}[a + a_n] \\ &= \frac{76}{2}[-5 + (-230)] \\ &= 38(-235) = -8930 \end{aligned}$$

उत्तर

प्रश्न 18. 636 योग प्राप्त करने के लिए AP : 9, 17, 25, के कितने पद लेने चाहिए ?

हल : यहाँ $S_n = 636$ तथा AP : 9, 17, 25, दिए हैं; जहाँ $a = 9$ एवं $d = 25 - 17 = 8$.

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\ \Rightarrow 636 &= \frac{n}{2}[2 \times 9 + (n-1) \times 8] \\ \Rightarrow 636 &= 9n + 4n^2 - 4n \\ \Rightarrow 4n^2 + 5n - 636 &= 0 \\ \Rightarrow 4n^2 + 53n - 48n - 636 &= 0 \\ \Rightarrow n(4n + 53) - 12(4n + 53) &= 0 \\ \Rightarrow (4n + 53)(n - 12) &= 0 \end{aligned}$$

या तो $4n + 53 = 0 \Rightarrow n = -\frac{53}{4}$, जो असम्भव है।

अथवा $n - 12 = 0 \Rightarrow n = 12$

अतः, 636 योग प्राप्त करने के लिए दी गई AP के हमें 12 पद लेने चाहिए।

उत्तर

प्रश्न 19. किसी AP का प्रथम पद 5, अन्तिम पद 45 और योग 400 है। पदों की संख्या एवं सार्वान्तर ज्ञात कीजिए।

(2020)

हल : यहाँ $a = 5$, $l = 45$ एवं $S_n = 400$ (दिए हैं)

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{n}{2}[a + l] \\ \Rightarrow 400 &= \frac{n}{2}[5 + 45] = \frac{n}{2} \times 50 = 25n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 25n = 400 \Rightarrow n = \frac{400}{25} = 16$$

उत्तर

$$\therefore a_n = l = a + (n-1)d$$

$$\Rightarrow 45 = 5 + (16-1)d$$

$$\Rightarrow 15d = 45 - 5 = 40$$

$$\Rightarrow d = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$$

उत्तर

प्रश्न 20. किसी AP के प्रथम एवं अन्तिम पद क्रमशः 17 और 350 हैं। यदि सार्वान्तर 9 है, तो इसमें कितने पद हैं और इनका योग कितना है?

हल : यहाँ $a = 17$, $l = a_n = 350$ एवं $d = 9$ (दिए हैं)

$$\therefore l = a_n = a + (n-1)d$$

$$\Rightarrow 350 = 17 + (n-1) \times 9$$

$$\Rightarrow 350 = 17 + 9n - 9$$

$$\Rightarrow 9n = 350 + 9 - 17 = 359 - 17 = 342$$

$$\Rightarrow n = \frac{342}{9} = 38$$

और $\therefore S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

$\Rightarrow S_{38} = \frac{38}{2}(17 + 350)$
 $= 19 \times 367$
 $= 6973$

प्रश्न 21. उस AP के प्रथम 22 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसमें $d = 7$ है और 22वाँ पद 149 है। उत्तर

हल : यहाँ, $d = 7$, $a_{22} = 149$ एवं $n = 22$ (दिए हैं)

$\therefore a_n = a + (n - 1) \times d$

$\Rightarrow a_{22} = a + (22 - 1) \times 7 = 149$

$\Rightarrow a + 147 = 149 \Rightarrow a = 149 - 147 = 2$

और $\therefore S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$

$\Rightarrow S_{22} = \frac{22}{2}[2 + 149]$

$= 11 \times 151 = 1661$ उत्तर

प्रश्न 22. उस AP के प्रथम 51 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसके दूसरे और तीसरे पद क्रमशः 14 और 18 हैं। उत्तर

हल : यहाँ $n = 51$, $a_2 = 14$ एवं $a_3 = 18$

$\therefore a_2 = a + (2 - 1)d = 14 \Rightarrow a + d = 14$... (1)

एवं $a_3 = a + (3 - 1)d = 18 \Rightarrow a + 2d = 18$... (2)

समीकरण (1) को समीकरण (2) में से घटाने पर,

$d = 18 - 14 = 4$

d का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$a + 4 = 14 \Rightarrow a = 14 - 4 = 10$

$\therefore S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1) \times d]$

$\Rightarrow S_{51} = \frac{51}{2}[2 \times 10 + (51 - 1) \times 4]$

$= \frac{51}{2}[20 + 200]$

$= \frac{51}{2} \times 220$

$= 51 \times 110 = 5610$ उत्तर

प्रश्न 23. यदि किसी AP के प्रथम 7 पदों का योग 49 है और प्रथम 17 पदों का योग 289 है, तो उसके प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $S_7 = 49$ एवं $S_{17} = 289$ दिए हैं।

$\Rightarrow S_7 = \frac{7}{2}[2a + 6d] = 49$

$\Rightarrow 7a + 21d = 49 \Rightarrow a + 3d = 7$... (1)

एवं $S_{17} = \frac{17}{2}[2a + 16d] = 289$

$\Rightarrow a + 8d = 17$... (2)

समीकरण (2) में से समीकरण (1) को घटाने पर,

$5d = 10 \Rightarrow d = \frac{10}{5} = 2$

d का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$a + 3 \times 2 = 7 \Rightarrow a = 7 - 6 = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1) \times d] \\ &= \frac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1) \times 2] \\ &= \frac{n}{2}[2 + 2n - 2] = \frac{n}{2} \times 2n = n^2 \end{aligned}$$

उत्तर

प्रश्न 24. यदि किसी AP के प्रथम n पदों का योग $4n - n^2$ है, तो इसका प्रथम पद (अर्थात् S_1) क्या है? प्रथम दो पदों का योग क्या है? दूसरा पद क्या है? इसी प्रकार तीसरे, 10वें और n वें पद ज्ञात कीजिए।

हल : $\therefore S_n = 4n - n^2$ (दिया है)

$\Rightarrow S_1 = 4 \times 1 - (1)^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow a = 3$

$\Rightarrow S_2 = 4 \times 2 - (2)^2 = 8 - 4 = 4$

दूसरा पद $a_2 = S_2 - S_1 = 4 - 3 = 1$

\Rightarrow सार्वान्तर $d = a_2 - a_1 = 1 - 3 = -2$

अब $a_3 = a + 2d = 3 + 2(-2) = 3 - 4 = -1$

$a_{10} = a + 9d = 3 + 9 \times (-2) = 3 - 18 = -15$

एवं $a_n = a + (n-1)d = 3 + (n-1)(-2)$

$a_n = 3 - 2n + 2 = 5 - 2n$

अतः, अभीष्ट मान $S_1 = a_1 = 3, S_2 = 4, a_2 = 1, a_3 = -1, a_{10} = -15$ एवं $a_n = 5 - 2n$.

उत्तर

प्रश्न 25. ऐसे प्रथम 40 धन पूर्णाकों का योग ज्ञात कीजिए जो 6 से विभाज्य हैं।

हल : 6 से विभाज्य धन पूर्णाक हैं :

6, 12, 18, 24,

यहाँ $a = 6, d = 12 - 6 = 6, n = 40$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1) \times d] \\ \Rightarrow S_{40} &= \frac{40}{2}[2 \times 6 + (40-1) \times 6] \\ &= 20 [12 + 240 - 6] = 20(246) = 4920. \end{aligned}$$

अतः, अभीष्ट 6 से विभाज्य प्रथम 40 धन पूर्णाकों का योग 4920 है।

उत्तर

प्रश्न 26. 8 के प्रथम 15 गुणजों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : 8 के गुणज हैं : 8, 16, 24, 32,

यहाँ $a = 8, d = 16 - 8 = 8$ एवं $n = 15$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1) \times d] \\ &= \frac{15}{2}[2 \times 8 + (15-1) \times 8] \\ &= \frac{15}{2}[16 + 120 - 8] \\ &= \frac{15}{2} \times 128 = 15 \times 64 = 960 \end{aligned}$$

अतः, 8 के प्रथम 15 गुणजों का अभीष्ट योग = 960 है।

उत्तर

प्रश्न 27. 0 और 50 के बीच की विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

हल : 0 और 50 के बीच की विषम संख्याएँ हैं :

1, 3, 5, 7, 45, 47, 49.

जहाँ $a = 1, d = 3 - 1 = 2, a_n = 49$

$$\therefore a_n = a + (n - 1) \times d$$

$$\Rightarrow 49 = 1 + (n - 1) \times 2$$

$$\Rightarrow 49 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$$

$$\Rightarrow 2n = 49 + 1 = 50 \Rightarrow n = \frac{50}{2} = 25$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2} [a + a_n]$$

$$\Rightarrow S_{25} = \frac{25}{2} (1 + 49) = \frac{25}{2} \times 50 = 25 \times 25 = 625$$

अतः, 0 और 50 के बीच सभी विषम संख्याओं का योग 625 है।

उत्तर

प्रश्न 28. निर्माण कार्य से सम्बन्धित किसी ठेके में, एक निश्चित तिथि के बाद कार्य को विलम्ब से पूरा करने के लिए जुर्माना लगाने के प्रावधान इस प्रकार हैं : पहले दिन के लिए ₹ 200, दूसरे दिन के लिए ₹ 250, तीसरे दिन के लिए ₹ 300 इत्यादि अर्थात् प्रत्येक उत्तरोत्तर दिन का जुर्माना अपने से ठीक पहले दिन के जुर्माने से ₹ 50 अधिक है। एक ठेकेदार को जुर्माने के रूप में कितनी राशि अदा करनी पड़ेगी यदि वह इस कार्य में 30 दिन का विलम्ब कर देता है ?

हल : जुर्माने की राशि प्रतिदिन क्रमशः ₹ 200, ₹ 250, ₹ 300 है, जो एक AP का निर्माण करती है।

जहाँ $a = ₹ 200, d = ₹ 250 - ₹ 200 = ₹ 50$ एवं $n = 30$ दिन।

$$\therefore S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) \times d]$$

$$\Rightarrow S_{30} = \frac{30}{2} [2 \times 200 + (30 - 1) \times 50]$$

$$= 15[400 + 1500 - 50]$$

$$= 15[1900 - 50] = 15 \times 1850 = ₹ 27750$$

अतः, जुर्माने के रूप में कुल ₹ 27,750 राशि अदा करनी पड़ेगी।

उत्तर

प्रश्न 29. किसी स्कूल के विद्यार्थियों के उनके समग्र शैक्षिक प्रदर्शन के लिए 7 पुरस्कार देने के लिए ₹ 700 की राशि रखी गयी है। यदि प्रत्येक पुरस्कार अपने से ठीक पहले पुरस्कार से ₹ 20 कम है, तो प्रत्येक पुरस्कार का मान ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए प्रथम पुरस्कार ₹ a है तथा $d = -₹ 20, n = 7$ एवं $S_7 = ₹ 700$ (दिए हैं)

$$\therefore S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1) \times d]$$

$$\Rightarrow 700 = \frac{7}{2} [2 \times a + (7 - 1) \times (-20)]$$

$$\Rightarrow 1400 = 7[2a - 120]$$

$$\Rightarrow 1400 = 14a - 840$$

$$\Rightarrow 14a = 1400 + 840 = 2240$$

$$\Rightarrow a = \frac{2240}{14} = 160$$

$$a_2 = 160 - 20 = 140, a_3 = 140 - 20 = 120$$

$$a_4 = 120 - 20 = 100, a_5 = 100 - 20 = 80$$

$$a_6 = 80 - 20 = 60 \text{ एवं } a_7 = 60 - 20 = 40$$

अतः, अभीष्ट पुरस्कार क्रमशः ₹ 160, ₹ 140, ₹ 120, ₹ 100, ₹ 80, ₹ 60 एवं ₹ 40 है। उत्तर

प्रश्न 30. यदि किसी समान्तर श्रेढी (AP) के प्रथम 14 पदों का योग 1050 है तथा इसका प्रथम पद 10 है, तो 20वाँ पद ज्ञात कीजिए।

(2019)

हल : यहाँ $S_{14} = 1050$, $n = 14$, $a = 10$

चूँकि,

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

⇒

$$1050 = \frac{14}{2} [2 \times 10 + (14-1)d]$$

⇒

$$1050 = 7(20 + 13d)$$

⇒

$$150 = 20 + 13d$$

⇒

$$d = \frac{130}{13} = 10$$

अब, 20वाँ पद, $a_{20} = 10 + (20-1) \times 10 = 200$

उत्तर

दीर्घ उत्तरीय/विश्लेषणात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. किसी AP के चौथे और 8वें पदों का योग 24 है तथा छठे और 10वें पदों का योग 44 है। इस AP के प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए $a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$, समान्तर श्रेढी में हैं, तब प्रश्नानुसार,

∴

$$a_4 + a_8 = 24$$

⇒

$$(a+3d) + (a+7d) = 24$$

⇒

$$2a + 10d = 24 \Rightarrow a + 5d = 12 \quad \dots(1)$$

एवं

$$a_6 + a_{10} = 44$$

⇒

$$(a+5d) + (a+9d) = 44$$

⇒

$$2a + 14d = 44 \Rightarrow a + 7d = 22 \quad \dots(2)$$

⇒

$$2d = 10$$

[समीकरण (2) - (1) से]

⇒

$$d = \frac{10}{2} = 5$$

d का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$a + 5 \times 5 = 12 \Rightarrow a + 25 = 12 \Rightarrow a = 12 - 25 = -13$$

⇒

$$a_2 = a + d = -13 + 5 = -8$$

एवं

$$a_3 = a + 2d = -13 + 5 \times 2 = -13 + 10 = -3$$

अतः, दी हुई समान्तर श्रेढी के अभीष्ट प्रथम तीन पद हैं, क्रमशः $-13, -8$ एवं -3 . उत्तर

प्रश्न 2. दर्शाइए कि $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ एक AP बनाती है। यदि a_n नीचे दिए अनुसार परिभाषित हैं :

$$(i) a_n = 3 + 4n,$$

$$(ii) a_n = 9 - 5n.$$

साथ ही प्रत्येक स्थिति में प्रथम 15 पदों का योग भी ज्ञात कीजिए।

हल : (i) चूँकि

$$a_n = 3 + 4n \text{ (दिया है)}$$

⇒

$$a_1 = 3 + 4 \times 1 = 3 + 4 = 7$$

$$a_2 = 3 + 4 \times 2 = 3 + 8 = 11$$

$$a_3 = 3 + 4 \times 3 = 3 + 12 = 15$$

.....

.....

एवं

$$a_n = 3 + 4n$$

यहाँ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

$$= 7, 11, 15, \dots, (3 + 4n), \text{ एक AP है।}$$

जहाँ $a = 7$ एवं $d = 4$ (सामान्तर)

अतः, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ एक AP बनाती है, यदि $a_n = 3 + 4n$. इति सिद्धम्

अब AP के प्रथम पन्द्रह पदों का योग—

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \\ S_{15} &= \frac{15}{2} [2 \times 7 + (15-1)(4)] \\ &= \frac{15}{2} [14 + 14 \times 4] = \frac{15}{2} [14 + 56] \\ &= \frac{15}{2} [70] = 15 \times 35 = 525 \end{aligned}$$

अतः, AP के प्रथम 15 पदों का अभीष्ट योग = 525

उत्तर

(ii) चूँकि

⇒

$$\begin{aligned} a_n &= 9 - 5n \\ a_1 &= 9 - 5 \times 1 = 9 - 5 = 4 \\ a_2 &= 9 - 5 \times 2 = 9 - 10 = -1 \\ a_3 &= 9 - 5 \times 3 = 9 - 15 = -6 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

एवं

यहाँ, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

$= 4, -1, -6, \dots, (9 - 5n), \dots$ एक AP है। जहाँ $a = 4$ एवं $d = -5$.

अतः, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ एक AP बनाती हैं, यदि $a_n = 9 - 5n$. इति सिद्धम्

अब AP के प्रथम पन्द्रह पदों का योग—

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \\ S_{15} &= \frac{15}{2} [2 \times 4 + (15-1)(-5)] \\ &= \frac{15}{2} [8 + 14(-5)] = \frac{15}{2} [8 - 70] \\ &= \frac{15}{2} (-62) = 15(-31) = -465 \end{aligned}$$

अतः, AP के प्रथम 15 पदों का अभीष्ट योग = -465.

उत्तर

□

अध्याय 6

त्रिभुज [Triangles]

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. बहु-विकल्पीय प्रश्न

1. दो त्रिभुज समरूप होंगे, यदि :

- त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हों
- त्रिभुजों की संगत भुजाएँ आनुपातिक हों
- त्रिभुजों के संगत क्षेत्रफल बराबर हों
- त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हों तथा संगत भुजाएँ आनुपातिक हों।

2. कुछ त्रिभुजों की भुजाएँ नीचे दी गई हैं। इनमें से समकोण त्रिभुज नहीं है :
 (a) 7 सेमी, 24 सेमी, 25 सेमी (b) 5 सेमी, 8 सेमी, 11 सेमी
 (c) 5 सेमी, 12 सेमी, 13 सेमी (d) 3 सेमी, 4 सेमी, 5 सेमी।
3. ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि D भुजा BC का मध्यबिन्दु है। त्रिभुजों ABC और BDE के क्षेत्रफलों का अनुपात है— (2020)
 (a) 2 : 1 (b) 1 : 2 (c) 4 : 1 (d) 1 : 4.
4. दो समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ 4 : 9 के अनुपात में हैं। इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात है—
 (a) 2 : 3 (b) 4 : 9 (c) 81 : 16 (d) 16 : 81.
5. $\triangle ABC$ में $AB = 6\sqrt{3}$, $AC = 12$ cm और $BC = 6$ cm है, तो कोण B का मान है—
 (a) 120° (b) 60° (c) 90° (d) 45° .
- उत्तर—1. (d), 2. (b), 3. (c), 4. (d), 5. (c).

रिक्त स्थानों की पूर्ति

- सभी वृत्त होते हैं।
 - सभी वर्ग होते हैं। (2022)
 - सभी त्रिभुज समरूप होते हैं।
 - भुजाओं की समान संख्याओं वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं, यदि (a) उनके संगत कोण हों, तथा (b) उनकी संगत भुजाएँ हों। (2022)
 - सर्वांगसम त्रिभुज होते हैं।
- उत्तर—1. समरूप, 2. समरूप, 3. समबाहु, 4. (a) बराबर, (b) समानुपाती, 5. समरूप।

जोड़ी मिलाइए

- | स्तम्भ 'अ' | स्तम्भ 'ब' |
|--|----------------------|
| 1. $AC^2 = AB^2 + BC^2$ | (a) अपोलोनियस प्रमेय |
| 2. $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BD$ | (b) थेल्स प्रमेय |
| 3. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BD$ | (c) पाइथागोरस प्रमेय |
| 4. $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ | (d) अधिककोण प्रमेय |
| 5. आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय | (e) न्यूनकोण प्रमेय |
- उत्तर—1. →(c), 2. →(d), 3. →(e), 4. →(a), 5. →(b).

सत्य/असत्य कथन

- समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे बड़ी भुजा होती है।
 - यदि त्रिभुज की संगत भुजाएँ आनुपातिक हों, तो वे त्रिभुज समरूप नहीं होते हैं। (2022)
 - समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल सदैव बराबर होते हैं।
 - समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।
 - यदि दो त्रिभुज समकोणिक हों तो त्रिभुज समरूप होंगे।
 - यदि किसी त्रिभुज में एक भुजा के समानान्तर एक सरल रेखा खींची जाए, तो वह अन्य दोनों भुजाओं को समान अनुपात में विभक्त करती है। (2019)
 - सभी वर्ग समरूप होते हैं। (2019)
 - समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ आधार \times शीर्षलम्ब होता है। (2019)
- उत्तर—1. सत्य, 2. असत्य, 3. असत्य, 4. सत्य, 5. सत्य, 6. सत्य, 7. सत्य, 8. सत्य।

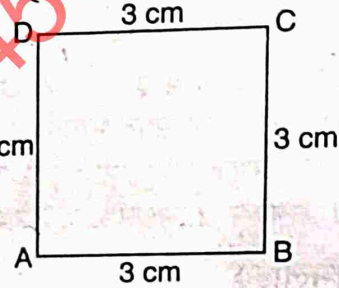
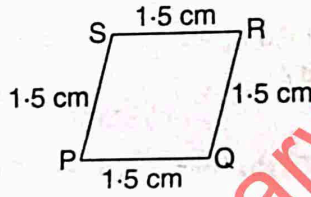
एक शब्द/वाक्य में उत्तर

1. एक त्रिभुज की एक भुजा के समानान्तर खींची गई रेखा अन्य दो भुजाओं को जिन दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है, वे बिन्दु उन भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करते हैं। यह प्रमेय किस नाम से जानी जाती है? (2022)
 2. समकोण त्रिभुज प्रमेय का नाम लिखिए।
 3. यदि किसी $\triangle ABC$ में $AD \perp BC$ एवं $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BD$ हो, तो यह प्रमेय किस नाम से जानी जाती है?
 4. यदि किसी $\triangle ABC$ में $AD \perp BC$ एवं $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BD$ हो, तो यह प्रमेय किस नाम से जानी जाती है?
 5. यदि किसी $\triangle ABC$ की माधिका AD हो, तब $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$, तो यह प्रमेय किस नाम से जानी जाती है?
- उत्तर—1. थेल्स प्रमेय, 2. पाइथागोरस प्रमेय, 3. अधिककोण त्रिभुज प्रमेय, 4. न्यूनकोण त्रिभुज प्रमेय, 5. अपोलोनियस प्रमेय।

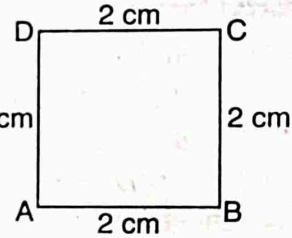
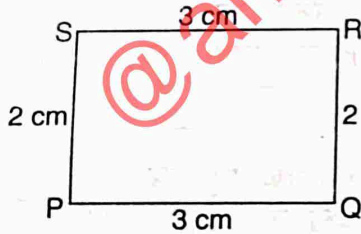
अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. बताइए कि निम्नलिखित आकृतियाँ समरूप हैं या नहीं ?

(2022)



(A)



(B)

आकृति : 6.1

उत्तर— (A) नहीं, (क्योंकि पहली आकृति एक समचतुर्भुज है जबकि दूसरी एक वर्ग है।)

(B) नहीं, (क्योंकि पहली आकृति एक आयत है जबकि दूसरी एक वर्ग है।)

प्रश्न 2. त्रिभुज PQR की भुजाओं PR और QR पर क्रमशः बिन्दु S और T इस प्रकार स्थित हैं कि $\angle P = \angle RTS$ है। दर्शाइए कि $\triangle RPQ \sim \triangle RTS$ ।

हल : मान लीजिए कि $\triangle PQR$ की भुजाओं PR और QR पर बिन्दु S और T इस प्रकार दिए हैं कि $\angle P = \angle RTS$

अब $\triangle RPQ$ और $\triangle RTS$ में,

$$\angle RPQ = \angle RTS$$

(दिया है)

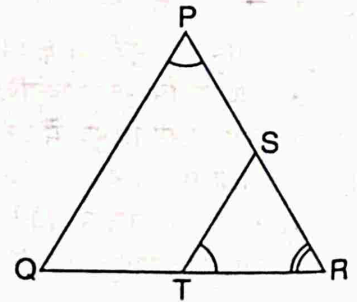
$$\angle QRP = \angle SRT$$

(चित्रानुसार उभयनिष्ठ है)

$$\Rightarrow \triangle RPQ \sim \triangle RTS$$

(AA समरूपता)

इति सिद्धम्



आकृति : 6.2

प्रश्न 3. एक त्रिभुज ABC की भुजाओं AB , BC एवं CA के मध्य-बिन्दु क्रमशः D , E एवं F हैं। $\triangle DEF$ और $\triangle ABC$ के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $\triangle ABC$ की भुजाओं AB , BC एवं CA के क्रमशः मध्य-बिन्दुओं D , E एवं F को मिलाने से $\triangle DEF$ बना है (देखिए संलग्न आकृति 6.3)।

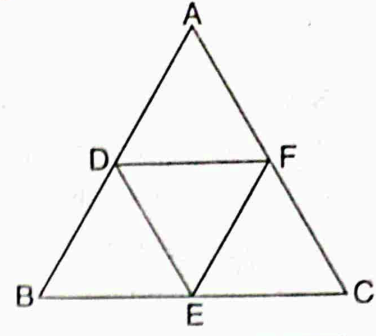
चूँकि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा के आधा होता है।

$$\Rightarrow \frac{DF}{BC} = \frac{DE}{AC} = \frac{EF}{AB} = \frac{1}{2} \quad \dots(1)$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

$$\Rightarrow \frac{\text{ar}(\triangle DEF)}{\text{ar}(\triangle ABC)} = \left(\frac{DF}{BC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \text{ar}(\triangle DEF) : \text{ar}(\triangle ABC) = 1 : 4$$



आकृति : 6.3

(SSS समरूपता)

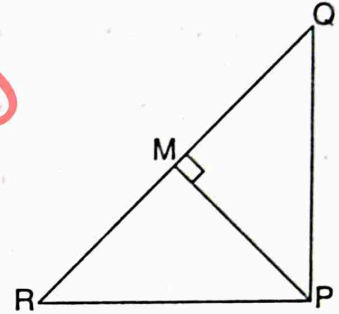
प्रश्न 4. PQR समकोण त्रिभुज है जिसका कोण P समकोण है तथा QR पर बिन्दु M इस प्रकार स्थित है कि $PM \perp QR$ है। दर्शाइए कि $PM^2 = QM \cdot MR$ है।

हल : दिया है : समकोण $\triangle PQR$ जिसका कोण P समकोण है। इसके समकोण वाले शीर्ष P से कर्ण QR पर लम्ब PM डाला गया है।

$$\Rightarrow \triangle PMR \sim \triangle QMP$$

$$\Rightarrow \frac{PM}{QM} = \frac{MR}{PM} \quad (\text{समरूप त्रिभुजों के प्रमाण})$$

$$\Rightarrow PM^2 = QM \cdot MR \quad \text{इति सिद्धम्}$$



आकृति : 6.4

प्रश्न 5. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है। सिद्ध कीजिए कि $AB^2 = 2AC^2$ है। (2019)

हल : $\triangle ABC$ एक दिया हुआ समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है, जहाँ $\angle C$ समकोण है, तथा

$$BC = AC \quad \dots(1)$$

$$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2 \quad (\text{पाइथागोरस प्रमेय से}) \dots(2)$$

$$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + AC^2 = 2AC^2 \quad [\text{समीकरण (1) एवं (2) से}]$$

इति सिद्धम्

प्रश्न 6. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AC = BC$ है। यदि $AB^2 = 2AC^2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि ABC एक समकोण त्रिभुज है।

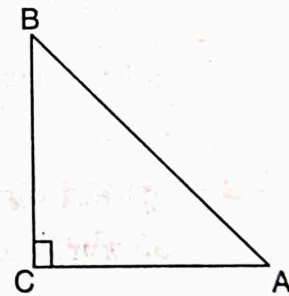
हल : $\therefore \triangle ABC$ में, $AC = BC$ एवं $AB^2 = 2AC^2$ दिए हुए हैं।

$$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 \quad (\because AC = BC)$$

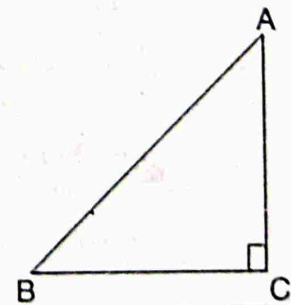
$$\Rightarrow \angle ACB \text{ एक समकोण है} \quad (\text{प्रमेय 6.9, पाइथागोरस प्रमेय का विलोम})$$

अतः, ABC एक समकोण त्रिभुज है।

इति सिद्धम्



आकृति : 6.5



आकृति : 6.6

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर अन्य दो भुजाओं को भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने के लिए एक रेखा खींची जाए, तो ये अन्य दो भुजाएँ एक ही अनुपात में विभाजित हो जाती हैं। (2022)

हल : जान है : $\triangle ABC$ में, $DE \parallel BC$, जो अन्य दो भुजाओं AB व AC को क्रमशः दो बिन्दुओं D व E पर प्रतिच्छेद करती है।

$$\text{सिद्ध करना है : } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

आकृति : 6.7

रचना : BL व CD रेखाखण्ड खींचें तथा $DM \perp AC$ व $EM \perp AB$ खींचें।

$$\text{उपपत्ति : } \triangle ADE \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} AD \times EN$$

$$\text{इसी प्रकार, } \triangle BDE \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} DB \times EN$$

$$\text{तथा, } \triangle ADE \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} AE \times DM$$

$$\text{तथा, } \triangle DEC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} EC \times DM$$

$$\text{अतः, } \frac{\triangle ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle BDE \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{\frac{1}{2} AD \times EN}{\frac{1}{2} DB \times EN} = \frac{AD}{DB} \quad \dots(1)$$

$$\text{तथा } \frac{\triangle ADE \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle DEC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{\frac{1}{2} AE \times DM}{\frac{1}{2} EC \times DM} = \frac{AE}{EC} \quad \dots(2)$$

यहाँ, $\triangle BDE$ और $\triangle DEC$ एक ही आधार DE तथा समान्तर रेखाओं BC और DE के मध्य बने दो त्रिभुज हैं।

$$\text{अतः } \triangle BDE \text{ का क्षेत्रफल} = \triangle DEC \text{ का क्षेत्रफल} \quad \dots(3)$$

इसलिए, समीकरण (1), (2) व (3) से,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

इति सिद्धम्

प्रश्न 2. यदि कोई रेखा एक $\triangle ABC$ की भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर प्रतिच्छेद करे तथा BC के समान्तर हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ होगा। (2022)

हल : दिया है : $DE \parallel BC$

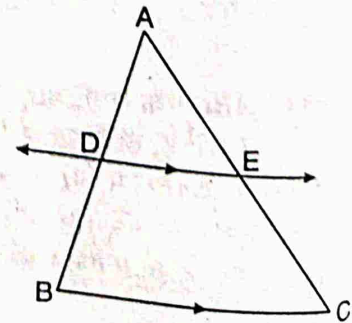
$$\text{अतः, } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad (\text{प्रमेय 6.1 से})$$

$$\Rightarrow \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

$$\Rightarrow \frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{DB + AD}{AD} = \frac{EC + AE}{AE}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad \text{इति सिद्धम्}$$



आकृति : 6.8

प्रश्न 3. संलग्न आकृति में यदि $LM \parallel CB$ और $LN \parallel CD$

हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ है।

हल : चूँकि ΔABC में, $LM \parallel CB$ (दिया है)
 $\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AL}{AC}$... (1)

और ΔACD में, $LN \parallel CD$ (दिया है)
 $\Rightarrow \frac{AN}{AD} = \frac{AL}{AC}$... (2)

$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ [समीकरण (1) एवं (2) से]

प्रश्न 4. संलग्न आकृति में $DE \parallel AC$ और $DF \parallel AE$ है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ है।

हल : चूँकि ΔBAC में, $DE \parallel AC$ (दिया है)
 $\Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{BD}{DA}$... (1)

चूँकि ΔBAE में, $DF \parallel AE$ (दिया है)
 $\Rightarrow \frac{BF}{FE} = \frac{BD}{DA}$... (2)

$\Rightarrow \frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ [समीकरण (1) एवं (2) से]

प्रश्न 5. संलग्न आकृति में $DE \parallel OQ$ और $DF \parallel OR$ है।

दर्शाइए कि $EF \parallel QR$ है।

हल : चूँकि ΔPQO में, $DE \parallel OQ$ (दिया है)
 $\Rightarrow \frac{PE}{EQ} = \frac{PD}{DO}$... (1)

और ΔPOR में, $DF \parallel OR$ (दिया है)
 $\Rightarrow \frac{PF}{FR} = \frac{PD}{DO}$... (2)

$\Rightarrow \frac{PE}{EQ} = \frac{PF}{FR}$ [समीकरण (1) एवं (2) से]

$\Rightarrow \Delta PQR$ की भुजाओं PQ एवं PR को EF क्रमशः E और F पर समानुपात में विभाजित कर रही है।
 $\Rightarrow EF \parallel QR$ इति सिद्धम्

प्रश्न 6. संलग्न आकृति में क्रमशः OP , OQ और OR पर स्थित बिन्दु A , B और C इस प्रकार हैं कि $AB \parallel PQ$ और $AC \parallel PR$ है। दर्शाइए कि $BC \parallel QR$ है।

हल : चूँकि ΔOPQ में, $AB \parallel PQ$ (दिया है)
 $\Rightarrow \frac{OB}{BQ} = \frac{OA}{AP}$... (1)

और ΔOPR में, $AC \parallel PR$ (दिया है)
 $\Rightarrow \frac{OC}{CR} = \frac{OA}{AP}$... (2)

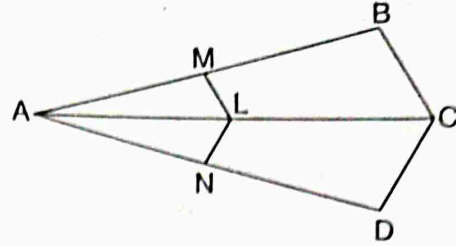
$\Rightarrow \frac{OB}{BQ} = \frac{OC}{CR}$
 $\Rightarrow \frac{OB}{BQ} = \frac{OC}{CR}$

[समीकरण (1) एवं (2) से]

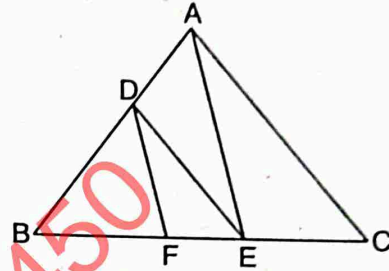
$\Rightarrow \Delta OQR$ की भुजाओं OQ एवं OR को BC क्रमशः B और C पर समानुपात में विभाजित कर रही है।

$\Rightarrow BC \parallel QR$

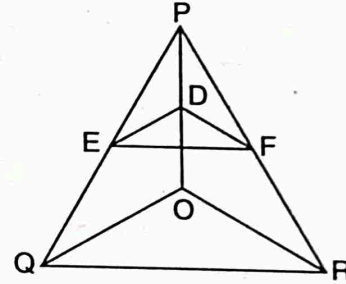
इति सिद्धम्



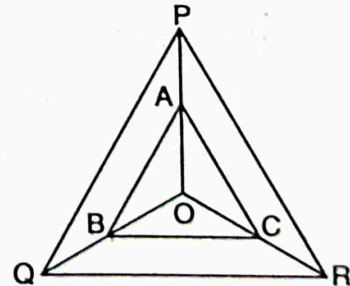
आकृति : 6.9



आकृति : 6.10



आकृति : 6.11



आकृति : 6.12

प्रश्न 7. आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य-बिन्दु से होकर दूसरी भुजा के समान्तर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।

हल : मान लीजिए ΔPQR एक दिया हुआ त्रिभुज है जिसकी भुजा PQ के मध्य-बिन्दु S से $ST \parallel QR$ एक रेखा खींची गई है जो PR को बिन्दु T पर प्रतिच्छेद करती है। (देखिए संलग्न आकृति 6.13)

चूँकि S, PQ का मध्य-बिन्दु दिया है।

$$\Rightarrow PS = SQ \Rightarrow \frac{PS}{SQ} = 1 \quad \dots(1)$$

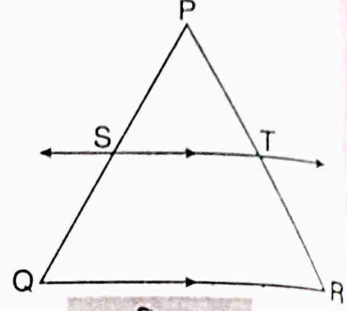
और ΔPQR में, $ST \parallel QR$

$$\Rightarrow \frac{PT}{TR} = \frac{PS}{SQ} \quad (\text{आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय से}) \quad \dots(2)$$

$$\Rightarrow \frac{PT}{TR} = \frac{PS}{SQ} = 1 \quad [\text{समीकरण (1) एवं (2) से}]$$

$\Rightarrow PT = TR \Rightarrow ST, PR$ को समद्विभाजित करती है।

अतः, किसी त्रिभुज में एक भुजा के मध्य-बिन्दु से दूसरी भुजा के समान्तर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है। इति सिद्धम्



आकृति : 6.13

प्रश्न 8. $ABCD$ एक समलम्ब है, जिसमें $AB \parallel DC$ है तथा इसके विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है।

हल : समलम्ब $\square ABCD$ में $AB \parallel DC$ एवं विकर्ण AC एवं BD बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। (देखिए संलग्न आकृति 6.14)

चूँकि $AB \parallel DC$ (दिया है) एवं AC तिर्यक रेखा है।

$$\Rightarrow \angle OAB = \angle OCD \quad (\text{एकान्तर कोण हैं}) \quad \dots(1)$$

चूँकि $AB \parallel DC$ (दिया है) एवं BD तिर्यक रेखा है।

$$\Rightarrow \angle OBA = \angle ODC \quad (\text{एकान्तर कोण हैं}) \quad \dots(2)$$

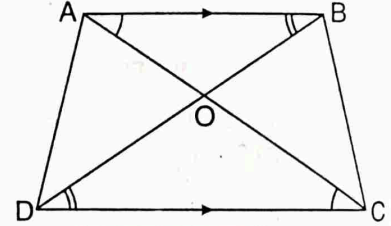
$$\text{चूँकि } \angle AOB = \angle DOC \quad (\text{शीर्षाभिमुख कोण हैं}) \quad \dots(3)$$

ΔAOB एवं ΔCOD के तीनों संगत कोण बराबर हैं।

$$\Rightarrow \Delta AOB \sim \Delta COD \quad [\text{समीकरण (1), (2) एवं (3) से}]$$

$$\Rightarrow \frac{BO}{DO} = \frac{AO}{CO} \Rightarrow \frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO} \quad (\text{AAA समरूपता})$$

इति सिद्धम्



आकृति : 6.14

प्रश्न 9. एक चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण परस्पर बिन्दु O पर

इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ है।

दर्शाइए कि $ABCD$ एक समलम्ब है।

हल : $ABCD$ एक चतुर्भुज दिया है, जिसके विकर्ण AC और BD परस्पर O बिन्दु पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि

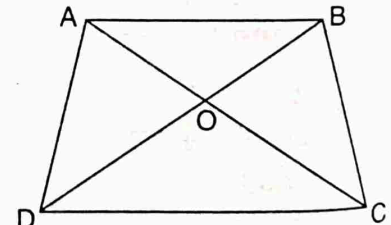
$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$$

त्रिभुज OAB एवं त्रिभुज OCD में,

$$\therefore \angle AOB = \angle COD \quad (\text{शीर्षाभिमुख कोण हैं})$$

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO} \quad (\text{दिया है}) \quad (\text{समानुपात में हैं})$$

(ये बराबर कोणों को अन्तर्गत करने वाली भुजाएँ हैं।)



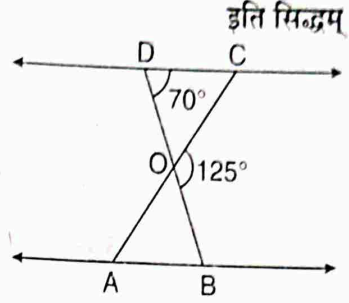
आकृति : 6.15

$\Rightarrow \Delta OAB \sim \Delta OCD$
 $\Rightarrow \angle OAB = \angle OCD$
 लेकिन ये एकान्तर कोण हैं।

(SAS समरूपता)
 (संगत कोण बराबर होते हैं।)

$\Rightarrow AB \parallel DC$
 अतः, ABCD एक समलम्ब है।

प्रश्न 10. संलग्न आकृति में $\Delta ODC \sim \Delta OBA$, $\angle BOC = 125^\circ$ और $\angle CDO = 70^\circ$ हैं। $\angle DOC$, $\angle DCO$ और $\angle OAB$ ज्ञात कीजिए।



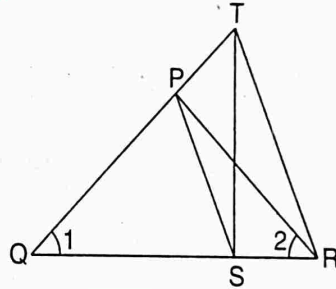
इति सिद्धम्

हल : $\because \angle DOC + \angle COB = 180^\circ$ (रैखिक युग्म हैं)
 $\therefore \angle DOC = 180^\circ - \angle COB$
 $= 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$
 $[\because \angle COB = 125^\circ \text{ (दिया है)}]$
 $\therefore \angle DCO + \angle CDO = \angle COB$

आकृति : 6.16

$\Rightarrow \angle DCO + 70^\circ = 125^\circ$ ($\because \angle CDO = 70^\circ$ एवं $\angle COB = 70^\circ$ दिए हैं)
 $\Rightarrow \angle DCO = 125^\circ - 70^\circ = 55^\circ$
 $\therefore \Delta ODC \sim \Delta OBA$ (दिया है)
 $\Rightarrow \angle OAB = \angle OCD = \angle DCO = 55^\circ$ (संगत कोण हैं)
 अतः, अभीष्ट $\angle DOC = 55^\circ$, $\angle DCO = 55^\circ$ एवं $\angle OAB = 55^\circ$ उत्तर

प्रश्न 11. संलग्न आकृति में, $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ हैं। दर्शाइए कि $\Delta PQS \sim \Delta TQR$.



हल : $\because \Delta PQR$ में, $\angle PQR = \angle PRQ$
 ($\because \angle Q = \angle 1$ एवं $\angle R = \angle 2$ एवं $\angle 1 = \angle 2$ दिया है)
 $\Rightarrow PQ = PR$... (1)
 (बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ हैं)
 $\therefore \frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ (दिया है) ... (2)
 $\Rightarrow \frac{QR}{QS} = \frac{QT}{QP}$ [समीकरण (1) एवं (2) से]
 $\Rightarrow \frac{QS}{QP} = \frac{QR}{QT}$... (3)

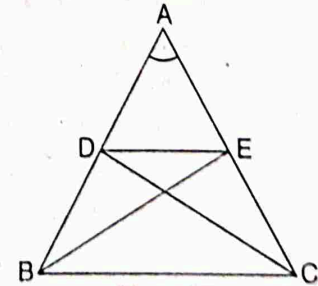
आकृति : 6.17

अब ΔPQS एवं ΔTQR में,

चूँकि $\angle PQS = \angle TQR = \angle Q$
 एवं $\frac{QS}{QP} = \frac{QR}{QT}$ [समीकरण (3) से]
 (जो कि उपरोक्त उभयनिष्ठ कोणों के अन्तर्गत करने वाली भुजाएँ हैं)
 $\Delta PQS \sim \Delta TQR$ (SAS समरूपता) इति सिद्धम्

प्रश्न 12. संलग्न आकृति में यदि $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ है, तो दर्शाइए कि $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

हल : $\because \Delta ABE \cong \Delta ACD$ (दिया है)
 $\Rightarrow AB = AC$ (CPCT) ... (1)
 एवं $AE = AD$ (CPCT) ... (2)
 $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$... (3)
 [समीकरण (1) एवं (2) से]



आकृति : 6.18

अब ΔADE और ΔABC में,
 $\therefore \angle DAE = \angle BAC$ (उभयनिष्ठ है)
 $\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$ (समीकरण (3) से)
 (ये भुजाएँ बराबर कोणों को अन्तर्गत करने वाली भुजाएँ हैं)
 $\Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$ (SAS समरूपता) इति सिद्धम्

प्रश्न 13. संलग्न आकृति में ABC और AMP दो समकोण त्रिभुज हैं जिनके कोण B और M समकोण हैं। सिद्ध कीजिए कि—

(i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

(ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$

हल : (i) ΔABC और ΔAMP में,

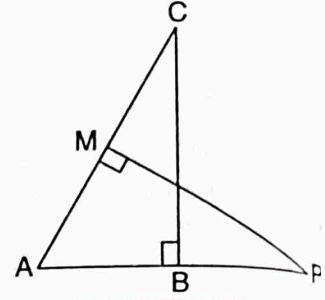
$\therefore \angle B = \angle M = 90^\circ$ (समकोण दिए हैं)

$\therefore \angle CAB = \angle PAM$ (चित्रानुसार उभयनिष्ठ हैं)

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta AMP$ (AA समरूपता से)

(ii) $\therefore \Delta ABC \sim \Delta AMP$

$\Rightarrow \frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$ (क्योंकि दो समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती होती हैं। इति सिद्धम्)



आकृति : 6.19

इति सिद्धम्
(सिद्ध कर चुके हैं)

प्रश्न 14. एक त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु D इस प्रकार स्थित है कि $\angle ADC = \angle BAC$ है। दर्शाइए कि $CA^2 = CB \cdot CD$ है।

हल : ΔABC की भुजा BC पर कोई बिन्दु D इस प्रकार दिया है कि :

$\angle ADC = \angle BAC$
(देखिए संलग्न आकृति 6.20)

ΔABC और ΔDAC में,

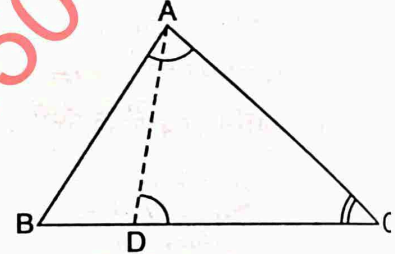
चूँकि $\angle BAC = \angle ADC$ (दिया है)

एवं $\angle ACB = \angle DCA$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DAC$

$\Rightarrow \frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CA}$

$\Rightarrow CA \cdot CA = CB \cdot CD \Rightarrow CA^2 = CB \cdot CD$



आकृति : 6.20

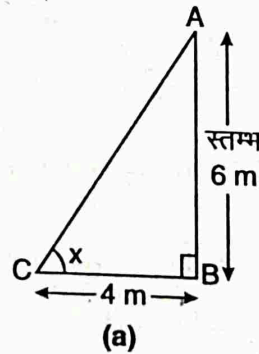
(उभयनिष्ठ हैं
(AA समरूपता

(समरूप त्रिभुजों के प्रगुण

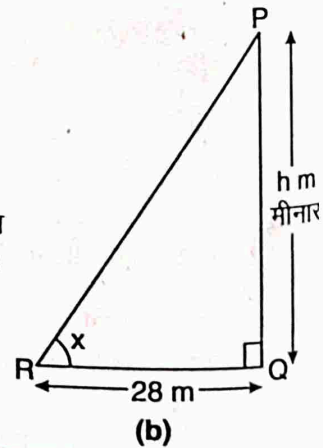
इति सिद्धम्

प्रश्न 15. लम्बाई 6 मीटर वाले एक स्तम्भ की भूमि पर छाया की लम्बाई 4 m है जबकि उसी समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 28 m है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। (2020)

हल : माना, $AB = 6$ m लम्बा एक स्तम्भ है जिसकी छाया BC को लम्बाई 4 m है एवं $\angle ABC = 90^\circ$ तथा $\angle C = x^\circ$ है। आकृति 6.21(a) एवं $PQ = h$ m (माना) कि मीनार की छाया QR की लम्बाई 28 m है एवं $\angle PQR = 90^\circ$ तथा $\angle R = x^\circ$ है।



(a)



(b)

आकृति : 6.21

$\angle C = \angle R = x^\circ$ (सूर्य का उन्नयन कोण) एवं $\angle B = \angle Q = 90^\circ$

$\Delta ABC = \Delta PQR$

(AA समरूपता

$\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$

(समरूप त्रिभुज के प्रगुण

$$\Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{h}{28}$$

$$\Rightarrow h = \frac{6}{4} \times 28 = 42 \text{ m}$$

प्रश्न 16. यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल समान हों, तो सिद्ध कीजिए कि वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।
उत्तर

हल : मान लीजिए

$$\triangle ABC - \triangle PQR$$

$$\Rightarrow \frac{\text{ar}(\triangle ABC)}{\text{ar}(\triangle PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$$

लेकिन

$$\text{ar}(\triangle ABC) = \text{ar}(\triangle PQR) = x \text{ वर्ग मात्रक।}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2 = \frac{x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow (AB)^2 = (PQ)^2, (BC)^2 = (QR)^2 \text{ एवं } (CA)^2 = (RP)^2$$

अब $\triangle ABC$ और $\triangle PQR$ में,

$$AB = PQ, BC = QR \text{ एवं } CA = RP \quad \dots(1)$$

\therefore

$$\Rightarrow AB = PQ, BC = QR \text{ एवं } CA = RP \quad [\text{समीकरण (1) से}]$$

$$\triangle ACB \cong \triangle PQR$$

(SSS सर्वांगसमता) इति सिद्धम्

प्रश्न 17. सिद्ध कीजिए कि एक समचतुर्भुज की भुजाओं के वर्गों का योग उसके विकर्णों के वर्गों के योग के बराबर होता है।

हल : मान लीजिए $ABCD$ एक समचतुर्भुज है, जिसके विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। हम जानते हैं कि समचतुर्भुज की चारों भुजाएँ बराबर होती हैं तथा उसके विकर्ण परस्पर एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं। एवं समचतुर्भुज को चार सर्वांगसम समकोण त्रिभुजों में बाँटते हैं।

अब समकोण त्रिभुज AOB में, $\angle AOB = 90^\circ$

$$\Rightarrow AB^2 = AO^2 + BO^2$$

(पाइथागोरस प्रमेय से)

$$= \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 \quad (\because AO = \frac{1}{2} AC \text{ एवं } BO = \frac{1}{2} BD)$$

$$\Rightarrow AB^2 = \frac{1}{4} AC^2 + \frac{1}{4} BD^2$$

$$\Rightarrow 4AB^2 = AC^2 + BD^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 \quad (\because AB = BC = CD = DA)$$

अतः, एक समचतुर्भुज की भुजाओं के वर्गों का योग उसके विकर्णों के वर्गों के योग के बराबर होता है।
इति सिद्धम्

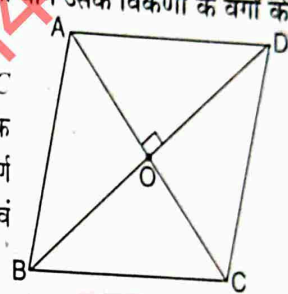
प्रश्न 18. एक त्रिभुज ABC जिसका कोण C समकोण है, की भुजाओं CA और CB पर क्रमशः बिन्दु D और E स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$ है।

हल : दिया है : ABC एक त्रिभुज जिसका $\angle C = 90^\circ$, इसकी भुजाओं CA एवं CB पर क्रमशः बिन्दु D और E स्थित हैं।

AE, BD एवं DE को मिलाया गया है।

चूँकि समकोण $\triangle ACE$ में, $\angle ACE$ समकोण है।

$$\Rightarrow AE^2 = AC^2 + EC^2 \quad (\text{पाइथागोरस प्रमेय से}) \dots(1)$$



आकृति : 6.22

समकोण $\triangle BCD$ में, $\angle BCD$ समकोण है।

$$\Rightarrow BD^2 = BC^2 + DC^2 \quad \dots(2)$$

(पाइथागोरस प्रमेय से)

$$\Rightarrow AE^2 + BD^2 = AC^2 + BC^2 + EC^2 + DC^2 \quad \dots(3)$$

[समीकरण (1) + (2) से]

समकोण $\triangle ACB$ में, $\angle ACB$ समकोण है।

$$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 \quad \dots(4)$$

(पाइथागोरस प्रमेय से)

समकोण $\triangle DCE$ में, $\angle DCE$ समकोण है।

$$\Rightarrow DE^2 = DC^2 + EC^2 \quad \dots(5)$$

$$\Rightarrow AB^2 + DE^2 = AC^2 + BC^2 + EC^2 + DC^2 \quad \text{[समीकरण (4) + (5) से]} \quad \dots(6)$$

$$\Rightarrow AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2 \quad \text{[समीकरण (3) एवं (6) से] इति सिद्धम्}$$

प्रश्न 19. किसी समबाहु त्रिभुज में सिद्ध कीजिए कि उसकी एक भुजा के वर्ग का तिगुना उसके एक शीर्ष लम्ब के वर्ग के चार गुने के बराबर होता है।

हल : मान लीजिए कि ABC एक समबाहु त्रिभुज है जिसका एक शीर्षलम्ब AD है जो BC को समद्विभाजित करता है

$$\Rightarrow BD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AB \quad \dots(1)$$

चूँकि समकोण त्रिभुज ADB में, $\angle ADB$ समकोण है

$$\Rightarrow AB^2 = AD^2 + BD^2 \quad \dots(2)$$

(पाइथागोरस प्रमेय से)

$$\Rightarrow AB^2 = AD^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

[समीकरण (1) एवं (2) से]

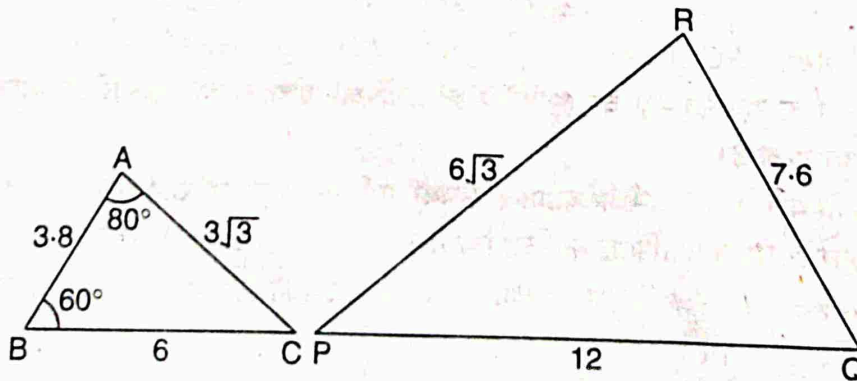
$$\Rightarrow AB^2 = AD^2 + \frac{AB^2}{4}$$

$$\Rightarrow 4AB^2 = 4AD^2 + AB^2$$

$$\Rightarrow 3AB^2 = 4AD^2$$

अतः, किसी समबाहु त्रिभुज में उसकी एक भुजा के वर्ग का तिगुना उसके एक शीर्षलम्ब के वर्ग के चार गुने के बराबर होता है।

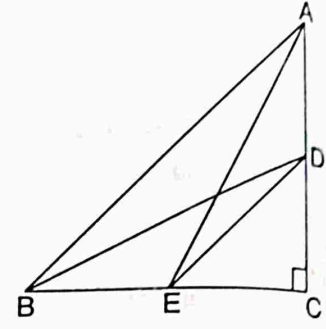
प्रश्न 20. आकृति 6.25 में $\angle P$ ज्ञात कीजिए।



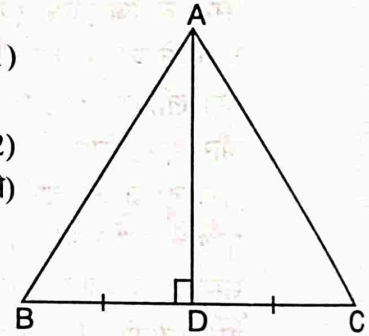
आकृति : 6.25

हल : $\triangle ABC$ एवं $\triangle PQR$ में,

$$\text{चूँकि } \frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{7.6} = \frac{1}{2}, \frac{BC}{QP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ एवं } \frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$



आकृति : 6.23



आकृति : 6.24

इति सिद्धम्
(2019)

$$\Rightarrow \frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta RQP \text{ (SSS समरूपता)}$$

$$\Rightarrow \angle A = \angle R, \angle B = \angle Q \text{ एवं } \angle C = \angle P \quad \dots(1)$$

अब, ΔABC में, $\angle C + 60^\circ + 80^\circ = 180^\circ$

$$\Rightarrow \angle C = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

$$\Rightarrow \angle P = \angle C = 40^\circ \quad \text{[समीकरण (1) से] उत्तर}$$

प्रश्न 21. समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा $2a$ है। उसके प्रत्येक शीर्षलम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

(2020)

हल : ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है जिसमें

$$AB = BC = CA = 2a$$

हम जानते हैं कि समबाहु त्रिभुजों के शीर्षलम्ब परस्पर बराबर होते हैं तथा सम्मुख भुजाओं को समद्विभाजित करते हैं।

समकोण त्रिभुज ADB में $\angle D$ समकोण है। ($AD \perp BC$)

तथा कर्ण $AB = 2a$ (दिया है)

$$BD = a \quad (BD = DC)$$

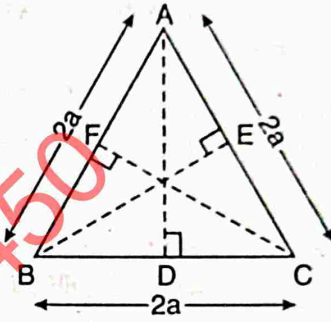
अब, समकोण ΔADB में ΔADB समकोण है।

$$\Rightarrow AD^2 = AB^2 - BD^2 \text{ (पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

$$\Rightarrow AD^2 = (2a)^2 - (a)^2$$

$$\Rightarrow AD^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3} \quad \text{उत्तर}$$



आकृति : 6.26

दीर्घ उत्तरीय/विश्लेषणात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. किसी ΔPQR की भुजाओं PQ और PR पर क्रमशः बिन्दु E और F स्थित हैं। निम्नलिखित में से प्रत्येक स्थिति के लिए बताइए कि क्या $EF \parallel QR$ है?

(i) $PE = 3.9 \text{ cm}$, $EQ = 3 \text{ cm}$, $PF = 3.6 \text{ cm}$ और $FR = 2.4 \text{ cm}$

(ii) $PE = 4 \text{ cm}$, $QE = 4.5 \text{ cm}$, $PF = 8 \text{ cm}$ और $RF = 9 \text{ cm}$

(iii) $PQ = 1.28 \text{ cm}$, $PR = 2.56 \text{ cm}$, $PE = 0.18 \text{ cm}$ और $PF = 0.36 \text{ cm}$.

हल : एक ΔPQR दिया है जिसकी भुजा PQ एवं PR पर क्रमशः E एवं F बिन्दु स्थित हैं। (देखिए संलग्न आकृति 6.27)

अब (i) :: $\frac{PE}{EQ} = \frac{3.9}{3} = 1.3$

एवं $\frac{PF}{FR} = \frac{3.6}{2.4} = 1.5$

$\Rightarrow \frac{PE}{EQ} \neq \frac{PF}{FR}$

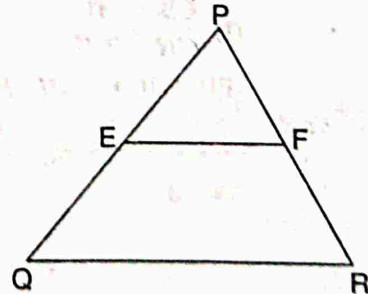
$\Rightarrow EF \nparallel QR$

(ii) :: $\frac{PE}{QE} = \frac{4}{4.5} = \frac{8}{9}$

एवं $\frac{PF}{RF} = \frac{8}{9}$

$\Rightarrow \frac{PE}{QE} = \frac{PF}{RF} = \frac{8}{9} \Rightarrow EF \parallel QR$

उत्तर



आकृति : 6.27

$$(iii) \therefore \frac{PE}{PQ} = \frac{0.18}{1.28} = \frac{18}{128} = \frac{9}{64}$$

$$\text{एवं} \quad \frac{PF}{PR} = \frac{0.36}{2.56} = \frac{36}{256} = \frac{9}{64}$$

$$\Rightarrow \frac{PE}{PQ} = \frac{PF}{PR} = \frac{9}{64} \Rightarrow EF \parallel QR$$

उत्तर

प्रश्न 2. संलग्न आकृति में शीर्षलम्ब AD और CE परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि

- (i) $\triangle AEP \sim \triangle CDP$
(ii) $\triangle ABD \sim \triangle CBE$
(iii) $\triangle AEP \sim \triangle ADB$
(iv) $\triangle PDC \sim \triangle BEC$.

हल :

$$\angle D = \angle E$$

[$\because AD \perp BC$ एवं $CE \perp AB$, (दिया है)]

(i) $\triangle AEP$ और $\triangle CDP$ में,

$$\therefore \angle E = \angle D$$

$$\therefore \angle APE = \angle CPD$$

$$\Rightarrow \triangle AEP \sim \triangle CDP$$

(ii) $\triangle ABD$ और $\triangle CBE$ में,

$$\therefore \angle ABD = \angle CBE$$

$$\therefore \angle D = \angle E$$

$$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle CBE$$

(iii) $\triangle AEP$ और $\triangle ADB$ में,

$$\therefore \angle EAP = \angle DAB$$

$$\therefore \angle E = \angle D$$

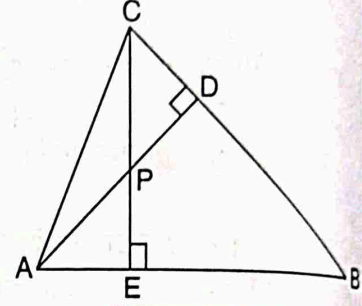
$$\Rightarrow \triangle AEP \sim \triangle ADB$$

(iv) $\triangle PDC$ और $\triangle BEC$ में,

$$\therefore \angle D = \angle E$$

$$\therefore \angle PCD = \angle BCE$$

$$\Rightarrow \triangle PDC \sim \triangle BEC$$



आकृति : 6.28

(दिया है)
(शीर्षाभिमुख कोण हैं)
(AA समरूपता से) इति सिद्धम्

(चित्रानुसार उभयनिष्ठ है)
(दिया है।)
(AA समरूपता से) इति सिद्धम्

(चित्रानुसार उभयनिष्ठ हैं)
(दिया है)
(AA समरूपता से) इति सिद्धम्

(दिया है)
(चित्रानुसार उभयनिष्ठ हैं)
(AA समरूपता से) इति सिद्धम्

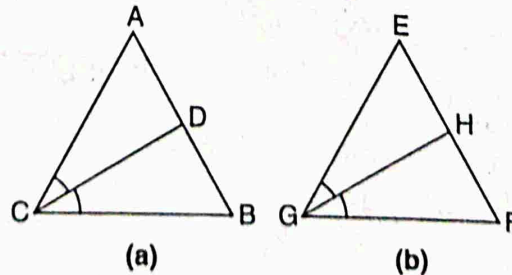
प्रश्न 3. CD और GH क्रमशः $\angle ACB$ और $\angle EGF$ के ऐसे समद्विभाजक हैं कि बिन्दु D और H क्रमशः $\triangle ABC$ और $\triangle FEG$ की भुजाओं AB और FE पर स्थित हैं। यदि $\triangle ABC \sim \triangle FEG$, तो दर्शाइए कि :

$$(i) \frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$$

$$(ii) \triangle DCB \sim \triangle HGE$$

$$(iii) \triangle DCA \sim \triangle HGF$$

हल : दिया है : $\triangle ABC \sim \triangle FEG$, CD एवं GH क्रमशः कोण $\angle ACB$ और $\angle EGF$ के ऐसे समद्विभाजक हैं कि D और H क्रमशः $\triangle ABC$ और $\triangle FEG$ की भुजाओं AB और FE पर स्थित हैं।



आकृति : 6.29

∴ $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ (दिया है)
 ⇒ $\angle A = \angle F, \angle B = \angle E$ एवं $\angle C = \angle G$... (1)
 तथा $\frac{AB}{FE} = \frac{BC}{EG} = \frac{CA}{GF}$ (समरूप त्रिभुजों के प्रगुण) ... (2)
 ∴ $\angle ACD = \angle BCD = \angle EGH = \angle FGH$... (3)
 (बराबर कोणों $\angle C$ एवं $\angle G$ के आधे हैं।)

(i) ΔACD और ΔFGH में,
 चूँकि $\angle A = \angle F$
 एवं $\angle ACD = \angle FGH$ [समीकरण (1) से]
 ⇒ $\Delta ACD \sim \Delta FGH$ [समीकरण (3) से]
 ⇒ $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$ (AA समरूपता)
 (समरूप त्रिभुजों के प्रगुण) इति सिद्धम्

(ii) ΔDCB और ΔHGE में,
 चूँकि $\angle B = \angle E$
 एवं $\angle BCD = \angle EGH$ [समीकरण (1) से]
 ⇒ $\Delta DCB \sim \Delta HGE$ [समीकरण (3) से]
 (AA समरूपता से) इति सिद्धम्

(iii) ΔDCA और ΔHGF में,
 चूँकि $\angle A = \angle F$
 एवं $\angle ACD = \angle FGH$ [समीकरण (1) से]
 ⇒ $\Delta DCA \sim \Delta HGF$ [समीकरण (3) से]
 (AA समरूपता से) इति सिद्धम्

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत माध्यिकाओं के अनुपात का वर्ग होता है।

हल : मान लीजिए कि दो समरूप $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ हैं, जिनकी संगत माध्यिका AD एवं PM हैं। (देखिए आकृति 6.30)

चूँकि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (दिया है)
 ⇒ $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q$
 एवं $\angle C = \angle R$... (1)

एवं $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$... (2)
 (समरूप त्रिभुजों के प्रगुण)

∴ $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{2BD}{2QM} = \frac{BD}{QM}$... (3)

(D, BC का एवं M, QR का मध्य-बिन्दु है)

अब ΔABD एवं ΔPQM में,
 ∴ $\angle B = \angle Q$ [समीकरण (1) से]

एवं $\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QM}$ [समीकरण (3) से]

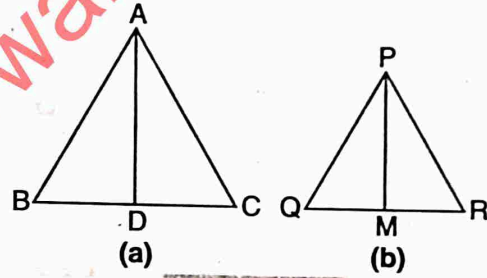
⇒ $\Delta ABD \sim \Delta PQM$ (SAS समरूपता)

⇒ $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ (समरूप त्रिभुजों के प्रगुण) ... (4)

अब ∴ $\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2$ (समरूप त्रिभुजों का क्षेत्रफल प्रगुण) ... (5)

⇒ $\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)} = \left(\frac{AD}{PM}\right)^2$ [समीकरण (4) एवं (5) से]

अतः, दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत माध्यिकाओं के अनुपात का वर्ग होता है। इति सिद्धम्



आकृति : 6.30

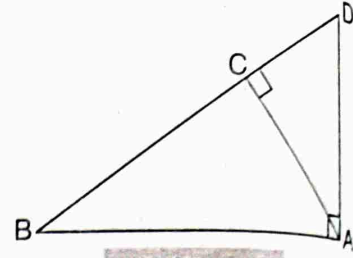
प्रश्न 5. संलग्न आकृति में ABD एक समकोण त्रिभुज है, जिसका कोण A समकोण है तथा $AC \perp BD$ है। दर्शाइए कि

(i) $AB^2 = BC \cdot BD$

(ii) $AC^2 = BC \cdot DC$

(iii) $AD^2 = BD \cdot CD$.

हल : समकोण त्रिभुज ABD में समकोण बनाने वाले शीर्ष A से BD पर लम्ब AC डाला गया है।



आकृति : 6.31

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \Delta ACB \sim \Delta DCA \sim \Delta DAB && \dots(1) \\ \text{(i) } \therefore & \Delta ACB \sim \Delta DAB && \text{[समीकरण (1) से]} \\ \Rightarrow & \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB} && \text{(समरूप त्रिभुजों के प्रगुण)} \\ \Rightarrow & AB^2 = BC \cdot BD && \text{इति सिद्धम्} \\ \text{(ii) } \therefore & \Delta ACB \sim \Delta DCA && \text{[समीकरण (1) से]} \\ \Rightarrow & \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC} && \text{(समरूप त्रिभुजों के प्रगुण)} \\ \Rightarrow & AC^2 = BC \cdot DC && \text{इति सिद्धम्} \\ \text{(iii) } & \Delta DCA \sim \Delta DAB && \text{[समीकरण (1) से]} \\ \Rightarrow & \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD} && \text{(समरूप त्रिभुजों के प्रगुण)} \\ \Rightarrow & AD^2 = BD \cdot CD && \text{इति सिद्धम्} \end{aligned}$$



निर्देशांक ज्यामिति [Co-ordinate Geometry]

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

बहु-विकल्पीय प्रश्न

- x -अक्ष से बिन्दु $P(2, 3)$ की दूरी है :
(a) 2 (b) 3 (c) 1 (d) 5.
- बिन्दु $A(0, 6)$ एवं $B(0, -2)$ के बीच दूरी है :
(a) 6 (b) 8 (c) 4 (d) 2.
- मूल-बिन्दु से बिन्दु $P(-6, 8)$ की दूरी है :
(a) 8 (b) $2\sqrt{7}$ (c) 10 (d) 6.

4. बिन्दु $(0, 5)$ एवं $(-5, 0)$ के बीच दूरी है :

(2022)

- (a) 5 (b) $5\sqrt{2}$ (c) $2\sqrt{5}$ (d) 2.

5. $AOBC$ एक आयत है जिसके तीन शीर्ष हैं $A(0, 3)$, $O(0, 0)$ एवं $B(5, 0)$; इसके विकर्ण की लम्बाई है :

- (a) 5 (b) 3 (c) $\sqrt{34}$ (d) 4.

उत्तर—1. (b), 2. (b), 3. (c), 4. (b), 5. (c).

रिक्त स्थानों की पूर्ति

1. किसी बिन्दु की y -अक्ष से दूरी कहलाती है।
2. किसी बिन्दु की x -अक्ष से दूरी कहलाती है।
3. $(0, y)$ एवं $(x, 0)$ के मध्य दूरी होती है।
4. $(2a, 0)$ एवं $(0, 2b)$ के मध्य-बिन्दु के निर्देशांक हैं।

उत्तर—1. x -निर्देशांक या भुज, 2. y -निर्देशांक या कोटि, 3. $\sqrt{x^2 + y^2}$, 4. (a, b) ।

जोड़ी मिलाइए

स्तम्भ 'अ'

स्तम्भ 'ब'

- | | |
|--|------------------------|
| 1. बिन्दु $(-4, 5)$ एवं $(4, -5)$ के मध्य-बिन्दु के निर्देशांक | (a) y |
| 2. $(0, 3)$ एवं $(4, 0)$ के बीच की दूरी | (b) x |
| 3. मूल बिन्दु से (x, y) के बीच की दूरी | (c) $(0, 0)$ |
| 4. $(0, y)$ बिन्दु की कोटि | (d) 5 |
| 5. $(x, 0)$ बिन्दु की भुज | (e) $\sqrt{x^2 + y^2}$ |

उत्तर—1. →(c), 2. →(d), 3. →(e), 4. →(a), 5. →(b).

सत्य/असत्य कथन

1. $(3, 0)$ एवं $(0, 4)$ के बीच की दूरी 5 इकाई होती है।
2. $(-4, 6)$ एवं $(4, -6)$ के मध्य-बिन्दु के निर्देशांक $(4, 6)$ हैं।
3. $(4, 0)$ एवं $(0, 3)$ के बीच दूरी 5 इकाई है।
4. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ शीर्ष वाले त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ हैं।
5. किसी बिन्दु की y -अक्ष से दूरी उस बिन्दु का y निर्देशांक कहलाती है। (2020)

उत्तर—1. सत्य, 2. असत्य, 3. सत्य, 4. सत्य, 5. असत्य।

एक शब्द/वाक्य में उत्तर

1. बिन्दु (x_1, y_1) एवं (x_2, y_2) के मध्य-बिन्दु के निर्देशांक लिखिए।
2. (x_1, y_1) एवं (x_2, y_2) के मध्य दूरी क्या होगी ?
3. (x_1, y_1) एवं (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा को $m_1 : m_2$ के अनुपात में अन्तः विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक लिखिए।
4. मूलबिन्दु से बिन्दु (x, y) के बीच दूरी क्या होगी ? (2022)

उत्तर-1. $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$, 2. $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$,
 3. $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$, 4. $\sqrt{x^2 + y^2}$.

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. बिन्दुओं के निम्नलिखित युग्मों के बीच दूरियाँ ज्ञात कीजिए :

(i) (2, 3), (4, 1) (2019) (ii) (-5, 7), (-1, 3) (iii) (a, b), (-a, -b).

हल : (i) मान लीजिए कि बिन्दु युग्म P (2, 3) एवं Q, (4, 1) हैं।

चूँकि दूरी = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

⇒ PQ = $\sqrt{(4 - 2)^2 + (1 - 3)^2}$

= $\sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ मात्रक

उत्तर

(ii) मान लीजिए बिन्दु युग्म P (-5, 7) और Q (-1, 3) हैं।

चूँकि दूरी = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

⇒ PQ = $\sqrt{(-1 + 5)^2 + (3 - 7)^2} = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2}$

= $\sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ मात्रक

उत्तर

(iii) मान लीजिए बिन्दु युग्म P (a, b) एवं Q (-a, -b) हैं।

चूँकि दूरी = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

⇒ PQ = $\sqrt{(-a - a)^2 + (-b - b)^2}$

= $\sqrt{(-2a)^2 + (-2b)^2}$

= $\sqrt{4a^2 + 4b^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ मात्रक

उत्तर

प्रश्न 2. बिन्दुओं (0, 0) और (36, 15) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए P (0, 0) और Q (36, 15) दो बिन्दु हैं।

(2020)

चूँकि दूरी = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

⇒ PQ = $\sqrt{(36 - 0)^2 + (15 - 0)^2}$

= $\sqrt{(36)^2 + (15)^2} = \sqrt{1296 + 225}$

= $\sqrt{1521} = 39$ मात्रक

उत्तर

प्रश्न 3. निर्धारित कीजिए कि क्या बिन्दु (1, 5), (2, 3) और (-2, -11) संरेखी हैं।

हल : मान लीजिए दिए हुए बिन्दु P (1, 5), Q (2, 3) और R (-2, -11) हैं।

अब PQ = $\sqrt{(2 - 1)^2 + (3 - 5)^2}$

= $\sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

QR = $\sqrt{(-2 - 2)^2 + (-11 - 3)^2}$

= $\sqrt{(-4)^2 + (-14)^2} = \sqrt{16 + 196} = \sqrt{212}$

एवं

$$RP = \sqrt{(1+2)^2 + (5+11)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (16)^2} = \sqrt{9 + 256} = \sqrt{265}$$

लेकिन $\sqrt{5} + \sqrt{212} \neq \sqrt{265}$

अतः, दिए हुए बिन्दु संरेख नहीं हैं।

प्रश्न 4. जाँच कीजिए कि क्या बिन्दु $(5, -2)$, $(6, 4)$ और $(7, -2)$ एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं। उत्तर

हल: मान लीजिए $A(5, -2)$, $B(6, 4)$ एवं $C(7, -2)$ हैं।

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(6-5)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{(1)^2 + (6)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

$$BC = \sqrt{(7-6)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{(1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

$$\text{एवं } CA = \sqrt{(5-7)^2 + (-2+2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{चूँकि } AB = BC = \sqrt{37}$$

अतः, दिए हुए बिन्दु एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

प्रश्न 5. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दुओं $A(1, -5)$ और $B(-4, 5)$ को मिलाने वाला इति सिद्धम्

रेखाखण्ड x -अक्ष से विभाजित होता है। इस विभाजन बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है: बिन्दु $A(1, -5)$ और $B(-4, 5)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड AB को x -अक्ष पर स्थित बिन्दु $P(x, 0)$ मान लीजिए $m_1 : m_2$ के अनुपात में विभाजित करता है।

$$\text{चूँकि } y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{m_1(5) + m_2(-5)}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow 5m_1 - 5m_2 = 0 \Rightarrow m_1 : m_2 = 1 : 1$$

उत्तर

$$\text{अब } x = \frac{1(-4) + 1(1)}{1+1} = \frac{-4+1}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$\Rightarrow P \text{ के निर्देशांक } \left(\frac{-3}{2}, 0 \right) \text{ हैं।}$$

उत्तर

प्रश्न 6. बिन्दु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जहाँ AB एक वृत्त का व्यास है जिसका केन्द्र $(2, -3)$ है तथा B के निर्देशांक $(1, 4)$ हैं। (2020)

हल: मान लीजिए बिन्दु A के निर्देशांक (x, y) हैं

$$\Rightarrow \frac{x+1}{2} = 2 \Rightarrow x+1 = 4 \Rightarrow x = 4-1 = 3$$

$$\text{एवं } \frac{y+4}{2} = -3 \Rightarrow y+4 = -6 \Rightarrow y = -6-4 = -10$$

अतः, A के अभीष्ट निर्देशांक $(3, -10)$ हैं।

उत्तर

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. x -अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो $(2, -5)$ और $(-2, 9)$ से समदूरस्थ है। (2020)

हल: मान लीजिए x -अक्ष पर स्थित बिन्दु $P(x, 0)$ है तथा दिए हुए बिन्दु $Q(2, -5)$ एवं $R(-2, 9)$ हैं।

तब प्रश्नानुसार: $PQ = PR$

$$\Rightarrow \sqrt{(2-x)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{(-2-x)^2 + (9-0)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(2-x)^2 + (-5)^2} = \sqrt{(-2-x)^2 + (9)^2}$$

$$\Rightarrow (2-x)^2 + (-5)^2 = (-2-x)^2 + (9)^2$$

$$\Rightarrow 4 - 4x + x^2 + 25 = 4 + 4x + x^2 + 81$$

(दोनों ओर वर्ग करने पर)

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4x + 4x &= 4 + 25 - 4 - 81 \\ \Rightarrow 8x &= -56 \\ \Rightarrow x &= \frac{-56}{8} = -7 \end{aligned}$$

अतः, x -अक्ष पर स्थित अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक $(-7, 0)$ हैं।

प्रश्न 2. y का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिन्दु $P(2, -3)$ और $Q(10, y)$ के बीच की दूरी 10 मात्रक है।

हल : चूँकि

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (\text{दूरी सूत्र})$$

$$\Rightarrow \sqrt{(10 - 2)^2 + (y + 3)^2} = 10$$

$$\Rightarrow (8)^2 + (y + 3)^2 = 100$$

$$\Rightarrow 64 + y^2 + 6y + 9 = 100$$

$$\Rightarrow y^2 + 6y + 73 - 100 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + 6y - 27 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + 9y - 3y - 27 = 0$$

$$\Rightarrow y(y + 9) - 3(y + 9) = 0$$

$$\Rightarrow (y + 9)(y - 3) = 0$$

या तो

$$y + 9 = 0 \Rightarrow y = -9$$

अथवा

$$y - 3 = 0 \Rightarrow y = +3$$

प्रश्न 3. यदि $Q(0, 1)$ बिन्दु $P(5, -3)$ और $R(x, 6)$ से समदूरस्थ है, तो x के मान ज्ञात कीजिए। दूरियाँ QR एवं PR भी ज्ञात कीजिए।

हल : \because प्रश्नानुसार, $QP = QR$

$$\Rightarrow \sqrt{(5 - 0)^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (6 - 1)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{x^2 + (5)^2}$$

$$\Rightarrow 25 + 16 = x^2 + 25$$

$$\Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

अब

$$QR = \sqrt{(x - 0)^2 + (6 - 1)^2} = \sqrt{x^2 + (5)^2}$$

$$= \sqrt{(\pm 4)^2 + (5)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

एवं

$$PR = \sqrt{(x - 5)^2 + (6 + 3)^2} = \sqrt{(x - 5)^2 + (9)^2}$$

\Rightarrow

$$PR = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 81} = \sqrt{x^2 - 10x + 106}$$

जब $x = +4$ तब

$$PR = \sqrt{(4)^2 - 10(4) + 106} = \sqrt{16 - 40 + 106} = \sqrt{82}$$

और जब $x = -4$ तब

$$PR = \sqrt{(-4)^2 - 10(-4) + 106}$$

$$= \sqrt{16 + 40 + 106} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$$

प्रश्न 4. x और y में एक ऐसा सम्बन्ध ज्ञात कीजिए कि बिन्दु (x, y) बिन्दुओं $(3, 6)$ और $(-3, 4)$ से समदूरस्थ हो।

हल : मान लीजिए $P(x, y)$, $Q(3, 6)$ एवं $R(-3, 4)$ है तो प्रश्नानुसार $PQ = PR$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 6)^2} = \sqrt{(x + 3)^2 + (y - 4)^2}$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = (x + 3)^2 + (y - 4)^2 \quad (\text{दोनों ओर वर्ग करने पर})$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 = x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16$$

$$\Rightarrow 6x + 6x + 12y - 8y + 25 - 45 = 0$$

$$\Rightarrow 12x + 4y - 20 = 0$$

$$\Rightarrow 3x + y - 5 = 0$$

उत्तर

प्रश्न 5. बिन्दुओं $(5, -6)$ और $(-1, -4)$ को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को y -अक्ष किस अनुपात में विभाजित करती है? प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए। (2019)

हल: माना, अभीष्ट अनुपात $k : 1$ है। तब, विभाजन सूत्र द्वारा, उस रेखाखण्ड को $k : 1$ के अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक $\left(\frac{-k+5}{k+1}, \frac{-4k-6}{k+1}\right)$ चूँकि, यह बिन्दु y -अक्ष पर स्थित है। इसलिए, y -अक्ष पर भुज = 0.

$$\text{अतः, } \frac{-k+5}{k+1} = 0 \Rightarrow k=5$$

$$\therefore \text{अभीष्ट अनुपात} = k : 1 = 5 : 1$$

उत्तर

$$\text{साथ ही, अभीष्ट प्रतिच्छेद बिन्दु (जबकि } k=5): \left(\frac{-5+5}{5+1}, \frac{-4 \times 5 - 6}{5+1}\right) \\ = \left(0, -\frac{13}{3}\right)$$

उत्तर

प्रश्न 6. यदि बिन्दु $A(6, 1)$, $B(8, 2)$, $C(9, 4)$ और $D(P, 3)$ एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष इसी क्रम में हों, तो P का मान ज्ञात कीजिए। (2022)

हल: चूँकि, समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

\therefore विकर्ण AC के मध्य बिन्दु के निर्देशांक = विकर्ण BD के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$\Rightarrow \left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+P}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+P}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{15}{2} = \frac{8+P}{2}$$

$$\Rightarrow P=7$$

उत्तर

दीर्घ उत्तरीय/विश्लेषणात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(-1, 7)$ और $(4, -3)$ को मिलाने वाली रेखाखण्ड को $2 : 3$ के अनुपात में विभाजित करता है। (2022)

हल: यहाँ $x_1 = -1, y_1 = 7, x_2 = 4, y_2 = -3, m_1 = 2, m_2 = 3$

$$\text{चूँकि } x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} = \frac{2 \times 4 + 3(-1)}{2+3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{8-3}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\text{एवं } y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} = \frac{2 \times (-3) + 3(7)}{2+3}$$

$$= \frac{-6+21}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

अतः, अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक = $(1, 3)$

उत्तर

प्रश्न 2. यदि A और B क्रमशः $(-2, -2)$ और $(2, -4)$ हों, तो बिन्दु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए

ताकि $AP = \frac{3}{7} AB$ हो और P रेखाखण्ड AB पर स्थित हो।

हल: चूँकि $AP = \frac{3}{7} AB$ तथा बिन्दु P रेखाखण्ड AB पर है

$$\Rightarrow BP = AB - \frac{3}{7} AB = \frac{4}{7} AB$$

⇒ बिन्दु P रेखाखण्ड AB को $3 : 4$ के अनुपात में विभाजित करता है तथा $A(-2, -2)$ और $B(2, -4)$ दिए हैं।

मान लीजिए P के निर्देशांक (x, y) हैं

$$x = \frac{3(2) + 4(-2)}{3+4} = \frac{6-8}{7} = \frac{-2}{7}$$

एवं

$$y = \frac{3(-4) + 4(-2)}{3+4} = \frac{-12-8}{7} = \frac{-20}{7}$$

अतः, P के अभीष्ट निर्देशांक $\left(\frac{-2}{7}, \frac{-20}{7}\right)$ हैं।

उत्तर

प्रश्न 3. एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष क्रम में $(3, 0)$, $(4, 5)$, $(-1, 4)$ और $(-2, -1)$ हैं।

हल : मान लीजिए समचतुर्भुज के शीर्ष क्रमशः $A(3, 0)$, $B(4, 5)$, $C(-1, 4)$ और $D(-2, -1)$ दिए हुए हैं।

$$\Rightarrow AC = \sqrt{(-1-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (4)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2} \text{ मात्रक}$$

$$\text{एवं } BD = \sqrt{(-2-4)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2} \text{ मात्रक}$$

$$\text{चूँकि समचतुर्भुज } ABCD \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times AC \times BD$$

$$ar(ABCD) = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} = 4 \times 6 = 24 \text{ वर्ग मात्रक उत्तर}$$

□

अध्याय

त्रिकोणमिति का परिचय [Introduction to Trigonometry]

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

बहु-विकल्पीय प्रश्न

1. $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} = \dots\dots$

(a) $\sin 60^\circ$

(b) $\cos 60^\circ$

(c) $\tan 60^\circ$

(d) $\sin 30^\circ$

2. $\frac{1 - \tan^2 45^\circ}{1 + \tan^2 45^\circ} = \dots\dots$

(a) $\tan 90^\circ$

(b) 1

(c) $\sin 45^\circ$

(d) 0.

3. $\sin 2A = 2 \sin A$ तब सत्य होता है जबकि A बराबर है :

(a) 0°

(b) 30°

(c) 45°

(d) 60° .

4. $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ}$ बराबर है :

(a) $\cos 60^\circ$

(b) $\sin 60^\circ$

(c) $\tan 60^\circ$

(d) $\sin 30^\circ$.

5. $9 \sec^2 A - 9 \tan^2 A$ बराबर है :

- (a) 1 (b) 9

(c) 8

6. $(1 + \tan \theta + \sec \theta)(1 + \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta)$ बराबर है :

- (a) 0 (b) 1

(d) 0.

7. $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$ बराबर है :

- (a) $\sec A$ (b) $\sin A$

(c) 2

(d) -1.

8. $\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}$ बराबर है :

- (a) $\sec^2 A$ (b) -1

(c) $\operatorname{cosec} A$

(d) $\cos A$.

उत्तर-1. (a), 2. (d), 3. (a), 4. (c), 5. (b), 6. (c), 7. (d), 8. (d).

(d) $\tan^2 A$.

रिक्त स्थानों की पूर्ति

1. $\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ का मान होगा।

2. $\frac{\cot 59^\circ}{\tan 31^\circ}$ का मान होगा।

3. $(\operatorname{cosec} 90^\circ - \theta)$ का मान होगा।

4. $\sqrt{\sec^2 \theta - 1}$ का मान होगा।

5. $1 + \tan^2 \theta = \dots\dots\dots$

6. $\sec(90^\circ - \theta)$ का मान होता है।

उत्तर-1. $\sin \theta$, 2. 1, 3. $\sec \theta$, 4. $\tan \theta$, 5. $\sec^2 \theta$, 6. $\operatorname{cosec} \theta$.

जोड़ी मिलाइए

I. स्तम्भ 'अ'

1. $\sin 30^\circ$
2. $\sqrt{\sec^2 \theta - 1}$
3. $\sin 55^\circ - \cos 35^\circ$
4. $\frac{\sec \theta}{\tan \theta}$
5. $\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sin \theta}$

स्तम्भ 'ब'

- (a) 0
- (b) $\operatorname{cosec} \theta$
- (c) $\cot \theta$
- (d) $\cos 60^\circ$
- (e) $\tan \theta$

II. स्तम्भ 'अ'

1. $1 + \cot^2 \theta$ (2019)
2. $\sec \theta$ (2019)
3. $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ (2019)
4. $\tan 60^\circ$ (2019)
5. $\cos(90^\circ - \theta)$ (2019)

स्तम्भ 'ब'

- (a) $\sqrt{3}$
- (b) $\sin \theta$
- (c) $\operatorname{cosec}^2 \theta$
- (d) $\frac{1}{\cos \theta}$
- (e) 1

III. स्तम्भ 'अ'

1. $\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)$ (2020)
2. $\sqrt{\sec^2 \theta - \tan^2 \theta}$ (2020)
3. $\sin 0^\circ$ (2020, 22)
4. $\tan \theta$ (2020)
5. $\cos 45^\circ$ (2020)

स्तम्भ 'ब'

- (a) 0
- (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- (c) $\sec \theta$
- (d) 1
- (e) $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

IV. स्तम्भ 'अ'

1. $\sec(90^\circ - \theta)$ (2022)
2. $\cos \theta$ (2022)
3. $\cos 0^\circ$ (2022)
4. $\sqrt{1 + \tan^2 \theta}$ (2022)
5. $\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ (2022)

स्तम्भ 'ब'

- (a) $1/\sec \theta$
- (b) $\sin \theta$
- (c) 1
- (d) $\operatorname{cosec} \theta$
- (e) $\sec \theta$

उत्तर—I. 1.→(d), 2.→(e), 3.→(a), 4.→(b) 5.→(c).

II. 1.→(c), 2.→(d), 3.→(e), 4.→(a) 5.→(b).

III. 1.→(c), 2.→(d), 3.→(a), 4.→(e) 5.→(b).

IV. 1.→(d), 2.→(a), 3.→(c), 4.→(e) 5.→(b).

सत्य/असत्य कथन

1. $\tan A$ का मान सदैव 1 से कम होता है।
2. कोण A के किसी मान के लिए $\sec A = \frac{12}{5}$.
3. $\cos A$, कोण A के cosecant के लिए प्रयुक्त एक संक्षिप्त रूप है।
4. $\cot A$, \cot और A का गुणनफल होता है।
5. किसी भी कोण θ के लिए $\sin \theta = \frac{4}{3}$.
6. $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$.
7. θ में वृद्धि होने के साथ $\sin \theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।
8. θ में वृद्धि होने के साथ $\cos \theta$ के मान में भी वृद्धि होती है।
9. θ के सभी मानों पर $\sin \theta = \cos \theta$.
10. $A = 0^\circ$ पर $\cot A$ परिभाषित नहीं है।

उत्तर—1. असत्य, 2. सत्य, 3. असत्य, 4. असत्य, 5. असत्य, 6. असत्य, 7. सत्य, 8. असत्य, 9. असत्य, 10. सत्य।

एक शब्द/वाक्य में उत्तर

1. $1 + \tan^2 \theta$ का मान लिखिए।
2. $1 + \cot^2 \theta$ का मान लिखिए।
3. $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ का मान लिखिए।
4. $\cos 0^\circ$ का मान लिखिए।
5. $\sin(90^\circ - \theta)$ का मान लिखिए।

उत्तर—1. $\sec^2 \theta$, 2. $\operatorname{cosec}^2 \theta$, 3. 1 (एक), 4. 1 (एक), 5. $\cos \theta$.

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. संलग्न आकृति में $\tan P - \cot R$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\because \Delta PQR$ में $\angle Q$ समकोण है,

$$\Rightarrow QR^2 = PR^2 - PQ^2$$

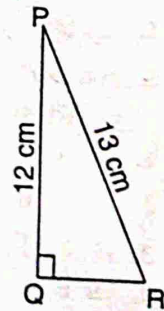
$$= (13)^2 - (12)^2 = 169 - 144 = 25$$

$$\Rightarrow QR = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{अब } \tan P - \cot R = \frac{QR}{PQ} - \frac{QR}{PQ}$$

$$= \frac{5}{12} - \frac{5}{12} = 0$$

उत्तर



आकृति : 8.1

प्रश्न 2. यदि $\angle A$ और $\angle B$ न्यूनकोण हों, जहाँ $\cos A = \cos B$, तो दिखाइए $\angle A = \angle B$.

हल : ACB एक समकोण त्रिभुज है, जहाँ $\angle A$ और $\angle B$ न्यूनकोण हैं।

चूँकि

$$\cos A = \cos B \text{ (दिया है)}$$

\Rightarrow

$$\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB}$$

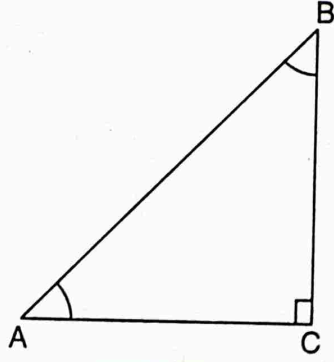
\Rightarrow

$$BC = AC$$

\Rightarrow

$$\angle A = \angle B$$

(बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण हैं) इति सिद्धम्



आकृति : 8.2

प्रश्न 3. $\cot \theta = \frac{7}{8}$ तो $\frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}$ का मान निकालिए।

हल : (i)

$$\frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} = \frac{1 - \sin^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)^2 = (\cot \theta)^2$$

$$= \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$$

[क्योंकि $\cot \theta = \frac{7}{8}$, (दिया है)]

उत्तर

प्रश्न 4. निम्न के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ$

(2019)

(ii) $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

(2019)

हल : (i) $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

उत्तर

(ii) $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

$$= 2(1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= 2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 2$$

उत्तर

प्रश्न 5. निम्नलिखित के मान निकालिए :

(i) $\frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ}$

(ii) $\frac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ}$

(iii) $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ$

(iv) $\operatorname{cosec} 31^\circ - \sec 59^\circ$

हल : (i) $\frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ} = \frac{\sin (90^\circ - 72^\circ)}{\cos 72^\circ} = \frac{\cos 72^\circ}{\cos 72^\circ} = 1$

उत्तर

(ii) $\frac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ} = \frac{\tan (90^\circ - 64^\circ)}{\cot 64^\circ} = \frac{\cot 64^\circ}{\cot 64^\circ} = 1$

उत्तर

(iii) $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ = \cos (90^\circ - 42^\circ) - \sin 42^\circ = \sin 42^\circ - \sin 42^\circ = 0$

उत्तर

(iv) $\operatorname{cosec} 31^\circ - \sec 59^\circ = \operatorname{cosec} (90^\circ - 59^\circ) - \sec 59^\circ$
 $= \sec 59^\circ - \sec 59^\circ = 0$

उत्तर

प्रश्न 6. दिखाइए कि :

(i) $\tan 48^\circ \cdot \tan 23^\circ \cdot \tan 42^\circ \cdot \tan 67^\circ = 1$

(ii) $\cos 38^\circ \cdot \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \cdot \sin 52^\circ = 0$

हल : (i)

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \tan 48^\circ \cdot \tan 23^\circ \cdot \tan 42^\circ \cdot \tan 67^\circ \\ &= \tan (90^\circ - 42^\circ) \cdot \tan 23^\circ \cdot \tan 42^\circ \cdot \tan (90^\circ - 23^\circ) \\ &= \cot 42^\circ \cdot \tan 23^\circ \cdot \tan 42^\circ \cdot \cot 23^\circ \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{L.H.S.} = \frac{\cos 42^\circ \sin 23^\circ \sin 42^\circ \cos 23^\circ}{\sin 42^\circ \cos 23^\circ \cos 42^\circ \sin 23^\circ} = 1$$

$$= \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

$$(ii) \text{L.H.S.} = \cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ$$

$$= \cos 38^\circ \cos (90^\circ - 38^\circ) - \sin 38^\circ \sin (90^\circ - 38^\circ)$$

$$= \cos 38^\circ \sin 38^\circ - \sin 38^\circ \cos 38^\circ$$

$$= \cos 38^\circ \sin 38^\circ - \cos 38^\circ \sin 38^\circ = 0$$

$$= \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

प्रश्न 7. यदि $\tan 2A = \cot (A - 18^\circ)$, जहाँ $2A$ एक न्यूनकोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि

$$\tan 2A = \cot (A - 18^\circ)$$

(दिया हुआ है)

$$\Rightarrow \cot (90^\circ - 2A) = \cot (A - 18^\circ)$$

$$\Rightarrow 90^\circ - 2A = A - 18^\circ$$

$$\Rightarrow 3A = 90^\circ + 18^\circ = 108^\circ \Rightarrow A = \frac{108^\circ}{3} = 36^\circ$$

उत्तर

प्रश्न 8. यदि $\tan A = \cot B$, तो सिद्ध कीजिए कि $A + B = 90^\circ$.

(2020)

हल : चूँकि

$$\tan A = \cot B$$

(दिया है)

$$\Rightarrow \tan A = \tan (90^\circ - B)$$

$$\Rightarrow A = 90^\circ - B$$

$$\Rightarrow A + B = 90^\circ$$

इति सिद्धम्

प्रश्न 9. यदि $\sec 4A = \operatorname{cosec} (A - 20^\circ)$, जहाँ $4A$ एक न्यूनकोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि

$$\sec 4A = \operatorname{cosec} (A - 20^\circ)$$

(दिया है)

$$\Rightarrow \operatorname{cosec} (90^\circ - 4A) = \operatorname{cosec} (A - 20^\circ)$$

$$\Rightarrow 90^\circ - 4A = A - 20^\circ$$

$$\Rightarrow 4A + A = 90^\circ + 20^\circ$$

$$\Rightarrow 5A = 110^\circ \Rightarrow A = \frac{110^\circ}{5} = 22^\circ$$

उत्तर

प्रश्न 10. यदि A, B और C त्रिभुज ABC के अन्तः कोण हों, तो दिखाइए कि

(2020)

$$\sin \left(\frac{B+C}{2} \right) = \cos \frac{A}{2}$$

हल : चूँकि

$$A + B + C = 180^\circ$$

(त्रिभुज के अन्तःकोण हैं)

$$\Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{B+C}{2} = \left(90^\circ - \frac{A}{2} \right)$$

$$\text{L.H.S.} = \sin \left(\frac{B+C}{2} \right) = \sin \left(90^\circ - \frac{A}{2} \right)$$

$$= \cos \frac{A}{2} = \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

प्रश्न 11. $\sin 67^\circ + \cos 75^\circ$ को 0° और 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल :

$$\sin 67^\circ + \cos 75^\circ = \sin (90^\circ - 23^\circ) + \cos (90^\circ - 15^\circ)$$

$$= \cos 23^\circ + \sin 15^\circ$$

अतः, अभीष्ट त्रिकोणमितीय अनुपात के पद $\cos 23^\circ + \sin 15^\circ$.

उत्तर

प्रश्न 12. मान निकालिए :

$$(i) \frac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ}$$

$$(ii) \sin 25^\circ \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \sin 65^\circ.$$

$$\text{हल : (i) } \frac{\sin^2 63^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 73^\circ}$$

$$= \frac{\sin^2 (90^\circ - 27^\circ) + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \cos^2 (90^\circ - 17^\circ)}$$

$$= \frac{\cos^2 27^\circ + \sin^2 27^\circ}{\cos^2 17^\circ + \sin^2 17^\circ} = \frac{1}{1} = 1 \quad [\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{ (सर्वसमिका)}]$$

उत्तर

(ii) $\sin 25^\circ \cdot \cos 65^\circ + \cos 25^\circ \cdot \sin 65^\circ$

$$= \sin 25^\circ \cdot \cos (90^\circ - 25^\circ) + \cos 25^\circ \cdot \sin (90^\circ - 25^\circ)$$

$$= \sin 25^\circ \cdot \sin 25^\circ + \cos 25^\circ \cdot \cos 25^\circ$$

$$= \sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ = 1 \quad [\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ (सर्वसमिका)}]$$

उत्तर

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. $\triangle ABC$ में, जिसका कोण B समकोण है, $AB = 24$ cm और $BC = 7$ cm है। निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

- (i) $\sin A, \cos A,$ (ii) $\sin C, \cos C.$

हल : \because समकोण $\triangle ABC$ में, $\angle B =$ समकोण

$$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= (24)^2 + (7)^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = 576 + 49$$

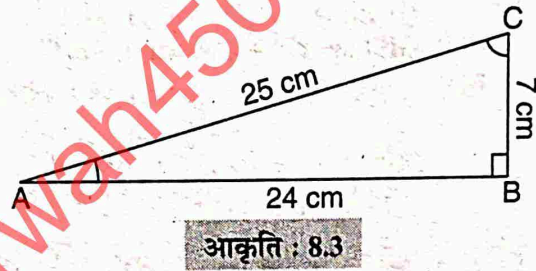
$$= 625$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{625} = 25$$

(i) अब $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$

एवं $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$

(ii) $\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$ एवं $\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$



उत्तर

उत्तर

प्रश्न 2. यदि $\sin A = \frac{3}{4}$, तो $\cos A$ और $\tan A$ का परिकलन कीजिए।

(2019, 20, 22)

हल : मान लीजिए $\triangle ABC$ एक समकोण \triangle है जिसमें $\angle B$ समकोण है।

चूँकि $\sin A = \frac{3}{4}$ (दिया है)

$$\Rightarrow \sin A = \frac{3}{4} = \frac{BC \text{ (सम्मुख भुजा)}}{AC \text{ (कर्ण)}}$$

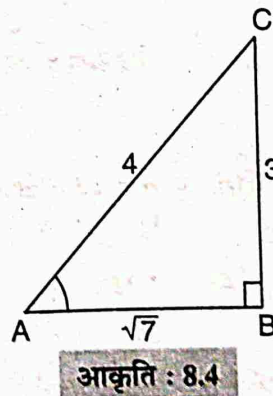
यदि $BC = 3$, तो $AC = 4$

तो पाइथागोरस प्रमेय से, $AB = \sqrt{(AC)^2 - (BC)^2}$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(4)^2 - (3)^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

अब $\cos A = \frac{AB \text{ (संलग्न भुजा)}}{AC \text{ (कर्ण)}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

एवं $\tan A = \frac{BC \text{ (सम्मुख भुजा)}}{AB \text{ (संलग्न भुजा)}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$



उत्तर

उत्तर

प्रश्न 3. $15 \cot A = 8$ हो, तो $\sin A$ और $\sec A$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए ABC एक समकोण Δ है जिसमें $\angle B$ समकोण है।

चूँकि $15 \cot A = 8$

$$\Rightarrow \cot A = \frac{8}{15} = \frac{AB \text{ (संलग्न भुजा)}}{BC \text{ (सम्मुख भुजा)}}$$

\Rightarrow यदि $AB = 8$ तो $BC = 15$

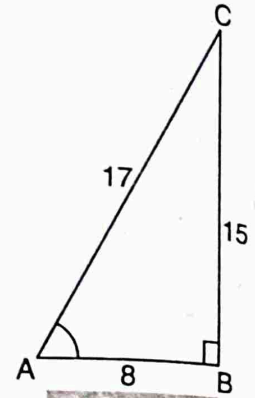
$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

$$\Rightarrow AC = \sqrt{(8)^2 + (15)^2} \\ = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$$

अब $\sin A = \frac{\text{सम्मुख भुजा } BC}{\text{कर्ण } AC} = \frac{15}{17}$

एवं $\sec A = \frac{\text{कर्ण } AC}{\text{संलग्न भुजा } AB} = \frac{17}{8}$

उत्तर



आकृति : 8.5

उत्तर

प्रश्न 4. ΔABC में जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

(ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

हल : ΔABC का $\angle B$ समकोण दिया है (देखिए आकृति 8.6) और $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

चूँकि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{AB}$

\Rightarrow यदि $BC = 1$, तो $AB = \sqrt{3}$

चूँकि $AC = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2} \\ = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{BC}{AC} \cdot \frac{BC}{AC} + \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AB}{AC} \\ = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

(ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AC} - \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AB}{AC} \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$

उत्तर

उत्तर

प्रश्न 5. एक समकोण ΔABC में जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = 1$, तो सत्यापित कीजिए कि—

$2 \sin A \cdot \cos A = 1$.

हल : ΔABC में, $\tan A = \frac{BC}{AB} = 1$

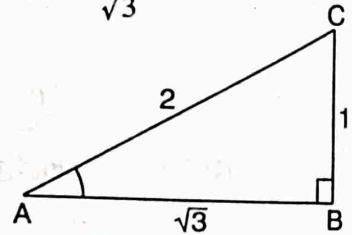
$\Rightarrow BC = AB = k$ (माना)

अब, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{k^2 + k^2} = \sqrt{2}k$

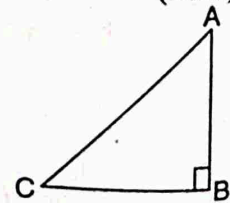
अतः $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ तथा $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore 2 \sin A \cdot \cos A = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 2 \sin A \cdot \cos A = 1$



आकृति : 8.6



आकृति : 8.7

इति सिद्धम्

प्रश्न 6. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ}$

(ii) $\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$

(iii) $\frac{5 \cos^2 60^\circ + 4 \sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

हल : (i) $\frac{\cos 45^\circ}{\sec 30^\circ + \operatorname{cosec} 30^\circ} = \frac{1/\sqrt{2}}{2/\sqrt{3} + (2)}$
 $= \frac{1/\sqrt{2}}{\frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}$
 $= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2(6-2)} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$ उत्तर

(ii) $\frac{\sin 30^\circ + \tan 45^\circ - \operatorname{cosec} 60^\circ}{\sec 30^\circ + \cos 60^\circ + \cot 45^\circ}$

$$= \left(\frac{\frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + 1} \right) = \left(\frac{\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{3}}}{\frac{4 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}} \right)$$

$$= \frac{3\sqrt{3} - 4}{3\sqrt{3} + 4} = \frac{(3\sqrt{3} - 4)^2}{(3\sqrt{3} + 4)(3\sqrt{3} - 4)}$$

$$= \frac{27 - 24\sqrt{3} + 16}{27 - 16} = \frac{43 - 24\sqrt{3}}{11}$$
 उत्तर

(iii) $\frac{5 \cos^2 60^\circ + 4 \sec^2 30^\circ - \tan^2 45^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ}$

$$= \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - (1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}$$

$$= \frac{5/4 + 16/3 - 1}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{(15 + 64 - 12)/12}{1} = \frac{67}{12}$$
 उत्तर

प्रश्न 7. यदि $\tan(A+B) = \sqrt{3}$ एवं $\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $0^\circ < A+B \leq 90^\circ$ तो A एवं B के मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\therefore \tan(A+B) = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$... (1)
 $\Rightarrow A+B = 60^\circ$

$\therefore \tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ$... (2)
 $\Rightarrow A-B = 30^\circ$

$\Rightarrow 2A = 90^\circ \Rightarrow A = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ [समीकरण (1) + (2) से] उत्तर

A = 45° का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$\Rightarrow A + 45^\circ = 60^\circ \Rightarrow A = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ उत्तर

प्रश्न 8. त्रिकोणमितीय अनुपातों $\sin A$, $\sec A$ और $\tan A$ को $\cot A$ के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल : $\sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}$ उत्तर

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1/\sin A}{\cos A/\sin A} = \frac{\operatorname{cosec} A}{\cot A} = \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A}}{\cot A}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \cot^2 A}}{\cot A}$$
 उत्तर

एवं $\tan A = \frac{1}{\cot A}$ उत्तर

प्रश्न 9. निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ सिद्ध कीजिए जहाँ वे कोण, जिनके लिए व्यंजक परिभाषित हैं; न्यूनकोण हैं :

(i) $(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)^2 = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$

(ii) $\frac{1 + \sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A}$

(iii) $\sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A$

(iv) $\frac{\sin \theta - 2 \sin^3 \theta}{2 \cos^3 \theta - \cos \theta} = \tan \theta$

(v) $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$.

हल : (i) $(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)^2 = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$

L.H.S. = $(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)^2$

$$= \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 = \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2$$

$$= \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} = \frac{(1 - \cos \theta)^2}{(1 - \cos^2 \theta)}$$

$$= \frac{(1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

(ii) $\frac{1 + \sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A}$

L.H.S. = $\frac{1 + \sec A}{\sec A} = 1 + \frac{1}{\cos A}$

$$= \frac{\cos A + 1}{1} = \frac{(1 + \cos A)(1 - \cos A)}{1 - \cos A}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 A}{1 - \cos A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A} = \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

(iii) $\sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A$

L.H.S. = $\sqrt{\frac{(1 + \sin A)}{(1 - \sin A)}} = \sqrt{\frac{(1 + \sin A)}{(1 - \sin A)}} \times \sqrt{\frac{(1 + \sin A)}{(1 + \sin A)}}$

$$= \sqrt{\frac{(1 + \sin A)^2}{1 - \sin^2 A}} = \sqrt{\frac{(1 + \sin A)^2}{\cos^2 A}}$$

$$\Rightarrow \text{L.H.S.} = \frac{1 + \sin A}{\cos A} = \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \sec A + \tan A = \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

$$(iv) \frac{\sin \theta - 2 \sin^3 \theta}{2 \cos^3 \theta - \cos \theta} = \tan \theta$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\sin \theta - 2 \sin^3 \theta}{2 \cos^3 \theta - \cos \theta} = \frac{\sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta)}{\cos \theta (2 \cos^2 \theta - 1)}$$

$$= \frac{\sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta)}{\cos \theta [2(1 - \sin^2 \theta) - 1]}$$

$$= \frac{\sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta)}{\cos \theta (1 - 2 \sin^2 \theta)} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \tan \theta = \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

$$(v) (\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$$

$$\text{L.H.S.} = (\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2$$

$$= \sin^2 A + 2 \sin A \operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec}^2 A + \cos^2 A + 2 \cos A \sec A + \sec^2 A$$

$$= \sin^2 A + \cos^2 A + 2 \sin A \operatorname{cosec} A + 2 \cos A \sec A + \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A$$

$$= 1 + 2 + 2 + (1 + \tan^2 A) + (1 + \cot^2 A)$$

$$[\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1, \sin A \operatorname{cosec} A = 1 \text{ एवं } \cos A \sec A = 1 \text{ एवं}$$

$$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A \text{ तथा } \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A]$$

$$= 7 + \tan^2 A + \cot^2 A = \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

दीर्घ उत्तरीय/विश्लेषणात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. यदि $\sec \theta = \frac{13}{12}$ हो, तो अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपात परिकलित कीजिए।

हल : मान लीजिए $\triangle ABC$ त्रिभुज का $\angle B =$ समकोण है तथा $\angle C = \theta$ है

चूँकि $\sec \theta = \frac{13}{12} = \frac{\text{कर्ण } AC}{\text{संलग्न भुजा } BC}$

\Rightarrow यदि $AC = 13$, तो $BC = 12$

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$ (पाइथागोरस प्रमेय से)

$\Rightarrow AB = \sqrt{(13)^2 - (12)^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$

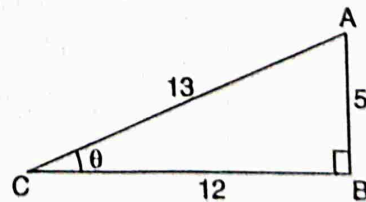
अब $\sin \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{13}$ उत्तर

$\cos \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{13}$ उत्तर

$\tan \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{12}$ उत्तर

$\cot \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{5}$ उत्तर

एवं $\operatorname{cosec} \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{13}{5}$ उत्तर



आकृति : 8.8

प्रश्न 2. यदि $3 \cot A = 4$, तो जाँच कीजिए कि $\frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ है या नहीं।

हल : मान लीजिए $\triangle ABC$ में, $\angle B$ समकोण है।

चूँकि

$$3 \cot A = 4$$

(दिया है)

\Rightarrow

$$\cot A = \frac{4}{3} = \frac{AB}{BC}$$

यदि

$$AB = 4 \text{ एवं } BC = 3$$

तो

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

$$= \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\Rightarrow \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}, \sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5} \text{ एवं } \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$

चूँकि सिद्ध करना है कि $\frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ है या नहीं

अब

$$\text{L.H.S.} = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \frac{1 - (3/4)^2}{1 + (3/4)^2}$$

$$= \frac{1 - 9/16}{1 + 9/16} = \frac{(16 - 9)/16}{(16 + 9)/16}$$

$$= \frac{7/16}{25/16} = \frac{7}{25}$$

एवं

$$\text{R.H.S.} = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25}$$

$$= \frac{16 - 9}{25} = \frac{7}{25}$$

\Rightarrow

$$\text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

अतः, $\frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ है।

उत्तर

प्रश्न 3. $\triangle PQR$ में, जिसका कोण Q समकोण है, $PR + QR = 25$ cm और $PQ = 5$ cm है। $\sin P$, $\cos P$ और $\tan P$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\triangle PQR$ का $\angle Q$ समकोण दिया है और

$$PR + QR = 25 \text{ cm} \quad \dots(1)$$

तथा

$$PQ = 5 \text{ cm} \quad \dots(2)$$

चूँकि

$$PR^2 - QR^2 = PQ^2$$

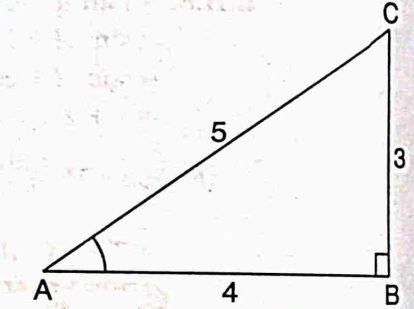
$$\Rightarrow (PR + QR)(PR - QR) = PQ^2$$

$$\Rightarrow 25(PR - QR) = (5)^2 = 25$$

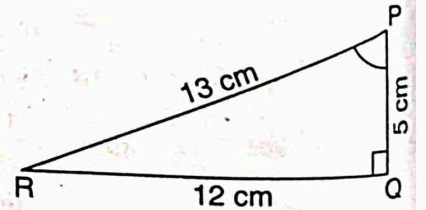
$$\Rightarrow PR - QR = \frac{25}{25} = 1 \quad \dots(3)$$

$$\Rightarrow 2PR = 26$$

$$\Rightarrow PR = \frac{26}{2} = 13$$



आकृति : 8.9



आकृति : 8.10

[समीकरण (1) + (3) से]

$PR = 13$ का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$13 + QR = 25 \Rightarrow QR = 25 - 13 = 12$$

अब $\sin P = \frac{QR}{PR} = \frac{12}{13}$ उत्तर

$\cos P = \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$ उत्तर

एवं $\tan P = \frac{QR}{PQ} = \frac{12}{5}$ उत्तर

प्रश्न 4. $\angle A$ के अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को $\sec A$ के पदों में लिखिए।

हल : मान लीजिए समकोण $\triangle ABC$ में $\angle B$ समकोण है और $\sec A = x = \frac{\text{कर्ण}}{\text{संलग्न भुजा}} = \frac{AC}{AB}$
 \Rightarrow यदि कर्ण $AC = x$, तो संलग्न भुजा $AB = 1$

चूँकि $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{x^2 - 1}$

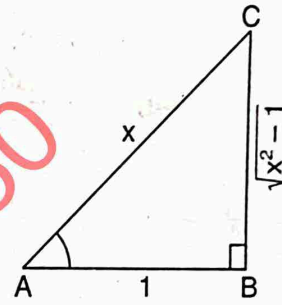
अब $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$
 $= \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}$ उत्तर

$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\sec A}$ उत्तर

$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{1} = \sqrt{\sec^2 A - 1}$ उत्तर

$\operatorname{cosec} A = \frac{AC}{BC} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$ उत्तर

$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}$ उत्तर



आकृति : 8.11

प्रश्न 5. निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ सिद्ध कीजिए जहाँ कोण, जिनके लिए व्यंजक परिभाषित हैं; न्यूनकोण हैं :

(i) $\frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 \sec A$ (2020)

(ii) $\frac{\tan \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \tan \theta} = 1 + \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$

(iii) $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ को लागू करके $\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$

(iv) $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$

(v) $\left(\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} \right) = \left(\frac{1 - \tan A}{1 - \cot A} \right)^2 = \tan^2 A$

हल : (i) $\frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 \sec A$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \text{L.H.S.} &= \frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A} \\
 &= \frac{\cos^2 A + (1 + \sin A)^2}{\cos A (1 + \sin A)} \\
 &= \frac{\cos^2 A + 1 + 2 \sin A + \sin^2 A}{\cos A (1 + \sin A)} \\
 &= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A + 1 + 2 \sin A}{\cos A (1 + \sin A)} \\
 &= \frac{1 + 1 + 2 \sin A}{\cos A (1 + \sin A)} = \frac{2(1 + \sin A)}{\cos A (1 + \sin A)} \\
 &= \frac{2}{\cos A} = 2 \sec A = \text{R.H.S.}
 \end{aligned}$$

इति सिद्धम्

$$(ii) \quad \frac{\tan \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \tan \theta} = 1 + \sec \theta \cdot \operatorname{cosec} \theta$$

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S.} &= \frac{\tan \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \tan \theta} \\
 &= \frac{\sin \theta / \cos \theta}{1 - \cos \theta / \sin \theta} + \frac{\cos \theta / \sin \theta}{1 - \sin \theta / \cos \theta} \\
 &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta (\cos \theta - \sin \theta)} \\
 &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta (\sin \theta - \cos \theta)} \\
 &= \frac{\sin^3 \theta - \cos^3 \theta}{\sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)} \\
 &= \frac{(\sin \theta - \cos \theta) (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin \theta \cdot \cos \theta)}{\sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)} \\
 &= \frac{1 + \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \quad [\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1] \\
 &= \frac{1}{\sin \theta \cdot \cos \theta} + 1 \\
 &= \operatorname{cosec} \theta \sec \theta + 1
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{L.H.S.} = 1 + \sec \theta \operatorname{cosec} \theta = \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

$$(iii) \quad \frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \frac{\cot A - 1 + \operatorname{cosec} A}{\cot A + 1 - \operatorname{cosec} A}$$

(हर एवं अंश को $\sin A$ से भाग देने पर)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \text{L.H.S.} &= \frac{(\cot A + \operatorname{cosec} A) - 1}{(\cot A - \operatorname{cosec} A + 1)} \\
&= \frac{[(\cot A + \operatorname{cosec} A) - 1](\cot A - \operatorname{cosec} A)}{[(\cot A - \operatorname{cosec} A + 1)](\cot A - \operatorname{cosec} A)} \\
&= \frac{(\cot^2 A - \operatorname{cosec}^2 A) - (\cot A - \operatorname{cosec} A)}{(\cot A - \operatorname{cosec} A + 1)(\cot A - \operatorname{cosec} A)} \\
&= \frac{-1 - \cot A + \operatorname{cosec} A}{(\cot A - \operatorname{cosec} A + 1)(\cot A - \operatorname{cosec} A)} \\
&= \frac{(\cot A - \operatorname{cosec} A + 1)}{(\cot A - \operatorname{cosec} A + 1)(\operatorname{cosec} A - \cot A)} \\
&= \frac{1}{\operatorname{cosec} A - \cot A} \\
&= \frac{(\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)}{(\operatorname{cosec} A - \cot A)} \\
&= \frac{(\operatorname{cosec} A - \cot A)(\operatorname{cosec} A + \cot A)}{(\operatorname{cosec} A - \cot A)} \\
&= \operatorname{cosec} A + \cot A = \text{R.H.S.}
\end{aligned}$$

इति सिद्धम्

$$(iv) (\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$$

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S.} &= (\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) \\
&= \left(\frac{1}{\sin A} - \sin A\right)\left(\frac{1}{\cos A} - \cos A\right) \\
&= \frac{(1 - \sin^2 A)}{\sin A} \cdot \frac{(1 - \cos^2 A)}{\cos A} \\
&= \frac{\cos^2 A \cdot \sin^2 A}{\sin A \cdot \cos A} \\
&= \sin A \cdot \cos A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{R.H.S.} &= \frac{1}{\tan A + \cot A} = \frac{1}{\sin A / \cos A + \cos A / \sin A} \\
&= \frac{\sin A \cos A}{\sin^2 A + \cos^2 A} = \sin A \cos A \quad [\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्

$$(v) \frac{(1 + \tan^2 A)}{(1 + \cot^2 A)} = \left(\frac{1 - \tan A}{1 - \cot A}\right)^2 = \tan^2 A$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{(1 + \tan^2 A)}{(1 + \cot^2 A)} = \frac{\sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A}$$

$$\Rightarrow \text{L.H.S.} = \frac{1}{\cos^2 A} \times \frac{\sin^2 A}{1} = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \left(\frac{\sin A}{\cos A} \right)^2 = \tan^2 A \quad \dots(1)$$

$$\text{R.H.S.} = \left(\frac{1 - \tan A}{1 - \cot A} \right)^2 = \left(\frac{1 - \sin A / \cos A}{1 - \cos A / \sin A} \right)^2$$

$$= \left[\frac{(\cos A - \sin A) / \cos A}{(\sin A - \cos A) / \sin A} \right]^2$$

$$= \left(- \frac{\sin A}{\cos A} \right)^2$$

$$= (-\tan A)^2 = \tan^2 A \quad \dots(2)$$

$$\therefore \left(\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} \right) = \left(\frac{1 - \tan A}{1 - \cot A} \right)^2 = \tan^2 A$$

$$\Rightarrow \text{L.H.S.} = \text{R.H.S.}$$

इति सिद्धम्



अध्याय

त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग

[Some Applications of Trigonometry]

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

बहु-विकल्पीय प्रश्न

- यदि धूप में खड़े एक व्यक्ति की छाया उसकी ऊँचाई की $\sqrt{3}$ गुना हो, तो उस समय सूर्य का उन्नयन कोण होगा :
 (a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 75°
- एक पेड़ की छाया $20\sqrt{3}$ मीटर है। यदि पेड़ की ऊँचाई 20 मीटर हो, तो सूर्य का उन्नयन कोण होगा :
 (a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 75°
- एक व्यक्ति किसी बिजली के खम्भे के शिखर से देखता है कि धरातल के एक बिन्दु का अवनमन कोण 60° है। यदि खम्भे के पाद से बिन्दु की दूरी 25 मीटर हो, तो खम्भे की ऊँचाई होगी :
 (a) 25 मीटर (b) $25\sqrt{2}$ मीटर (c) $25\sqrt{3}$ मीटर (d) 1 मीटर
- पुल पर बैठा एक व्यक्ति नदी में एक नाव देखता है, जिसका अवनमन कोण 45° है। यदि पुल की ऊँचाई 15 मीटर हो, तो नाव की पुल से दूरी होगी :
 (a) 10 मीटर (b) 15 मीटर (c) 25 मीटर (d) 5 मीटर

5. पेड़ की छाया, उसकी ऊँचाई के बराबर है। सूर्य का उन्नतांश (उन्नयन) कोण होगा :
अथवा
यदि मीनार की ऊँचाई एवं छाया की लम्बाई समान हो, तो सूर्य के उन्नयन कोण का मान होगा :

(a) 30°

(b) 60°

(c) 90°

(d) 45°

उत्तर—1. (a), 2. (a), 3. (c), 4. (b), 5. (d).

रिक्त स्थानों की पूर्ति

- नीचे खड़े रहकर ऊपर की ओर देखने के लिए दृष्टि रेखा को क्षैतिज से जितना ऊपर की ओर घुमाना पड़ता है, वह कोण कहलाता है।
- ऊपर के किसी बिन्दु से नीचे के किसी बिन्दु को देखने के लिए दृष्टि रेखा को क्षैतिज से जितना नीचे की ओर घुमाना पड़ता है, वह कोण कोण कहलाता है।
- यदि किसी मीनार (पेड़) की ऊँचाई एवं उसकी छाया (की लम्बाई) बराबर (समान) हो, तो उस समय उसका (सूर्य का) उन्नयन कोण होगा।
- एक भवन के पास से 25 मीटर की दूरी से भवन के शिखर का उन्नयन कोण 45° है, तो भवन की ऊँचाई होगी।

उत्तर—1. उन्नयन कोण, 2. अवनमन, 3. 45° , 4. 25 मीटर।

जोड़ी मिलाइए

स्तम्भ 'अ'

- उन्नत कोण
- अवनत कोण
- खंभे की ऊँचाई व छाया समान

स्तम्भ 'ब'

- अवनमन कोण
- सूर्य का उन्नयन कोण 45°
- उन्नयन कोण

उत्तर—1. →(c), 2. →(a), 3. →(b).

सत्य/असत्य कथन

- क्षैतिज तल से ऊपर की ओर देखने पर दृष्टि रेखा क्षैतिज रेखा के साथ अवनमन कोण बनाती है।
- वह रेखा जो हमारी आँख से वस्तु को जिसे हम देख रहे हैं, जोड़ती है, दृष्टि रेखा कहलाती है।
- देखी गई वस्तु का उन्नयन कोण दृष्टि रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण होता है, जबकि वस्तु को देखने के लिए अपने सिर को नीचे की ओर झुकाना पड़ता है।

(2019)

उत्तर—1. असत्य, 2. सत्य, 3. असत्य।

एक शब्द/वाक्य में उत्तर

- उस मापक यन्त्र का नाम लिखिए जिसके द्वारा किसी दूरस्थ बिन्दु या ऊँचाई का कोण मापन किया जा सकता है।
- वह रेखा क्या कहलाती है जो हमारी आँख से सीधे भूमि के समानान्तर जाती है?
- हमारी आँख से उस वस्तु को जिसे हम देख रहे हैं, जोड़ने वाली रेखा क्या कहलाती है?
- जब वस्तु आँख की क्षैतिज रेखा से ऊपर हो, तो उसे देखने के प्रक्रम में हमारी दृष्टि रेखा जिस कोण से ऊपर को मुड़ जाती है, उस कोण को क्या कहते हैं?
- जब वस्तु आँख की क्षैतिज रेखा से नीचे हो, तो उसे देखने के प्रक्रम में हमारी दृष्टि रेखा जिस कोण से नीचे की ओर मुड़ जाती है, उस कोण को क्या कहते हैं?
- दृष्टि रेखा की परिभाषा लिखिए।

(2020)

उत्तर—1. षष्टक, 2. क्षैतिज रेखा, 3. दृष्टि रेखा, 4. उन्नत (उन्नयन) कोण, 5. अवनत (अवनमन) कोण,

6. हमारी आँख से उस वस्तु को जिसे हम देख रहे हैं, जोड़ने वाली रेखा दृष्टि रेखा कहलाती है।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. सर्कस का एक कलाकार एक 20 m लम्बी डोर पर चढ़ रहा है, जो अच्छी तरह से तनी हुई है और भूमि पर सीधे लगे खम्भे के शिखर से बँधी हुई है। यदि भूमि स्तर के साथ डोर द्वारा बनाया गया कोण 30° का हो, तो खम्भे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। (देखिए संलग्न आकृति 9.1) (2020)

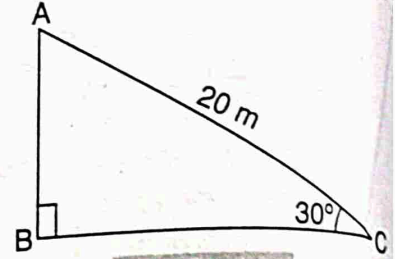
हल : $\triangle ABC$ में $\angle B$ समकोण है एवं कोण $C = 30^\circ$ तथा डोरी की लम्बाई $AC = 20$ m (दिया हुआ है)

$$\text{चूँकि} \quad \sin C = \frac{AB \text{ (सम्मुख भुजा)}}{AC \text{ (कर्ण)}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AB}{20} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad AB = 20 \times \frac{1}{2} = 10 \text{ m}$$

अतः, खम्भे की अभीष्ट ऊँचाई = 10 m है।



आकृति : 9.1

प्रश्न 2. भूमि के एक बिन्दु से, जो मीनार के पाद-बिन्दु से 30 m की दूरी पर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

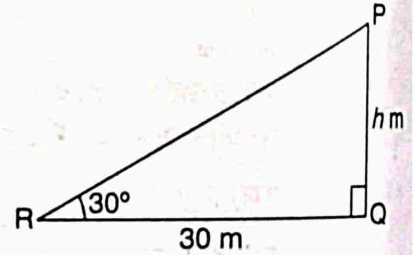
हल : मान लीजिए PQ एक दी हुई मीनार है जिसकी ऊँचाई $PQ = h$ m है तथा इसके पाद बिन्दु Q से $QR = 30$ m की दूरी पर स्थित बिन्दु R पर मीनार के शिखर P का उन्नयन कोण $\angle PRQ = 30^\circ$ है। (देखिए आकृति 9.2)

$$\text{तो} \quad \frac{PQ}{QR} = \tan PRQ$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h}{30} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{30}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \text{ m}$$

अतः, मीनार की अभीष्ट ऊँचाई = $10\sqrt{3}$ m है।



आकृति : 9.2

प्रश्न 3. भूमि से 60 m की ऊँचाई पर एक पतंग उड़ रही है। पतंग में लगी डोरी को अस्थायी रूप से भूमि के एक बिन्दु से बाँध दिया गया है। भूमि के साथ डोरी का झुकाव 60° है। यह मानकर कि डोरी में कोई ढील नहीं है, डोरी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

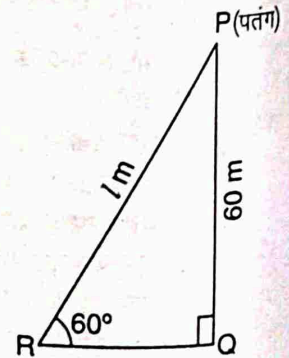
हल : मान लीजिए $PR = l$ m की लम्बाई वाली एक डोरी के सिरे P पर एक पतंग है तथा इसका दूसरा सिरा बिन्दु R पर खूटे से बँधा है। पतंग की पृथ्वी से ऊँचाई $PQ = 60$ m है। डोरी पृथ्वी के साथ $\angle PRQ = 60^\circ$ का कोण बनाती है (देखिए आकृति 9.3)।

$$\text{तो} \quad \frac{PQ}{PR} = \sin \angle PRQ$$

$$\Rightarrow \quad \frac{60}{l} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad l = \frac{60 \times 2}{\sqrt{3}} = 40\sqrt{3} \text{ m}$$

अतः, डोरी की अभीष्ट लम्बाई = $40\sqrt{3}$ m है।



आकृति : 9.3

उत्तर

प्रश्न 4. 1.5 मीटर लम्बा एक प्रेक्षक एक चिमनी से 28.5 मीटर की दूरी पर है। उसकी आँखों से चिमनी के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। चिमनी की ऊँचाई बताइए। (2020)

हल : संलग्न चित्र में, PQ प्रेक्षक एवं AB चिमनी है।

साथ ही,

$$BC = PQ = 1.5 \text{ m}$$

तथा

$$PC = BQ = 28.5 \text{ m}$$

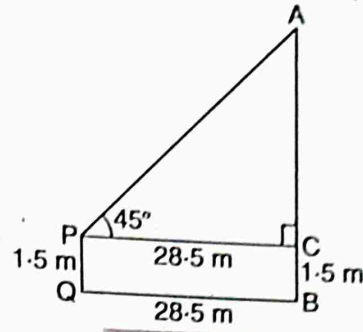
अब, समकोण $\triangle ACP$ में,

$$\tan 45^\circ = \frac{AC}{PC}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{AC}{28.5} \Rightarrow AC = 28.5 \text{ m}$$

अब, चिमनी की कुल ऊँचाई $AB = AC + BC$

$$= 28.5 + 1.5 = 30 \text{ m}$$



आकृति : 9.4

उत्तर

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. आँधी आने से एक पेड़ टूट जाता है और टूटा हुआ भाग इस तरह मुड़ जाता है कि पेड़ का शिखर जमीन को छूने लगता है और इसके साथ 30° का कोण बनाता है। पेड़ के पाद-बिन्दु की दूरी, जहाँ पेड़ का शिखर जमीन को छूता है, 8 m है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए एक पेड़ $PQ = h$ m लम्बा आँधी के कारण $QR = x$ m की ऊँचाई पर स्थित R बिन्दु से टूट जाता है तथा इसका शीर्ष P पृथ्वी पर बिन्दु S पर टिक जाता है तथा पेड़ का यह भाग पृथ्वी के साथ $\angle RSQ = 30^\circ$ का कोण बनाता है तथा इस भाग की लम्बाई $SR = PR = (h-x)$ m होगी। अब समकोण $\triangle RQS$ में,

$$\therefore \frac{RQ}{QS} = \tan RSQ \Rightarrow \frac{x}{8} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{8}{\sqrt{3}} \text{ m} \quad \dots(1)$$

$$\text{एवं} \quad \frac{SQ}{SR} = \cos RSQ \Rightarrow \frac{8}{(h-x)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow (h-x) = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{16}{\sqrt{3}} + x \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) से $x = \frac{8}{\sqrt{3}}$ का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$h = \frac{16}{\sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3} \text{ m}$$

अतः, पेड़ की अभीष्ट ऊँचाई $= 8\sqrt{3}$ m है।

उत्तर

प्रश्न 2. मीनार के आधार से और एक सरल रेखा में 4 m और 9 m की दूरी पर स्थित दो बिन्दुओं से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण पूरक कोण हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई 6 m है।

हल : मान लीजिए एक मीनार $PQ = h$ m ऊँची है जिसके पाद से $AQ = 4$ m एवं $BQ = 9$ m की दूरी पर दो बिन्दु क्रमशः A और B स्थित हैं, जहाँ पर मीनार के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः $\angle PAQ = \theta$ एवं $\angle PBQ = (90^\circ - \theta)$ हैं, क्योंकि दोनों कोण पूरक कोण हैं।

अब समकोण ΔPQA में,

$$\frac{PQ}{AQ} = \tan PAQ \Rightarrow \frac{h}{4} = \tan \theta \quad \dots(1)$$

एवं समकोण ΔPQB में,

$$\frac{PQ}{BQ} = \tan PBQ \Rightarrow \frac{h}{9} = \tan (90^\circ - \theta) = \cot \theta$$

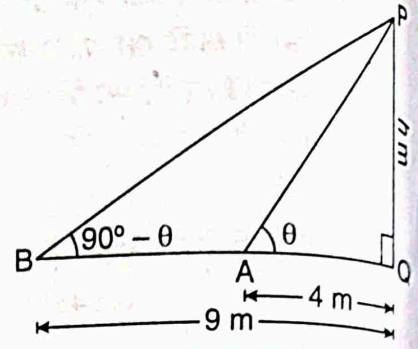
$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{9}{h} \quad \dots(2)$$

$$\Rightarrow \frac{h}{4} = \frac{9}{h} \quad \text{[समीकरण (1) एवं (2)से]}$$

$$\Rightarrow h^2 = 36 \Rightarrow h = \sqrt{36} = 6 \text{ m}$$

अतः, मीनार की ऊँचाई 6 m है।

इति सिद्धम्



आकृति : 9.6

दीर्घ उत्तरीय/विश्लेषणात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. एक ठेकेदार बच्चों को खेलने के लिए एक पार्क में दो फिसलन-पट्टी लगाना चाहती है। 5 वर्ष से कम उम्र के बच्चों के लिए वह एक ऐसी फिसलन पट्टी लगाना चाहती है जिसका शिखर 1.5 m की ऊँचाई पर हो और भूमि के साथ 30° के कोण पर झुका हुआ हो, जबकि इससे अधिक उम्र के बच्चों के लिए वह 3 m की ऊँचाई पर एक अधिक ढाल की फिसलन-पट्टी लगाना चाहती है, जो भूमि के साथ 60° का कोण बनाती है। प्रत्येक स्थिति में फिसलन-पट्टी की लम्बाई क्या होनी चाहिए?

हल : मान लीजिए 5 वर्ष से कम उम्र की बच्चों के लिए $AC = l_1$ m की लम्बाई की फिसलन-पट्टी लगायी जाती है जिसका शिखर A , $AB = 1.5$ m ऊँचाई पर है तथा फिसलन-पट्टी पृथ्वी के साथ $\angle ACB = 30^\circ$ का कोण बनाती है। [देखिए आकृति 9.7 (a)]

$$\text{चूँकि } \frac{AB}{AC} = \sin ACB$$

$$\Rightarrow \frac{1.5}{l_1} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow l_1 = 2 \times 1.5 = 3 \text{ m}$$

अतः, छोटी फिसलन-पट्टी की अभीष्ट लम्बाई = 3 m है।

अब मान लीजिए 5 वर्ष से अधिक उम्र के बच्चों के लिए $PR = l_2$ m की लम्बाई की फिसलन-पट्टी लगायी जाती है जिसका शिखर P , $PQ = 3$ m की ऊँचाई पर है तथा यह फिसलन-पट्टी पृथ्वी के साथ $\angle PRQ = 60^\circ$ का कोण बनाती है। [देखिए आकृति : 9.7 (b)]

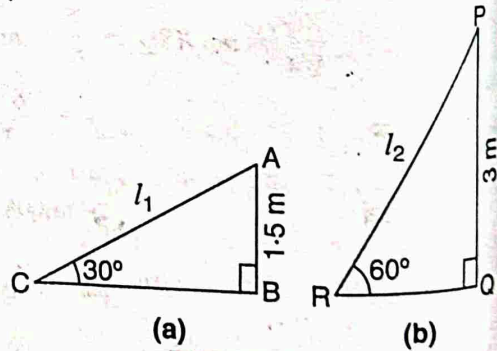
$$\text{चूँकि } \frac{PQ}{PR} = \sin PRQ \Rightarrow \frac{3}{l_2} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow l_2 = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ m}$$

अतः, बड़ी फिसलन-पट्टी की अभीष्ट लम्बाई = $2\sqrt{3}$ m है।

उत्तर

उत्तर

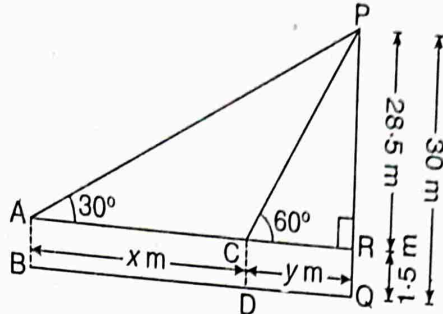


आकृति : 9.7

प्रश्न 2. 1.5 m लम्बा एक लड़का 30 m ऊँचे एक भवन से कुछ दूरी पर खड़ा है। जब वह ऊँचे भवन की ओर जाता है, तब उसकी आँख से भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° से 60° हो जाता है। बताइए कि वह भवन की ओर कितनी दूरी तक चलकर गया है ?

हल : मान लीजिए $PQ = 30$ m ऊँचा एक भवन है। एक लड़का $AB = 1.5$ m ऊँचाई का पृथ्वी पर बिन्दु B पर खड़ा है। लड़के के नेत्रों से जाने वाली क्षैतिज रेखा PQ को बिन्दु R पर प्रतिच्छेद करती है, जहाँ $RQ = AB = 1.5$ m
 $\Rightarrow PR = PQ - RQ = 30 \text{ m} - 1.5 \text{ m} = 28.5 \text{ m}$

इस स्थिति में P का उन्नयन $\angle PAR = 30^\circ$ और मान लीजिए यह लड़का भवन की ओर x m चलकर CD स्थिति में आ जाता है, जहाँ P का उन्नयन कोण $\angle PCR = 60^\circ$ हो जाता है। यदि $CR = y$ m हो (देखिए आकृति 9.8) तो समकोण $\triangle PRC$ में,



आकृति : 9.8

$$\begin{aligned} \therefore \frac{PR}{CR} &= \tan(\angle PCR) \Rightarrow \frac{28.5}{y} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \\ \Rightarrow y &= \frac{28.5}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad \dots(1)$$

एवं समकोण $\triangle PRA$ में,

$$\begin{aligned} \frac{PR}{AR} &= \tan(\angle PAR) \Rightarrow \frac{PR}{AC + CR} = \tan 30^\circ \\ \frac{28.5}{x + y} &= \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \Rightarrow x + y &= 28.5 \times \sqrt{3} \end{aligned} \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) से y का मान समीकरण (2) में रखने पर,

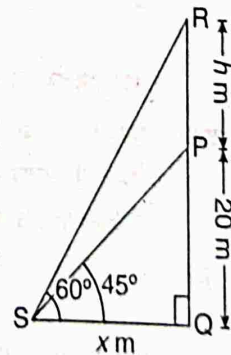
$$\begin{aligned} \Rightarrow x + \frac{28.5}{\sqrt{3}} &= 28.5 \sqrt{3} \\ \Rightarrow x &= 28.5 \sqrt{3} - \frac{28.5}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{3 \times 28.5 - 28.5}{\sqrt{3}} = \frac{85.5 - 28.5}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{57}{\sqrt{3}} = \frac{19 \times 3}{\sqrt{3}} = 19\sqrt{3} \text{ m} \end{aligned}$$

अतः, लड़के द्वारा चली गयी अभीष्ट दूरी $= 19\sqrt{3}$ m है।

प्रश्न 3. भूमि के एक बिन्दु से एक 20 m ऊँचे भवन के शिखर पर लगी एक संचार मीनार के तल और शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए एक भवन $PQ = 20$ मी ऊँचाई का दिया है जिसके ऊपर PR एक संचार मीनार लगा है। बिन्दु S के मीनार के तल एवं शिखर R के उन्नयन कोण क्रमशः 45° एवं 60° हैं।

पुनः मान लीजिए कि $SQ = x$ m एवं $PR = h$ m (देखिए आकृति 9.9) तो समकोण $\triangle PQS$ में,



आकृति : 9.9

$$\begin{aligned} \therefore \frac{PQ}{QS} &= \tan \angle PSQ \\ \Rightarrow \frac{20}{x} &= \tan 45^\circ = 1 \end{aligned}$$

उत्तर

$$\Rightarrow x = 20 \text{ m} \quad \dots(1)$$

एवं समकोण ΔRQS में,

$$\therefore \frac{RQ}{QS} = \tan RSQ \Rightarrow \frac{RP + PQ}{QS} = \tan 60^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{h + 20}{x} = \sqrt{3} \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) से $x = 20 \text{ m}$ समीकरण (2) में रखने पर,

$$\Rightarrow \frac{h + 20}{20} = \sqrt{3} \Rightarrow h + 20 = 20\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h = 20\sqrt{3} - 20 = 20(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$$

अतः, संचार मीनार की अभीष्ट ऊँचाई = $20(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$ है।

प्रश्न 4. एक पेडस्टल के शिखर पर एक 1.6 m ऊँची मूर्ति लगी है। भूमि के एक बिन्दु से मूर्ति के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और उसी बिन्दु से पेडस्टल के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। पेडस्टल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए $PQ = h \text{ m}$ की ऊँचाई का एक पेडस्टल है जिसके ऊपर $RP = 1.6 \text{ m}$ ऊँची एक मूर्ति लगी है। पेडस्टल के पाद से $QS = x \text{ m}$ की दूरी पर स्थित बिन्दु S से मूर्ति के शिखर का उन्नयन कोण 60° एवं पेडस्टल के शिखर का उन्नयन कोण 45° है (देखिए आकृति 9.10) तो समकोण त्रिभुज PQS में,

$$\therefore \frac{PQ}{QS} = \tan PSQ$$

$$\Rightarrow \frac{h}{x} = \tan 45^\circ = 1$$

$$\Rightarrow h = x \quad \dots(1)$$

एवं समकोण ΔRQS में, $\frac{RQ}{QS} = \frac{RP + PQ}{QS} = \tan RSQ$

$$\Rightarrow \frac{1.6 + h}{x} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 1.6 + h = x\sqrt{3} \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) से $x = h$ समीकरण (2) में रखने पर,

$$\Rightarrow 1.6 + h = h\sqrt{3} \Rightarrow h\sqrt{3} - h = 1.6 \Rightarrow h(\sqrt{3} - 1) = 1.6$$

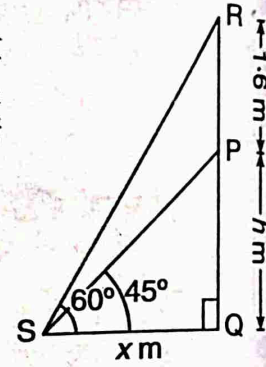
$$\Rightarrow h = \frac{1.6}{\sqrt{3} - 1} = \frac{1.6(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{1.6(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1}$$

$$= \frac{1.6(\sqrt{3} + 1)}{2} = 0.8(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$$

अतः, पेडस्टल की अभीष्ट ऊँचाई = $0.8(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$ है।

प्रश्न 5. एक मीनार के पाद बिन्दु से एक भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है और भवन के पाद बिन्दु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। यदि मीनार 50 m ऊँची हो, तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए पृथ्वी पर एक मीनार $PQ = 50 \text{ m}$ ऊँची एवं उसके पाद से $QS = x \text{ m}$ दूरी पर स्थित एक भवन $RS = h \text{ m}$ है। मीनार के पाद Q से भवन के शिखर R का उन्नयन कोण $\angle RQS = 30^\circ$ है तथा भवन के पाद S से मीनार के शिखर P का उन्नयन कोण $PSQ = 60^\circ$ है (देखिए आकृति 9.11)।



आकृति : 9.10

उत्तर

उत्तर

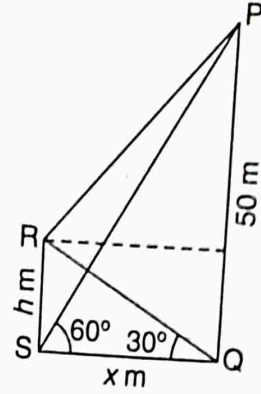
तो समकोण ΔRSQ में,

$$\begin{aligned} \therefore \frac{RS}{SQ} &= \tan RQS \\ \Rightarrow \frac{h}{x} &= \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \Rightarrow x &= h\sqrt{3} \end{aligned}$$

एवं समकोण ΔPQS में,

$$\begin{aligned} \frac{PQ}{SQ} &= \tan PSQ \\ \Rightarrow \frac{50}{x} &= \tan 60^\circ = \sqrt{3} \\ \Rightarrow x\sqrt{3} &= 50 \end{aligned}$$

...(1)



आकृति : 9.11

...(2)

समीकरण (1) से $x = h\sqrt{3}$ समीकरण (2) में रखने पर,

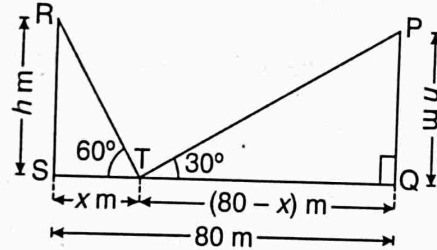
$$\begin{aligned} \Rightarrow h\sqrt{3} \times \sqrt{3} &= 50 \Rightarrow 3h = 50 \\ \Rightarrow h &= \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3} \text{ m} \end{aligned}$$

अतः, भवन की अभीष्ट ऊँचाई = $16\frac{2}{3}$ m है।

उत्तर

प्रश्न 6. एक 80 m चौड़ी सड़क के दोनों ओर आमने-सामने समान लम्बाई वाले दो खम्भे लगे हुए हैं। इन दोनों खम्भों के बीच सड़क के एक बिन्दु से खम्भों के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 60° और 30° हैं। खम्भों की ऊँचाई और खम्भों से बिन्दु की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए दो खम्भे $PQ = RS = h$ m के एक-दूसरे से $SQ = 80$ m की दूरी पर हैं। QS के मध्य S से $ST = x$ m की दूरी पर बिन्दु T है। T से R का उन्नयन कोण $\angle RTS = 60^\circ$ एवं P का उन्नयन कोण $\angle PTQ = 30^\circ$ है। यहाँ $TQ = SQ - ST = (80 - x)$ m (देखिए आकृति 9.12)



आकृति : 9.12

अब समकोण ΔRST में,

$$\begin{aligned} \frac{RS}{ST} &= \tan RTS \Rightarrow \frac{h}{x} = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \\ \Rightarrow h &= x\sqrt{3} \end{aligned}$$

...(1)

एवं समकोण ΔPQT में,

$$\begin{aligned} \frac{PQ}{TQ} &= \tan PTQ \Rightarrow \frac{h}{(80-x)} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \Rightarrow 80-x &= h\sqrt{3} \end{aligned}$$

...(2)

समीकरण (1) से $h = x\sqrt{3}$ समीकरण (2) में रखने पर,

$$\begin{aligned} 80-x &= x\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3x \\ \Rightarrow 4x &= 80 \Rightarrow x = \frac{80}{4} = 20 \text{ m} \end{aligned}$$

एवं $QT = 80 - x = 80 - 20 = 60$ m

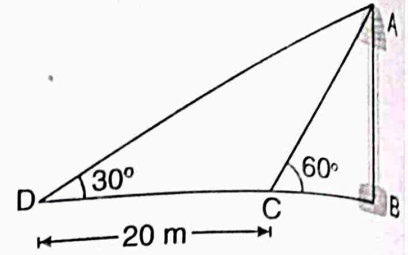
x का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$h = 20\sqrt{3} \text{ m}$$

अतः, प्रत्येक खम्भे की अभीष्ट ऊँचाई = $20\sqrt{3}$ m एवं अभीष्ट बिन्दु की स्थिति एक खम्भे से 20 m तथा दूसरे खम्भे से 60 m की दूरी पर है।

उत्तर

प्रश्न 7. एक नहर के एक तट पर एक टीवी टॉवर ऊर्ध्वाधरतः खड़ा है। टॉवर के ठीक सामने दूसरे तट के एक अन्य बिन्दु से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। इसी तट पर इस बिन्दु से 20 m दूर और इस बिन्दु को मीनार के पाद से मिलाने वाली रेखा पर स्थित एक अन्य बिन्दु से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 30° है (देखिए संलग्न आकृति 9.13)। टॉवर की ऊँचाई और नहर की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।



आकृति : 9.13

हल : मान लीजिए कि एक नहर के एक सिरे पर एक मीनार $AB = h$ m दिया है जिसके शिखर A का नहर के दूसरे सिरे C से उन्नयन कोण $\angle ACB = 60^\circ$ है। C से $DC = 20$ m दूरी पर स्थित बिन्दु D से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण $\angle ADB = 30^\circ$ है तथा नहर की चौड़ाई $CB = x$ मीटर है तो समकोण $\triangle ABC$ में,

$$\therefore \frac{AB}{CB} = \tan ACB \Rightarrow \frac{h}{x} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h = x\sqrt{3} \quad \dots(1)$$

एवं समकोण $\triangle ABD$ में,

$$\frac{AB}{DB} = \tan ADB \Rightarrow \frac{AB}{DC + CB} = \tan 30^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{h}{20 + x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 20 + x = h\sqrt{3} \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) से $h = x\sqrt{3}$ समीकरण (2) में रखने पर,

$$\Rightarrow 20 + x = x\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3x$$

$$\Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{2} = 10 \text{ m}$$

$x = 10$ का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$h = 10\sqrt{3}$$

अतः, मीनार की अभीष्ट ऊँचाई = $10\sqrt{3}$ m एवं नहर की चौड़ाई = 10 m है। उत्तर

प्रश्न 8. 7 m ऊँचे भवन के शिखर से एक केबल टॉवर का उन्नयन कोण 60° है और इसके पाद का अवनमन कोण 45° है। टॉवर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए केबल टॉवर $PQ = h$ मीटर ऊँचा तथा भवन $RS = 7$ m ऊँचा दिया है। भवन के शिखर से टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण $\angle PRT = 60^\circ$ है जहाँ RT क्षैतिज रेखा है जो PQ के बिन्दु T पर मिलती है तथा इस शिखर R से टॉवर के पाद Q का अवनमन कोण $\angle TRQ = 45^\circ$ है। (देखिए आकृति 9.14)

यहाँ $TQ = RS = 7$ m एवं $PT = (h - 7)$ m तथा $RT = SQ = x$ m

तो समकोण $\triangle RTQ$ में,

$$\frac{TQ}{RT} = \tan TRQ$$

$$\Rightarrow \frac{7}{x} = \tan 45^\circ = 1$$

$$\Rightarrow x = 7 \text{ m} \quad \dots(1)$$

एवं समकोण ΔPRT में,

$$\frac{PT}{RT} = \tan PRT$$

$$\Rightarrow \frac{h-7}{x} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

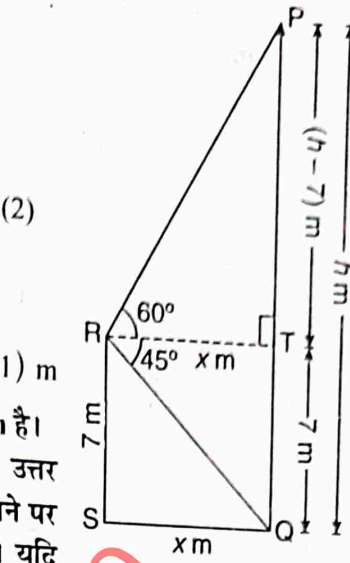
$$\Rightarrow h-7 = x\sqrt{3} \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) से $x = 7$ समीकरण (2) में रखने पर,

$$h-7 = 7\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h = 7\sqrt{3} + 7 = 7(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$$

अतः, केबल टॉवर की अभीष्ट ऊँचाई $= 7(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$ है।



आकृति : 9.14

प्रश्न 9. समुद्र तल से 75 m ऊँची लाइट हाउस के शिखर से देखने पर दो समुद्री जहाजों के अवनमन कोण 30° और 45° हैं। यदि लाइट हाउस के एक ही ओर एक जहाज दूसरे जहाज के ठीक पीछे हो तो जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए लाइट हाउस $PQ = 75 \text{ m}$ ऊँची तथा उसके एक ही ओर दो जहाज R एवं S दिए हैं जिनके अवनमन कोण लाइट हाउस के शिखर P से क्रमशः $\angle TPR = 30^\circ$ एवं $\angle TPS = 45^\circ$ हैं जहाँ TP एक क्षैतिज रेखा है। (देखिए आकृति 9.15)

यहाँ $\angle PRQ = \angle TPR = 30^\circ$ एवं $\angle PSQ = \angle TPS = 45^\circ$ है तथा $RS = x \text{ m}$ एवं $SQ = y \text{ m}$ है, तो समकोण ΔPQS में,

$$\frac{PQ}{SQ} = \tan PSQ \Rightarrow \frac{75}{y} = \tan 45^\circ = 1$$

$$\Rightarrow y = 75 \text{ m} \quad \dots(1)$$

एवं समकोण ΔPQR में,

$$\frac{PQ}{RQ} = \tan PRQ \Rightarrow \frac{PQ}{RS + SQ} = \tan 30^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{75}{x+y} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x+y = 75\sqrt{3} \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) से $y = 75 \text{ m}$ समीकरण (2) में रखने पर,

$$\Rightarrow x + 75 = 75\sqrt{3}$$

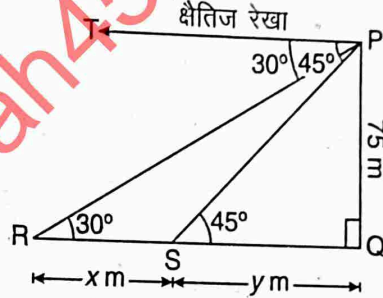
$$\Rightarrow x = 75\sqrt{3} - 75 = 75(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$$

अतः, जहाजों के बीच की अभीष्ट दूरी $= 75(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$ है।

उत्तर

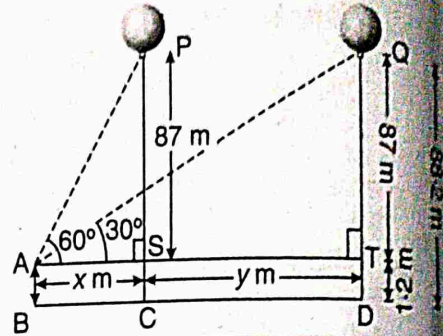
प्रश्न 10. 1.2 m लम्बी एक लड़की भूमि से 88.2 m की ऊँचाई पर एक क्षैतिज रेखा में हवा में उड़ रहे गुब्बारे को देखती है। किसी क्षण लड़की की आँख से गुब्बारे का उन्नयन कोण 60° है। कुछ समय बाद उन्नयन कोण घटकर 30° हो जाता है (देखिए आकृति 9.16)। इस अन्तराल के दौरान गुब्बारे द्वारा तय की गयी दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए एक गुब्बारा P पृथ्वी से $PC = 88.2$ मीटर की ऊँचाई पर एक क्षैतिज रेखा में उड़ रहा है जो कुछ समय बाद वह Q स्थिति में आता है जिसकी ऊँचाई $QD = PC = 88.2 \text{ m}$



आकृति : 9.15

है। एक लड़की $AB = 1.2$ m के बिन्दु B पर खड़ी है। लड़की के नेत्रों से जाने वाली क्षैतिज रेखा AST है। A से गुब्बारे की प्रथम स्थिति P का उन्नयन कोण $\angle PAS = 60^\circ$ तथा स्थिति Q का उन्नयन कोण $\angle QAT = 30^\circ$ है। यहाँ $TD = SC = AB = 1.2$ m एवं $PS = QT = QD - TD = 88.2 - 1.2 = 87$ m तथा $AS = x$ m एवं $ST = y$ m है, तो समकोण $\triangle PSA$ में,



आकृति : 9.16

$$\frac{PS}{AS} = \tan PAS \Rightarrow \frac{87}{x} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{87}{\sqrt{3}} \quad \dots(1)$$

एवं समकोण $\triangle QTA$ में,

$$\frac{QT}{AT} = \tan QAT \Rightarrow \frac{QT}{AS + ST} = \tan 30^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{87}{x + y} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x + y = 87\sqrt{3} \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) से $x = \frac{87}{\sqrt{3}}$ समीकरण (2) में रखने पर,

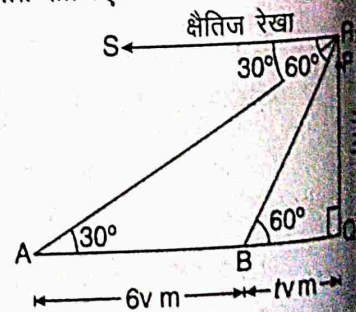
$$\frac{87}{\sqrt{3}} + y = 87\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow y = 87\sqrt{3} - \frac{87}{\sqrt{3}} = \frac{87 \times 3 - 87}{\sqrt{3}} = \frac{87 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times 29 \times 3}{\sqrt{3}} = 58\sqrt{3} \text{ m}$$

अतः, गुब्बारे द्वारा चली गयी अभीष्ट दूरी = $58\sqrt{3}$ m है।

प्रश्न 11. एक सीधा राजमार्ग एक मीनार के पाद तक जाता है। मीनार के शिखर पर खड़ा एक आदमी एक कार को 30° के अवनमन कोण पर देखता है जो कि मीनार के पाद की ओर एकसमत चाल से जाती है। छः सेकण्ड बाद कार का अवनमन कोण 60° हो गया। इस बिन्दु से मीनार के पाद तक पहुँचने में कार द्वारा लिया गया समय ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि एक आदमी RP किसी मीनार PQ के शिखर P पर खड़ा है तथा स्थिति A पर कार का अवनमन कोण $\angle SRA = 30^\circ$ है तथा कार v m/s की चाल से $AB = 6v$ m की दूरी तय करते हुए B पर आ जाती है, जहाँ उसका अवनमन कोण $\angle SRB = 60^\circ$ हो जाता है। इस बिन्दु से मीनार के पाद तक जाने में t सेकण्ड में $BQ = tv$ m दूरी तय करती है, तो



आकृति : 9.17

$$\angle RAQ = \angle SRA = 30^\circ$$

$$\text{एवं } \angle RBQ = \angle SRB = 60^\circ$$

क्योंकि उन्नयन कोण अवनमन कोण के बराबर होते हैं। यदि आदमी सहित मीनार की ऊँचाई $RQ = h$ m हो तो समकोण $\triangle RQB$ में,

$$\frac{RQ}{BQ} = \tan RBQ \Rightarrow \frac{h}{tv} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h = tv\sqrt{3}$$

एवं समकोण ΔRQA में,

$$\frac{RQ}{AQ} = \tan RAQ \Rightarrow \frac{RQ}{AB + BQ} = \tan 30^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{h}{6v + tv} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow h\sqrt{3} = 6v + tv \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) से h का मान समीकरण (2) में रखने पर,

$$tv\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6v + tv$$

$$\Rightarrow 3tv = 6v + tv \Rightarrow 2t = 6 \Rightarrow t = \frac{6}{2} = 3$$

अतः, कार द्वारा लिया गया अभीष्ट समय = 3 सेकण्ड है।

उत्तर

12. भूमि के एक बिन्दु P से एक 10 मीटर ऊँचे भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। भवन के शिखर पर एक ध्वज को लहराया गया है और P से ध्वज के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। ध्वज-दण्ड की लम्बाई और बिन्दु P से भवन की दूरी ज्ञात कीजिए। ($\sqrt{3} = 1.732$)

(2019)

हल : माना, AB भवन व BC ध्वजदण्ड है। हमें ध्वजदण्ड BC की लम्बाई व बिन्दु P से भवन की दूरी PA ज्ञात करनी है।

माना, $BC = x$ m.

अब, समकोण ΔPAB में,

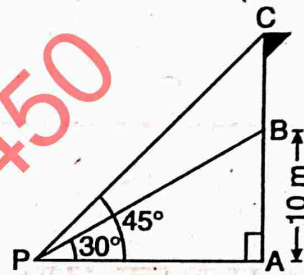
$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{PA} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{PA}$$

$$\Rightarrow PA = 10\sqrt{3}$$

$$= 10 \times 1.732$$

$$= 17.32$$

उत्तर



आकृति : 9.18

पुनः, समकोण ΔPAC में,

$$\tan 45^\circ = \frac{AC}{PA} \Rightarrow 1 = \frac{AB + BC}{17.32}$$

$$\Rightarrow 17.32 = 10 + x \Rightarrow x = 17.32 - 10 = 7.32 \text{ m}$$

उत्तर

13. एक बहुमंजिल भवन के शिखर से देखने पर एक 8 m ऊँचे भवन के शिखर और तल के अवनमन कोण क्रमशः 30° और 45° हैं। बहुमंजिल भवन की ऊँचाई और दो भवनों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

(2019)

हल : माना, PC एक बहुमंजिल भवन है। जिसके शिखर P से 8 m ऊँचे भवन के शिखर B व तल A के अवनमन कोण क्रमशः 30° व 45° हैं। हमें बहुमंजिल भवन की ऊँचाई PC व दोनों भवनों के बीच की दूरी AC ज्ञात करनी है।

अब, समकोण ΔBDP में,

$$\tan 30^\circ = \frac{PD}{BD} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{PD}{BD}$$

$$\Rightarrow BD = PD\sqrt{3} \quad \dots(1)$$

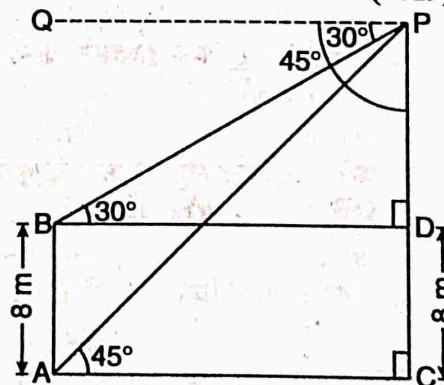
पुनः, समकोण ΔACP में,

$$\tan 45^\circ = \frac{PC}{AC} \Rightarrow 1 = \frac{CD + PD}{BD} \quad (\because AC = BD)$$

$$\Rightarrow BD = 8 + PD$$

$$\Rightarrow PD\sqrt{3} = 8 + PD$$

[समीकरण (1) से]



आकृति : 9.19

$$\Rightarrow PD = \frac{8}{(\sqrt{3}-1)} = \frac{8}{(\sqrt{3}-1)} \times \frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)} = \frac{8(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2 - (1)^2} = 4(\sqrt{3}+1)$$

∴ बहुमंजिल भवन की ऊँचाई $PC = CD + PD = 8 + 4(\sqrt{3}+1) = 4(3 + \sqrt{3})$ m उत्तर

$$\begin{aligned} \text{साथ ही, दोनों भवनों के बीच की दूरी, } AC = BD = PD\sqrt{3} &= 4(\sqrt{3}+1) \times \sqrt{3} \\ &= 4(3 + \sqrt{3}) \text{ m} \end{aligned}$$

उत्तर
□

अध्याय

10

वृत्त
[Circle]

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

बहु-विकल्पीय प्रश्न

- यदि दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 4 cm एवं 5 cm हैं तो बाह्य वृत्त की प्रत्येक वृत्त जीवा जो अन्तः वृत्त की स्पर्श रेखा हो, की लम्बाई होगी :
(a) 3 cm (b) 6 cm (c) 9 cm (d) 1 cm.
- 5 cm त्रिज्या वाले वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PQ केन्द्र O से जाने वाली एक रेखा से बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है कि $OQ = 12$ cm | PQ की लम्बाई है :
(a) 12 cm (b) 13 cm (c) 8.5 cm (d) $\sqrt{119}$ cm.
- एक बिन्दु Q से एक वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाई 24 cm तथा Q की केन्द्र से दूरी 25 cm है, तो वृत्त की त्रिज्या है :
(a) 7 cm (b) 12 cm (c) 15 cm (d) 24.5 cm.
- यदि TP, TQ केन्द्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं कि $\angle POQ = 110^\circ$, तो $\angle PTQ$ है :
(a) 60° (b) 70° (c) 80° (d) 90° .
- यदि एक बिन्दु P से O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर PA, PB स्पर्श रेखाएँ परस्पर 80° के कोण पर मुड़ी हैं, तो $\angle POA$ बराबर है :
(a) 50° (b) 60° (c) 70° (d) 80° . (2020)
- वृत्त के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की संख्या होगी :
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 0. (2022)

उत्तर—1. (b), 2. (d), 3. (a), 4. (b), 5. (a), 6. (a).

रिक्त स्थानों की पूर्ति

- स्पर्श बिन्दु से जाने वाली त्रिज्या स्पर्श रेखा पर होती है।
- किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उसे बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है। (2020)
- एक रेखा जो वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है वह रेखा कहलाती है। (2022)

4. एक वृत्त की समान्तर स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं।
 5. वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को कहते हैं।
 उत्तर—1. लम्ब, 2. केवल एक, 3. छेदक, 4. दो, 5. स्पर्श बिन्दु।

जोड़ी मिलाइए

स्तम्भ 'अ'

- वृत्त के अन्तः बिन्दु से खींची गयी स्पर्श रेखाओं की संख्या
 - वृत्त के किसी बिन्दु से खींची गयी स्पर्श रेखाओं की संख्या
 - वृत्त के बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं की संख्या
 - स्पर्श रेखा और स्पर्श बिन्दु से जाने वाली त्रिज्या के बीच बना कोण
 - वृत्त को केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा
- उत्तर—1.→(c), 2.→(d), 3.→(e), 4.→(a), 5.→(b).

स्तम्भ 'ब'

- समकोण
- स्पर्श रेखा
- शून्य (0)
- एक
- दो

सत्य/असत्य कथन

- किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गयी स्पर्श रेखाएँ बराबर होती हैं।
 - किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गयी स्पर्श रेखाएँ असमान होती हैं।
 - बाह्य बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गयी स्पर्श रेखाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अन्तरित करती हैं।
 - बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ सदैव वृत्त की त्रिज्या के बराबर होती हैं।
 - बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गयी स्पर्श रेखाएँ स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाली जीवा के साथ बराबर कोण अन्तरित करती हैं।
 - वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है। (2019)
 - वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को छेदक रेखा कहते हैं। (2019)
- उत्तर—1. सत्य, 2. असत्य, 3. सत्य, 4. असत्य, 5. सत्य, 6. सत्य, 7. सत्य।

एक शब्द/वाक्य में उत्तर

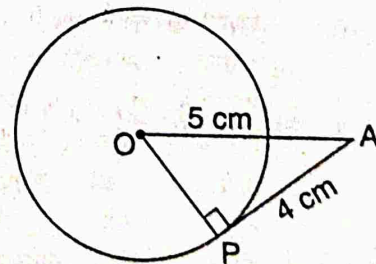
- किसी वृत्त को केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा क्या कहलाती है।
 - स्पर्श रेखा और वृत्त के उभयनिष्ठ बिन्दु को क्या कहते हैं?
 - किसी वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं?
 - एक वृत्त की कितनी समान्तर स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं? (2019)
- उत्तर—1. स्पर्श रेखा, 2. स्पर्श बिन्दु, 3. अनन्तशः अनेक, 4. दो।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. एक बिन्दु A से जो एक वृत्त के केन्द्र से 5 cm की दूरी पर है, वृत्त पर बिन्दु A से खींची स्पर्श रेखा की लम्बाई 4 cm है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : O केन्द्र वाले वृत्त के बाहर A कोई बिन्दु है। OA को मिलाया गया है तथा A से वृत्त पर एक स्पर्श रेखा AP खींची गयी है। OP को मिलाया गया है।

यहाँ $OA = 5\text{ cm}$ एवं $AP = 4\text{ cm}$ दिए हैं। यहाँ $\angle OPA = 90^\circ$ अब, समकोण $\triangle OPA$ में,



आकृति : 10.1

(पाइथागोरस प्रमेय से)

$$OP = \sqrt{(OA)^2 - (AP)^2}$$

$$= \sqrt{(5)^2 - (4)^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3 \text{ cm}$$

प्रश्न 2. 5 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PQ केन्द्र O से जाने वाली एक रेखा से बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है कि OQ = 12 सेमी। PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिए। (2020)

हल : यहाँ, OP = 5 cm, OQ = 12 cm,
PQ = ?

चूँकि, स्पर्श रेखा त्रिज्या के साथ समकोण बनाती है। अतः, $\Delta OPQ = 90^\circ$.

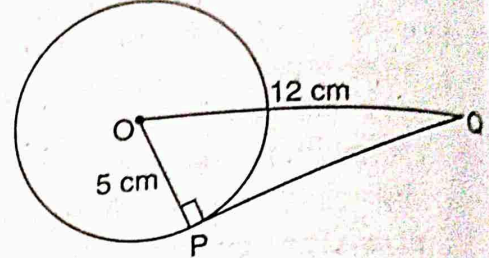
अब, समकोण ΔOPQ में,
पाइथागोरस प्रमेय से,

$$PQ = \sqrt{(OQ)^2 - (OP)^2}$$

$$= \sqrt{(12)^2 - (5)^2}$$

$$= \sqrt{144 - 25}$$

$$= \sqrt{119} \text{ cm}$$



आकृति : 10.2

उत्तर

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है। (2022)

हल : ज्ञात है : O केन्द्र वाला एक वृत्त जिसके एक बिन्दु P पर स्पर्श रेखा XY दी गई है।

सिद्ध करना है : $OP \perp XY$.

रचना : XY पर P के अतिरिक्त एक बिन्दु Q लिया। OQ को मिलाया।

उपपत्ति : चूँकि बिन्दु Q वृत्त के बाहर स्थित है।

अतः, $OQ > OP$

क्योंकि यह बिन्दु P के अतिरिक्त XY के प्रत्येक बिन्दु के लिए सत्य है, OP बिन्दु O से XY के अन्य बिन्दुओं की न्यूनतम दूरी है। इसलिए, OP, XY पर लम्ब है।

अतः, $OP \perp XY$

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि दो सकेन्द्रीय वृत्तों में बड़े वृत्त की जीवा जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती है, स्पर्श बिन्दु पर समद्विभाजित होती है। (2022)

हल : दिया है : O केन्द्र वाले दो सकेन्द्रीय वृत्त C_1 व C_2 तथा बड़े वृत्त C_1 की जीवा AB जो छोटे वृत्त C_2 को बिन्दु P पर स्पर्श करती है।

सिद्ध करना है : $AP = BP$.

रचना : OP रेखाखण्ड खींचा।

उपपत्ति : वृत्त C_2 के बिन्दु P पर AB स्पर्श रेखा है और OP त्रिज्या है। अतः, प्रमेय 10.1 से, $OP \perp AB$.

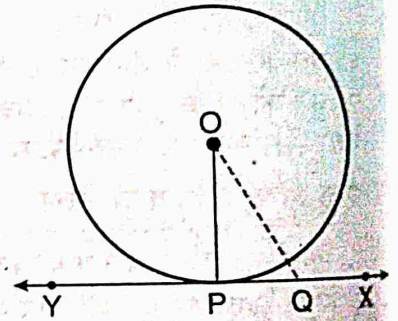
अब वृत्त C_1 की एक जीवा AB है और $OP \perp AB$

अतः, OP जीवा AB को समद्विभाजित करेगी क्योंकि केन्द्र से जीवा पर खींचा गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है।

अतः,

$$AP = BP$$

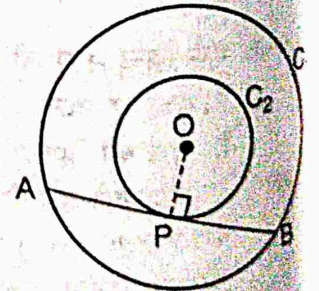
इति सिद्धम्



आकृति : 10.3

इति सिद्धम्

(2022)

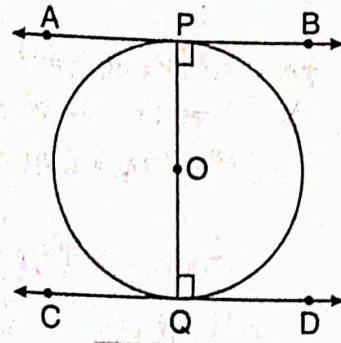


आकृति : 10.4

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरोँ पर खींची गयी स्पर्श रेखाएँ समान्तर होती हैं।

हल : माना लीजिए PQ एक O केन्द्र वाले वृत्त का व्यास है जिसके सिरोँ पर P और Q पर स्पर्श रेखाएँ क्रमशः AB एवं CD खींची गयी हैं।

चूँकि $OP \perp AB$
 $\Rightarrow \angle OPB = 90^\circ$... (1)
 चूँकि $OQ \perp CD$
 $\Rightarrow \angle OQC = 90^\circ$... (2)
 $\Rightarrow \angle OPB + \angle OQC = 90^\circ$ (एकान्तर कोण)
 $\Rightarrow AB \parallel CD$



आकृति : 10.5

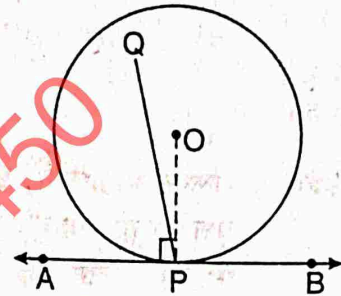
अतः, किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरोँ पर खींची गयी स्पर्श रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं।

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि स्पर्श बिन्दु से स्पर्श रेखा पर खींचा गया लम्ब वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है।

हल : दिया है : एक वृत्त जिसका केन्द्र O है तथा इसकी एक स्पर्श रेखा AB वृत्त को स्पर्श बिन्दु P पर स्पर्श करती है।
 $QP \perp AB$ खींचा गया है।

सिद्ध करना है : PQ वृत्त के केन्द्र O से होकर जाता है। मान लीजिए कि PQ वृत्त के केन्द्र O से होकर नहीं जाता तो त्रिज्या OP को मिलाइए।

चूँकि $OP \perp AB$
 लेकिन $QP \perp AB$ (दिया हुआ है)
 चूँकि किसी रेखा के किसी बिन्दु पर एक ही ओर दो लम्ब नहीं हो सकते, इसलिए OP एवं QP सम्पाती हैं।



आकृति : 10.6

अतः, स्पर्श बिन्दु से स्पर्श रेखा पर खींचा गया लम्ब वृत्त के केन्द्र से होकर जाता है।

इति सिद्धम्

प्रश्न 5. दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ 5 cm तथा 3 cm हैं। बड़े वृत्त की उस जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती हो।

हल : O केन्द्र वाले दो संकेन्द्रीय वृत्त दिए हैं जिनकी त्रिज्याएँ क्रमशः $OQ = 5$ cm एवं $OM = 3$ cm हैं, जहाँ PQ बड़ी त्रिज्या वाले वृत्त की जीवा है तथा छोटी त्रिज्या वाले वृत्त को स्पर्श बिन्दु M पर स्पर्श रेखा है।

$$OM \perp PQ \Rightarrow \angle OMQ = 90^\circ$$

अब समकोण $\triangle OMQ$ में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$MQ = \sqrt{OQ^2 - OM^2}$$

$$MQ = \sqrt{(5)^2 - (3)^2}$$

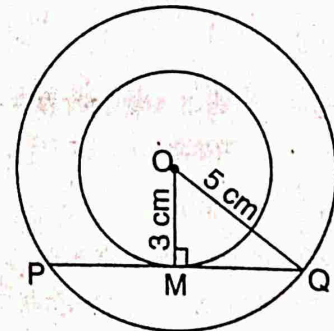
$$= \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}$$

चूँकि $PQ = 2MQ = 2 \times 4 = 8 \text{ cm}$

(केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।)

अतः, अभीष्ट जीवा की लम्बाई 8 cm है।

उत्तर



आकृति : 10.7

प्रश्न 6. एक वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज $ABCD$ खींचा गया है। (देखिए संलग्न आकृति : 10.8)। सिद्ध कीजिए कि—

$$AB + CD = AD + BC.$$

हल : एक दिए हुए वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज $ABCD$ दिया है, जो वृत्त को क्रमशः P, Q, R एवं S बिन्दुओं पर (चित्रानुसार) स्पर्श करता है।

चूँकि बिन्दु A से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ AP एवं AS हैं।

$$\Rightarrow AP = AS \quad \dots(1)$$

चूँकि बिन्दु B से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ BP एवं BQ हैं :

$$\Rightarrow BP = BQ \quad \dots(2)$$

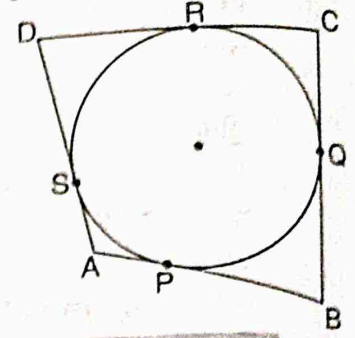
चूँकि बिन्दु C से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ CR एवं CQ हैं।

$$\Rightarrow CR = CQ \quad \dots(3)$$

चूँकि बिन्दु D से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ DS एवं DR हैं।

$$\Rightarrow DR = DS \quad \dots(4)$$

$$\Rightarrow AP + BP + CR + DR = AS + DS + BQ + CQ$$



आकृति : 10.8

[समीकरण (1) + (2) + (3) + (4) से
(चित्रानुसार) इति सिद्धम्

$$\Rightarrow AB + CD = AD + BC$$

प्रश्न 7. संलग्न आकृति में, XY तथा $X'Y'$ केन्द्र O वाले किसी वृत्त पर दो समान्तर स्पर्श रेखाएँ हैं और स्पर्श बिन्दु C पर स्पर्श रेखा AB , XY को A तथा $X'Y'$ को B पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि—

$$\angle AOB = 90^\circ \text{ है।}$$

हल : चित्रानुसार स्पर्श रेखाएँ $XY \parallel X'Y'$ दिया है। रेखाखण्ड AB बिन्दु C पर स्पर्श रेखा है जो $XY \parallel X'Y'$ को क्रमशः बिन्दु A एवं B पर प्रतिच्छेद कर रहा है।

चूँकि $XY \parallel X'Y'$ को तिर्यक रेखा AB प्रतिच्छेद करती है।

$$\Rightarrow \angle XAB + \angle X'BA = 180^\circ \quad (\text{एक ही ओर के अन्तःकोण हैं}) \dots(1)$$

चूँकि बाह्य बिन्दु A से दो स्पर्श रेखाएँ AX एवं AB हैं तथा AO द्वारा बाह्य बिन्दु को केन्द्र से मिलाया गया है।

$$\Rightarrow \angle OAB = \frac{1}{2} \angle XAB \quad \dots(2)$$

चूँकि बाह्य बिन्दु B से दो स्पर्श रेखाएँ BX' एवं BA हैं तथा BO द्वारा बाह्य बिन्दु को केन्द्र से मिलाया गया है।

$$\Rightarrow \angle OBA = \frac{1}{2} \angle X'BA \quad \dots(3)$$

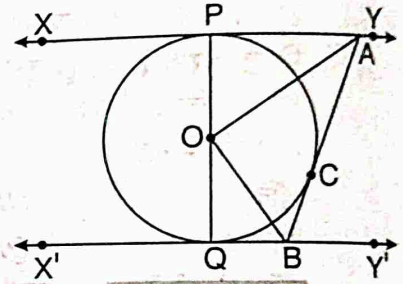
$$\Rightarrow \angle OAB + \angle OBA = \frac{1}{2} \angle XAB + \frac{1}{2} \angle X'BA \quad [\text{समीकरण (2) + (3) से}] \dots(4)$$

$$\Rightarrow \angle OAB + \angle OBA = \frac{1}{2} (\angle XAB + \angle X'BA) = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ \quad \dots(5)$$

$$\therefore \angle AOB + \angle OAB + \angle OBA = 180^\circ \quad (\Delta AOB \text{ के अन्तःकोण हैं}) \dots(6)$$

$$\Rightarrow \angle AOB + 90^\circ = 180^\circ \quad [\text{समीकरण (5) एवं (6) से}]$$

$$\Rightarrow \angle AOB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \quad \text{इति सिद्धम्}$$



आकृति : 10.9

प्रश्न 8. सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श रेखाओं को बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण का सम्पूर्ण होता है।

हल : मान लीजिए O केन्द्र वाले वृत्त के बाहर स्थित बिन्दु P से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ PQ एवं PR खींची गयी हैं। QR को मिलाया गया है तथा QR वृत्त के केन्द्र पर $\angle QOR$ बनाते हैं।

रचना : OP को मिलाइए (देखिए आकृति 10.10)

समकोण $\triangle OQP$ में, $\angle OQP = 90^\circ$ (समकोण है)

$\Rightarrow \angle QOP + \angle QPO = 90^\circ$... (1)

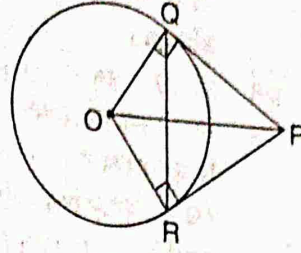
समकोण $\triangle ORP$ में, $\angle ORP = 90^\circ$ (समकोण)

$\Rightarrow \angle ROP + \angle RPO = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle QOP + \angle ROP + \angle QPO + \angle RPO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$... (2)

$\Rightarrow \angle QOR + \angle QPR = 180^\circ$ [समीकरण (1) + (2) से]
(सम्पूर्ण कोण हैं)

अतः, बाह्य बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण का सम्पूर्ण होता है। इति सिद्धम्



आकृति : 10.10

प्रश्न 9. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के परिगत समान्तर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है।

हल : मान लीजिए $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज किसी O केन्द्र वाले वृत्त के परिगत दिया हुआ है। इसकी भुजाएँ AB, BC, CD एवं DA क्रमशः वृत्त को बिन्दुओं P, Q, R एवं S पर स्पर्श करती हैं। OA, OB, OC एवं OD को मिलाया (देखिए आकृति 10.11)। चूँकि वृत्त के बाह्य बिन्दु A से वृत्त पर खींची गयी स्पर्श रेखाएँ AB एवं AD हैं तथा A को केन्द्र O से मिलाने वाली रेखा AO है।

$\Rightarrow \angle BAO = \angle DAO = \frac{1}{2} \angle BAD$... (1)

चूँकि वृत्त के बाह्य बिन्दु B से वृत्त पर खींची गयी स्पर्श रेखाएँ BA एवं BC हैं तथा B को केन्द्र O से मिलाने वाली रेखा BO है।

$\Rightarrow \angle ABO = \angle CBO = \frac{1}{2} \angle ABC$... (2)

$\Rightarrow \angle BAO + \angle ABO = \frac{1}{2} \angle BAD + \frac{1}{2} \angle ABC$ [समीकरण (1) + (2) से] ... (3)

लेकिन $\angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$ [समान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोण हैं] ... (4)

$\Rightarrow \angle BAO + \angle ABO = \frac{1}{2} (\angle BAD + \angle ABC) = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$... (5)

$\triangle ABO$ में, $\angle BAO + \angle ABO + \angle AOB = 180^\circ$ [त्रिभुज ABO के अन्तःकोण हैं] ... (6)

$\Rightarrow \angle AOB = 90^\circ$ [समीकरण (6) - समीकरण (5) से]

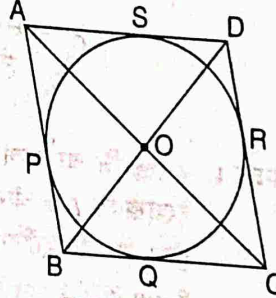
इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\angle BOC = 90^\circ, \angle COD = 90^\circ \text{ एवं } \angle DOA = 90^\circ$$

$\Rightarrow \angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$ एवं $\angle AOB + \angle AOD = 180^\circ$ जो रैखिक युग्म हैं।

$\Rightarrow AC$ एवं BD सरल रेखाएँ हैं।

चूँकि AC एवं BD समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण हैं और परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।
अतः $ABCD$ एक समचतुर्भुज है। इति सिद्धम्



आकृति : 10.11

प्रश्न 10. किसी वृत्त के बाह्य बिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखाएँ तुल्य होती हैं। सिद्ध कीजिए।

अथवा

किसी बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती हैं। सिद्ध कीजिए। (2019, 20)

हल : ज्ञात है : वृत्त $C(O, r)$ पर बाह्य बिन्दु P से खींचे गए दो स्पर्श रेखाखण्ड PQ और PR हैं।

सिद्ध करना है : $PQ = PR$

रचना : रेखाखण्ड OP , OQ और OR खींचिए।

उपपत्ति : $\therefore PQ$ एवं PR स्पर्श रेखाएँ और OQ एवं OR त्रिज्याएँ हैं।

$\therefore OQ \perp PQ$
 एवं $OR \perp PR$
 $\therefore \angle OQP = \angle ORP = 90^\circ$

अब समकोण ΔOQP एवं ΔORP में,

\therefore कर्ण $OP =$ कर्ण OP

\therefore भुजा $OQ =$ भुजा OR

$\therefore \Delta OQP \cong \Delta ORP$

$\therefore PQ = PR$

आकृति : 10.12

(उभयनिष्ठ है)
 (वृत्त की त्रिज्याएँ हैं)
 (R.H.S. सर्वांगसम प्रमेय से)
 इति सिद्धम्

दीर्घ उत्तरीय/विश्लेषणात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. 4 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के परिगत एक त्रिभुज ABC इस प्रकार खींचा गया है कि रेखाखण्ड BD और DC (जिनमें स्पर्श बिन्दु D द्वारा BC विभाजित है) की लम्बाइयाँ क्रमशः 8 cm और 6 cm हैं। (देखिए आकृति 10.13) भुजाएँ AB और AC ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि O केन्द्र वाले एवं 4 cm त्रिज्या वाले वृत्त के परिगत एक त्रिभुज ABC है जिसकी भुजाएँ BC , CA एवं AB वृत्त के क्रमशः D , E एवं F बिन्दुओं पर स्पर्श करती है। $CD = 6$ cm एवं $DB = 8$ cm है। OD , OE एवं OF तथा OA , OB एवं OC को मिलाइए।

चूँकि $OD = OE = OF = 4$ cm ... (1)

(वृत्त की त्रिज्याएँ हैं)

$CE = CD = 6$ cm एवं $BD = BF = 8$ cm ; $AE = AF = x$ cm (मान लीजिए)

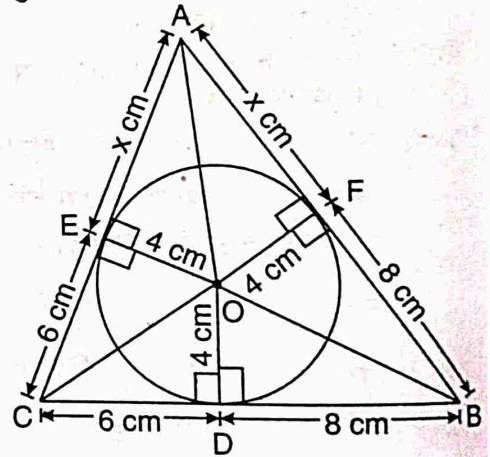
अब $AB = AF + BF = (x + 8)$ cm, $AC = AE + CE = (x + 6)$ cm

एवं $BC = BD + DC = 8 + 6 = 14$ cm

$$ar(\Delta OBC) = \frac{1}{2} \times BC \times OD = \frac{1}{2} \times 14 \times 4 = 28 \text{ cm}^2$$

$$ar(\Delta OCA) = \frac{1}{2} \times CA \times OE = \frac{1}{2} \times (x + 6) \times 4 = (2x + 12) \text{ cm}^2$$

एवं $ar(\Delta OAB) = \frac{1}{2} \times AB \times OF = \frac{1}{2} \times (x + 8) \times 4 = (2x + 16) \text{ cm}^2$



आकृति : 10.13

$$\begin{aligned} \Rightarrow ar(\Delta ABC) &= ar(OBC) + ar(OCA) + ar(OAB) \\ \Rightarrow ar(\Delta ABC) &= 28 \text{ cm}^2 + (2x + 12) \text{ cm}^2 + (2x + 16) \text{ cm}^2 \\ \Rightarrow ar(\Delta ABC) &= (4x + 56) \text{ cm}^2 \end{aligned} \quad \dots(1)$$

अब हीरो के सूत्र से,

$$s = \frac{AB + BC + CA}{2} = \frac{(x+8) + 14 + (x+6)}{2} = (x+14) \text{ cm}$$

$$ar(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\Rightarrow (4x+56) = \sqrt{(x+14)(x+14-x-8)(x+14-14)(x+14-x-6)}$$

$$\Rightarrow (4x+56) = \sqrt{(x+14)(6)(x)(8)} \quad (\because \text{दोनों क्षेत्रफल बराबर हैं})$$

$$\Rightarrow 4(x+14) = \sqrt{16(3x^2+42x)} = 4\sqrt{3x^2+42x}$$

$$\Rightarrow (x+14)^2 = 3x^2+42x$$

$$\Rightarrow x^2+28x+196 = 3x^2+42x$$

$$\Rightarrow 2x^2+14x-196 = 0$$

$$\Rightarrow x^2+7x-98 = 0$$

$$\Rightarrow x^2+14x-7x-98 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+14)-7(x+14) = 0$$

$$\Rightarrow (x+14)(x-7) = 0$$

या तो

$$x+14 = 0 \text{ तब } x = -14$$

(दूरियों ऋणात्मक नहीं होतीं, अतः यह असम्भव है)

अथवा

$$x-7 = 0 \Rightarrow x = 7$$

$$\Rightarrow AB = x+8 = 7+8 = 15 \text{ cm}$$

उत्तर

$$\text{एवं } AC = x+6 = 7+6 = 13 \text{ cm}$$

उत्तर

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के परिगत बना चतुर्भुज की आमने-सामने की भुजाएँ केन्द्र पर सम्पूरक कोण अन्तरित करती हैं।

हल : मान लीजिए कि O केन्द्र वाले वृत्त के परिगत बना चतुर्भुज $ABCD$ है। OA, OB, OC एवं OD को मिलाया गया है। (देखिए आकृति 10.14)

चतुर्भुज $ABCD$ की भुजाएँ वृत्त को P, Q, R एवं S पर स्पर्श करती हैं। चूँकि बाह्य बिन्दु D से वृत्त पर खींची गयी स्पर्श रेखाखण्ड DA एवं DC हैं तथा DO बिन्दु D को केन्द्र O से मिलाने वाली रेखा है।

चूँकि $DO, \angle ADC$ की समद्विभाजक है।

$$\Rightarrow \angle CDO = \angle ADO = \frac{1}{2} \angle D \quad \dots(1)$$

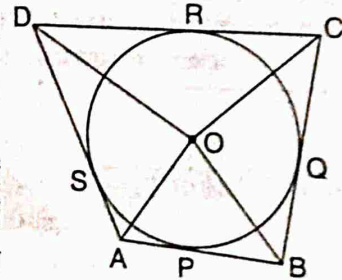
$$\text{इसी प्रकार } \angle DAO = \angle BAO = \frac{1}{2} \angle A \quad \dots(2)$$

$$\angle ABO = \angle CBO = \frac{1}{2} \angle B \quad \dots(3)$$

$$\text{एवं } \angle BCO = \angle DCO = \frac{1}{2} \angle C \quad \dots(4)$$

$$\text{चूँकि } \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ \quad (\text{चतुर्भुज के अन्तःकोण हैं})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle B + \frac{1}{2} \angle C + \frac{1}{2} \angle D = 180^\circ \quad \dots(5)$$



आकृति : 10.14

$$\begin{aligned} \therefore \angle DOC + \angle CDO + \angle DCO &= 180^\circ \text{ } (\Delta DOC \text{ के अन्तःकोण हैं}) \dots(6) \\ \Rightarrow \angle DOC + \frac{1}{2} \angle D + \frac{1}{2} \angle C &= 180^\circ \dots(7) \\ &\text{[समीकरण (1) एवं (4) से मान रखने पर]} \\ \therefore \angle AOB + \angle ABO + \angle BAO &= 180^\circ \text{ } (\Delta AOB \text{ के अन्तःकोण हैं}) \dots(8) \\ \Rightarrow \angle AOB + \frac{1}{2} \angle B + \frac{1}{2} \angle A &= 180^\circ \dots(9) \\ &\text{[समीकरण (2) एवं (3) से मान रखने पर]} \\ \Rightarrow \angle DOC + \angle AOB + \frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle B + \frac{1}{2} \angle C + \frac{1}{2} \angle D &= 360^\circ \dots(10) \\ &\text{[समीकरण (7) + (9) से]} \\ \Rightarrow \angle DOC + \angle AOB &= 180^\circ \text{ [समीकरण (10) - समीकरण (5) से]} \\ \text{अतः, वृत्त के परिगत बनी चतुर्भुज की आमने-सामने की भुजाएँ केन्द्र पर सम्पूरक कोण} \\ \text{अन्तरित करती हैं।} \end{aligned}$$

इति सिद्धम्



अध्याय

11

रचनाएँ

[Constructions]

विशेष : माध्यमिक शिक्षा मण्डल, मध्यप्रदेश, भोपाल द्वारा शैक्षिक सत्र: 2022-23 के लिए यह अध्याय पाठ्यक्रम से हटा दिया गया है।

अध्याय

12

वृत्त से सम्बन्धित क्षेत्रफल

[Areas Related to Circles]

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

बहु-विकल्पीय प्रश्न

- वृत्त का चाप, वृत्त की त्रिज्या और चाप द्वारा केन्द्र पर बने कोण में क्या सम्बन्ध है :
 - कोण = चाप × त्रिज्या
 - चाप = कोण × त्रिज्या
 - त्रिज्या = चाप × कोण
 - इनमें से कोई नहीं।

2. यदि किसी वृत्त का क्षेत्रफल 154 cm^2 है, तो इसकी परिमाप होगी :
 (a) 11 cm (b) 22 cm (c) 44 cm (d) 55 cm.
3. r त्रिज्या के वृत्त के एक त्रिज्यखण्ड का केन्द्रीय कोण θ (डिग्री में) है, तो त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल होगा :
 (a) $\frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ}$ (b) $\frac{\pi r^2 \theta}{180^\circ}$ (c) $\frac{2\pi r \theta}{360^\circ}$ (d) $\frac{2\pi r \theta}{180^\circ}$.
4. यदि एक वृत्त का परिमाप और क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से बराबर हैं, तो उस वृत्त की त्रिज्या है :
 (a) 2 मात्रक (b) π मात्रक (c) 4 मात्रक (d) 7 मात्रक।
5. त्रिज्या R वाले वृत्त के उस त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल जिसका कोण p° है, निम्नलिखित है :
 (a) $\frac{p^\circ}{180^\circ} \times 2\pi R$ (b) $\frac{p^\circ}{180} \times \pi R^2$ (c) $\frac{p^\circ}{360^\circ} \times 2\pi R$ (d) $\frac{p^\circ}{720^\circ} \times 2\pi R^2$.
- उत्तर—1. (b), 2. (c), 3. (a), 4. (a), 5. (d).

रिक्त स्थानों की पूर्ति

- वृत्त के अनुदिश एक बार चलने में तय की गई दूरी उस वृत्त की कहलाती है।
 - वृत्त की परिधि के मध्य घिरे हुए क्षेत्र की माप उस वृत्त का कहलाता है।
 - एक वृत्तीय क्षेत्र का वह भाग जो दो त्रिज्याओं और संगत चाप से घिरा (परिवद्ध) हो उस वृत्त का एक कहलाता है।
 - त्रिज्यखण्ड की संगत चाप की माप उस चाप की कहलाती है।
 - वृत्तीय क्षेत्र का वह भाग जो जीवा और संगत चाप से परिवद्ध हो उस वृत्त का कहलाता है।
 - कोण θ वाले त्रिज्यखण्ड के क्षेत्रफल का सूत्र है।
 - r त्रिज्या वाले वृत्त के क्षेत्रफल का सूत्र है।
- उत्तर—1. परिधि (परिमाप), 2. क्षेत्रफल, 3. त्रिज्यखण्ड, 4. लम्बाई, 5. वृत्तखण्ड,
 6. क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360^\circ} \pi r^2$, 7. πr^2 .

जोड़ी मिलाइए

स्तम्भ 'अ'	स्तम्भ 'ब'
1. वृत्त का क्षेत्रफल	(a) $\frac{\theta}{360^\circ} \pi r^2$
2. वृत्त की परिधि की माप	(b) $d = 2r$
3. वृत्त के चाप की लम्बाई	(c) πr^2
4. वृत्त के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल	(d) $2\pi r$
5. वृत्त के व्यास d एवं त्रिज्या r में सम्बन्ध	(e) $\frac{\theta}{180^\circ} \pi r$

उत्तर—1.→(c), 2.→(d), 3.→(e), 4.→(a), 5.→(b).

सत्य/असत्य कथन

- सर्वांगसम वृत्तों के क्षेत्रफल सदैव बराबर होते हैं।
 - समरूप वृत्तों के क्षेत्रफल सदैव बराबर होते हैं।
 - सर्वांगसम वृत्तों की परिमाप सदैव बराबर होती है।
 - समरूप वृत्तों की परिमाप सदैव बराबर होती है।
 - यदि एक वृत्त की परिधि एवं एक वर्ग की परिमाप बराबर है तो वृत्त का क्षेत्रफल > वर्ग का क्षेत्रफल।
 - त्रिज्या r वाले वृत्त की परिधि = $2\pi r$.
- उत्तर—1. सत्य, 2. असत्य, 3. सत्य, 4. असत्य, 5. सत्य, 6. सत्य।

एक शब्द/वाक्य में उत्तर

1. एक वृत्त के व्यास d एवं परिधि में क्या सम्बन्ध है?
 2. एक वृत्त के व्यास d एवं उसके क्षेत्रफल में क्या सम्बन्ध है?
- उत्तर—1. परिधि = πd , 2. वृत्त का क्षेत्रफल = $\frac{1}{4} \pi d^2$.

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 19 cm और 9 cm हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि इन दोनों वृत्तों की परिधियों के योग के बराबर हो। (2020)

हल : प्रथम वृत्त की परिधि $C_1 = 2\pi r_1 = 2\pi (19) \text{ cm}$
द्वितीय वृत्त की परिधि $C_2 = 2\pi r_2 = 2\pi (9) \text{ cm}$
चूँकि संयुक्त परिधि $C = C_1 + C_2$
 $\Rightarrow 2\pi r = 2\pi (19) + 2\pi (9)$
 $= 2\pi (19 + 9) = 2\pi (28) \text{ cm}$

अतः, वृत्त की त्रिज्या, $r = 28 \text{ cm}$

प्रश्न 2. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 8 cm और 6 cm हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल इन दोनों वृत्तों के क्षेत्रफल के योग के बराबर है।

हल : प्रथम वृत्त का क्षेत्रफल $A_1 = \pi r_1^2 = \pi (8)^2 = 64\pi$
द्वितीय वृत्त का क्षेत्रफल $A_2 = \pi r_2^2 = \pi (6)^2 = 36\pi$
चूँकि संयुक्त क्षेत्रफल $A = A_1 + A_2$
 $\Rightarrow \pi r^2 = 64\pi + 36\pi = 100\pi$
 $\Rightarrow r^2 = 100$

अतः, वृत्त की त्रिज्या, $r = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$

प्रश्न 3. किसी कार के प्रत्येक पहिये का व्यास 80 cm है। यदि यह कार 66 km प्रति घण्टे की चाल से चल रही है, तो 10 मिनट में प्रत्येक पहिया कितने चक्कर लगाता है? ($\pi = 22/7$ लीजिए।)

हल : कार द्वारा 10 मिनट में चली गयी दूरी = $\frac{10}{60} \times 66 = 11 \text{ km} = 11000 \text{ m}$

मान लीजिए कार के प्रत्येक पहिये द्वारा लगाए गए चक्करों की संख्या n हो, तो

$$\pi d \times n = \text{चली गयी दूरी}$$

$$\Rightarrow \frac{22}{7} \times \frac{80}{100} \times n = 11000 \quad (\because d = 80 \text{ cm} = \frac{80}{100} \text{ m})$$

अतः, चक्करों की संख्या, $n = \frac{11000 \times 7 \times 100}{22 \times 80} = 4375$

प्रश्न 4. 6 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के एक त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 60° है। ($\pi = 22/7$ का प्रयोग कीजिए।) (2019)

हल : ज्ञात है : $r = 6 \text{ cm}$ एवं $\theta^\circ = 60^\circ$

चूँकि त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल = $\frac{\theta^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$
 $= \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times (6)^2 = \frac{132}{7} \text{ cm}^2$

प्रश्न 5. त्रिज्या 4 सेमी वाले एक वृत्त के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 30° है। साथ ही, संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$)। (2019)

हल : ज्ञात है : $r = 4 \text{ cm}$ एवं $\theta^\circ = 30^\circ$

चूँकि त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल = $\frac{\theta^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$
 $= \frac{30^\circ}{360^\circ} \times 3.14 \times (4)^2 = \frac{12.56}{3} = 4.19 \text{ cm}^2$

तथा, संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल - लघु त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$$= (\pi r^2 - 4 \cdot 19)$$

$$= [3 \cdot 14 \times (4)^2 - 4 \cdot 19]$$

$$= 46 \cdot 05 \approx 46 \cdot 1 \text{ cm}^2$$

उत्तर

प्रश्न 6. एक वृत्त के चतुर्थांश (quadrant) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि 22 cm है। ($\pi = 22/7$ का प्रयोग कीजिए।)

हल : चूँकि परिधि = $2\pi r$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{22}{7} \times r = 22$$

$$\Rightarrow r = \frac{22 \times 7}{2 \times 22} = \frac{7}{2} \text{ cm}$$

चूँकि चतुर्थांश का क्षेत्रफल = $\frac{1}{4} \pi r^2$

$$\Rightarrow \text{चतुर्थांश का क्षेत्रफल} = \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2} \times \frac{7}{2}\right) = \frac{77}{8} \text{ cm}^2$$

उत्तर

प्रश्न 7. एक घड़ी की मिनट की सुई जिसकी लम्बाई 14 cm है। इस सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 22/7$ का प्रयोग कीजिए।)

हल : चूँकि मिनट सुई 1 घण्टे में (60 मिनट में) वृत्त का एक चक्कर लगाती है।
 इसलिए 5 मिनट में $\frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ वृत्त को रचेगी।

इस वृत्त की त्रिज्या, $r =$ सुई की लम्बाई = 14 cm

$$\Rightarrow \text{वृत्त के अंश का क्षेत्रफल} = \frac{1}{12} \pi r^2$$

$$= \frac{1}{12} \times \frac{22}{7} (14)^2 = \frac{11 \times 14}{3} = \frac{154}{3} \text{ cm}^2$$

उत्तर

प्रश्न 8. किसी कार के दो वाइपर (Wiper) हैं, जो परस्पर कभी भी अच्छादित नहीं होते हैं। प्रत्येक वाइपर की पत्ती की लम्बाई 25 cm है और 115° के कोण तक घूमकर सफाई कर सकता है। पत्तियों की प्रत्येक फुहार के साथ जितना क्षेत्रफल साफ हो जाता है, वह ज्ञात कीजिए। ($\pi = 22/7$ का प्रयोग कीजिए।)

हल : प्रत्येक वाइपर 25 cm की त्रिज्या वाले उस त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल साफ करता है जिसकी त्रिज्याओं के बीच कोण $\theta = 115^\circ$ है।

दोनों वाइपरों द्वारा कुल साफ किया गया क्षेत्रफल (एक बार में)

$$= 2 \times \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= 2 \times \frac{115^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 25 \times 25 \text{ cm}^2$$

$$= \frac{23}{18} \times \frac{11}{7} \times 625 = \frac{158125}{126} \text{ cm}^2$$

उत्तर

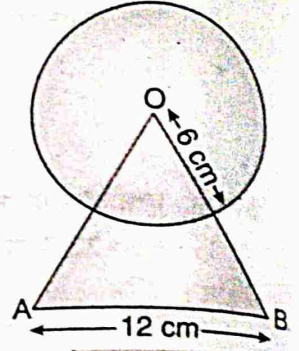
लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. संलग्न आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जहाँ भुजा 12 cm वाले एक समबाहु त्रिभुज OAB के शीर्ष O को केन्द्र मानकर 6 cm त्रिज्या वाला एकवृत्तीय चाप खींचा गया है। ($\pi = 22/7$ का प्रयोग कीजिए।)

हल : चित्रानुसार, छायांकित भाग में एक $a = 12$ cm भुजा वाला समबाहु त्रिभुज तथा एक 6 cm त्रिज्या का कोण $\theta = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$ वाला दीर्घ त्रिज्यखण्ड सम्मिलित है।

अतः ar (छायांकित भाग) $= ar(\Delta OAB) + ar$ (दीर्घ त्रिज्यखण्ड)

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + \frac{\theta}{360^\circ} \pi r^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (12)^2 + \frac{300^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times (6)^2 \\ &= 36\sqrt{3} + \frac{660}{7} = \left(\frac{660}{7} + 36\sqrt{3}\right) \text{ cm}^2 \quad \text{उत्तर} \end{aligned}$$

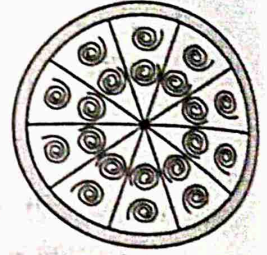


आकृति : 12.1

प्रश्न 2. एक वृत्ताकार ब्रूच (Brooch) को चाँदी के तार से बनाया जाता है, जिसका व्यास 35 mm है। तार को वृत्त के 5 व्यासों को बनाने में प्रयुक्त किया गया है जो उसे 10 बराबर त्रिज्यखण्डों में विभाजित करता है जैसा कि संलग्न आकृति में दर्शाया गया है। तो ज्ञात कीजिए : ($\pi = 22/7$ का प्रयोग कीजिए।)

(i) कुल वांछित चाँदी के तार की लम्बाई।

(ii) ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल।



आकृति : 12.2

हल : (i) चाँदी के तार से वृत्त की परिमाप एवं पाँच व्यास बनाने हैं। व्यास = 35 mm दिया है।

$$\text{वृत्त की परिमाप (परिधि)} = \pi d = \frac{22}{7} \times 35 = 110 \text{ mm}$$

$$\text{पाँच व्यासों की लम्बाई} = 5 \times d = 5 \times 35 = 175 \text{ mm}$$

अतः, तार की कुल लम्बाई = 110 mm + 175 mm = 285 mm उत्तर

(ii) पाँच व्यासों द्वारा वृत्त 10 बराबर त्रिज्यखण्डों में विभाजित हो रहा है।

$$\begin{aligned} \text{अतः प्रत्येक त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{10} \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2} \\ &= \frac{11 \times 35}{4} = \frac{385}{4} \text{ mm}^2 \quad \text{उत्तर} \end{aligned}$$

प्रश्न 3. एक छतरी में आठ तानें हैं, जो बराबर दूरी पर लगे हुए हैं। छतरी को 45 cm त्रिज्या वाला एक सपाट वृत्त मानते हुए इसकी दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (2020)

हल : बराबर दूरी पर लगी आठ तानें वृत्त को आठ बराबर त्रिज्यखण्डों में विभक्त करती हैं जिसकी त्रिज्या 45 cm दी गई है।

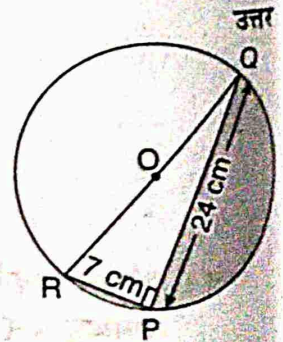
$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{प्रत्येक त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{8} \pi r^2 = \frac{1}{8} \times \frac{22}{7} \times 45 \times 45 \\ &= \frac{22275}{28} \text{ cm}^2 \quad \text{उत्तर} \end{aligned}$$

प्रश्न 4. संलग्न आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि $PQ = 24$ cm, $PR = 7$ cm तथा O वृत्त का केन्द्र है। ($\pi = 22/7$ का प्रयोग कीजिए।)

हल : $\angle RPQ = 90^\circ$ (अर्द्धवृत्त का कोण है)

समकोण ΔRPQ में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\text{चूँकि} \quad QR^2 = PQ^2 + PR^2 = (24)^2 + (7)^2$$



आकृति : 12.3

$$\Rightarrow QR^2 = 576 + 49 = 625 = (25)^2$$

$$\Rightarrow QR = 25 \Rightarrow 2r = 25 \Rightarrow r = \frac{25}{2}$$

[$\because QR$ वृत्त का व्यास है]

$$\text{चूँकि अर्द्धवृत्त } RPQ \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \pi r^2$$

$$\Rightarrow \text{ar (अर्द्धवृत्त } RPQ) = \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{25}{2}\right)^2 = \frac{11 \times 625}{28} = \frac{6875}{28} \text{ cm}^2$$

$$\text{चूँकि समकोण } \triangle RPQ \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times RP \times PQ$$

$$\Rightarrow \text{ar} (\triangle RPQ) = \frac{1}{2} \times 7 \times 24 = 84 \text{ cm}^2$$

$$\therefore \text{छायांकित भाग का क्षेत्रफल} = \text{ar (अर्द्धवृत्त } RPQ) - \text{ar} (\triangle RPQ)$$

$$\text{अतः, ar (छायांकित भाग)} = \frac{6875}{28} - 84 = \frac{6875 - 2352}{28} = \frac{4523}{28} \text{ cm}^2 \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 5. संलग्न आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि केन्द्र O वाले दोनों संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 7 cm और 14 cm हैं तथा $\angle AOC = 40^\circ$ है। ($\pi = 22/7$ का प्रयोग कीजिए।)

हल : मान लीजिए संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः $r_1 = 14$ cm एवं $r_2 = 7$ cm तथा $\angle \theta = \angle AOC = \angle BOD = 40^\circ$

$$\therefore \text{ar} (AOC) = \pi \times \frac{\theta}{360^\circ} r_1^2$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{40^\circ}{360^\circ} (14)^2 = \frac{616}{9} \text{ cm}^2$$

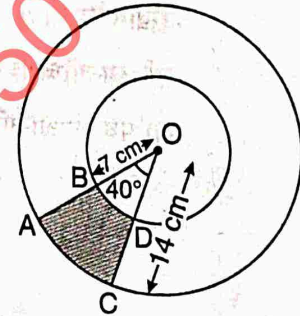
$$\text{एवं } \text{ar} (BOD) = \pi \times \frac{\theta}{360^\circ} r_2^2$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{40^\circ}{360^\circ} \times (7)^2 = \frac{154}{9} \text{ cm}^2$$

$$\text{अतः, ar (छायांकित भाग)} = \text{ar} (AOC) - \text{ar} (BOD)$$

$$= \frac{616}{9} - \frac{154}{9} = \frac{462}{9} = \frac{154}{3} \text{ cm}^2$$

उत्तर



आकृति : 12.4

प्रश्न 6. संलग्न आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि ABCD भुजा 14 cm का एक वर्ग है तथा APD तथा BPC दो अर्द्धवृत्त हैं। (2020)

हल : ज्ञात है : वर्ग की भुजा $a = 14$ cm

अर्द्धवृत्त का व्यास $2r = 14$ cm अर्थात् त्रिज्या $r = \frac{14}{2} = 7$ cm

दोनों अर्द्धवृत्त एक पूर्ण वृत्त बनाते हैं।

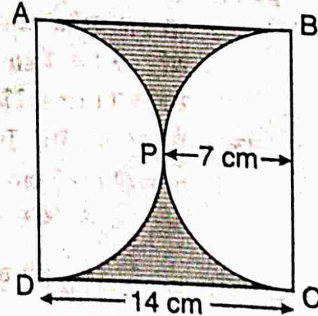
चूँकि छायांकित भाग का क्षेत्रफल,

$$\text{ar (छायांकित भाग)} = \text{वर्ग का क्षेत्रफल} - \text{वृत्त का क्षेत्रफल}$$

$$= a^2 - \pi r^2 = (14)^2 - \frac{22}{7} \times (7)^2$$

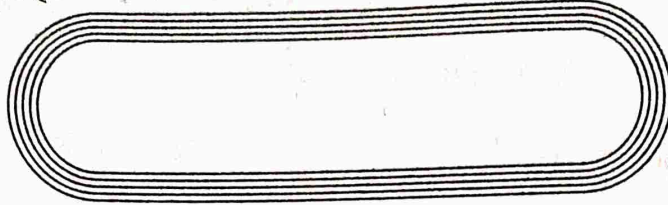
$$= 196 - 154 = 42 \text{ cm}^2$$

उत्तर



आकृति : 12.5

प्रश्न 7. संलग्न आकृति एक दौड़ने का पथ (Racing track) दर्शाती है जिसके बाएँ और दाएँ सिरे अर्धवृत्ताकार हैं।



आकृति : 12.6

दोनों आन्तरिक समानान्तर रेखाखण्डों के बीच की दूरी 60 m है तथा इनमें से प्रत्येक रेखाखण्ड 106 m लम्बा है। यदि यह पथ 10 m चौड़ा है तो ज्ञात कीजिए :

- (i) पथ के आन्तरिक किनारों के अनुदिश एक पूरा चक्कर लगाने में चली गयी दूरी।
(ii) पथ का क्षेत्रफल। ($\pi = 22/7$ का प्रयोग कीजिए।)

हल : ज्ञात है कि सिरे के दोनों अर्धवृत्ताकार मार्ग एक वृत्ताकार वलय का निर्माण करते हैं तथा समानान्तर रेखाखण्ड दो $b = 10$ m चौड़े तथा $l = 106$ m लम्बे आयताकार खण्डों का निर्माण करते हैं। वृत्त की आन्तरिक त्रिज्या $r_2 = \frac{60}{2} = 30$ m तथा बाह्य त्रिज्या $r_1 = 30 + 10 = 40$ m है।

- (i) पथ के आन्तरिक किनारों के अनुदिश एक चक्कर लगाने में चली गयी दूरी
= वृत्त की आन्तरिक परिधि + 2 × समानान्तर रेखाखण्ड की लम्बाई
 $= 2\pi r_2 + 2l = 2 \times \frac{22}{7} \times 30 + 2 \times 106$
 $= \frac{1320}{7} + 212 = \frac{1320 + 1484}{7} = \frac{2804}{7}$ m उत्तर

- (ii) पथ का क्षेत्रफल = वृत्त के वलय का क्षेत्रफल + 2 × आयताकार खण्ड का क्षेत्रफल
 $= \pi (r_1^2 - r_2^2) + 2 \times l \times b$
 $= \frac{22}{7} [(40)^2 - (30)^2] + 2 \times 106 \times 10$
 $= \frac{22}{7} (1600 - 900) + 2120$
 $= \frac{22}{7} \times 700 + 2120$
 $= 2200 + 2120 = 4320$ m² उत्तर

प्रश्न 8. संलग्न आकृति में AB और CD केन्द्र O वाले वृत्त के दो परस्पर लम्ब व्यास हैं तथा OD छोटे वृत्त का व्यास है। यदि OA = 7 cm है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 22/7$ का प्रयोग कीजिए।)

हल : चित्रानुसार, बड़े वृत्त की त्रिज्या

$$r_1 = OA = 7 \text{ cm} = OB = OC = OD \quad (\text{दिया है})$$

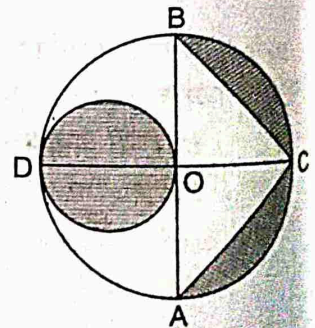
$$\text{छोटे वृत्त का व्यास } d = OD = OA = 7 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \text{छोटे वृत्त की त्रिज्या } r_2 = \frac{d}{2} = \frac{7}{2} \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{त्रिभुज } ABC \text{ का आधार } AB &= OA + OB \\ &= 7 + 7 = 14 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\text{तथा उसका शीर्षलम्ब } OC = OA = 7 \text{ cm}$$

$$\therefore \text{छायांकित भाग का क्षेत्रफल} = \text{छोटे वृत्त का क्षेत्रफल} + \text{बड़े अर्धवृत्त का क्षेत्रफल} - \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल (देखिए संलग्न आकृति)}$$



आकृति : 12.7

अतः, ar (छायांकित भाग) $= \pi r_2^2 + \frac{1}{2} \pi r_1^2 - \frac{1}{2} AB \times OC$

$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times (7)^2 - \frac{1}{2} \times 14 \times 7$$

$$= \frac{77}{2} + 77 - 49$$

$$= 38.5 + 77 - 49$$

$$= 115.5 - 49$$

$$= 66.5 \text{ cm}^2$$

प्रश्न 9. एक समबाहु त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 17320.5 cm^2 है। इस त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष को केन्द्र मानकर त्रिभुज की भुजा के आधे के बराबर की त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा जाता है। (देखिए संलग्न आकृति) छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ और $\sqrt{3} = 1.73205$ लीजिए।)

हल : मान लीजिए कि समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा $a \text{ cm}$ है, तो

$$ar(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 17320.5 \quad (\text{दिया है})$$

$$\Rightarrow \frac{1.73205}{4} a^2 = 17320.5$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{17320.5 \times 4}{1.73205} = 40000$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{40000} = 200 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \text{वृत्त की त्रिज्या, } r = \frac{a}{2} = \frac{200}{2} = 100 \text{ cm}$$

\therefore वृत्त के प्रत्येक त्रिज्यखण्ड की त्रिज्या $r = 100 \text{ cm}$

एवं केन्द्र पर बना कोण $\theta = 60^\circ$ (समबाहु त्रिभुज का शीर्ष कोण)

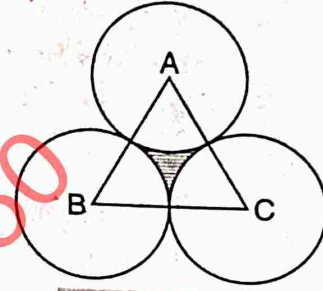
$$\therefore \text{तीनों त्रिज्यखण्डों का क्षेत्रफल} = 3 \times \frac{\theta}{360^\circ} \pi r^2$$

$$= 3 \times \frac{60^\circ}{360^\circ} \times 3.14 \times (100)^2$$

$$\Rightarrow 3ar \text{ (त्रिज्यखण्ड)} = 1.57 \times 10000 = 15700 \text{ cm}^2$$

अतः, ar (छायांकित भाग) $= ar(ABC) - 3ar$ (त्रिज्यखण्ड)

$$= 17320.5 - 15700 = 1620.5 \text{ cm}^2$$



आकृति : 12.8

प्रश्न 10. संलग्न आकृति में $OACB$ केन्द्र O और त्रिज्या 3.5 cm वाले एक वृत्त का चतुर्थांश है। यदि $OD = 2 \text{ cm}$ है, तो निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

(i) चतुर्थांश $OACB$

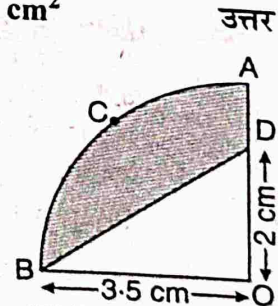
(ii) छायांकित भाग। ($\pi = 22/7$ का प्रयोग कीजिए।)

हल : चूँकि $OB = OA = 3.5 \text{ cm} = r$ वृत्त के चतुर्थांश की त्रिज्या दी हुई है।

$$OD = 2 \text{ cm} \text{ (दिया है)}$$

(i) चतुर्थांश $OACB$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{4} \pi r^2$

$$ar(OACB) = \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times (3.5)^2 = \frac{77}{8} \text{ cm}^2$$



आकृति : 12.9

उत्तर

(ii) समकोण $\triangle DOB$ का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times BO \times OD$

$$ar(DOB) = \frac{1}{2} \times 3.5 \times 2 = 3.5 \text{ cm}^2 = \frac{7}{2} \text{ cm}^2$$

अतः, छायांकित भाग का क्षेत्रफल = $ar(OACB) - ar(DOB)$

$$= \frac{77}{8} - \frac{7}{2} = \frac{77 - 28}{8} = \frac{49}{8} \text{ cm}^2$$

प्रश्न 11. संलग्न आकृति में एक चतुर्थांश $OPBQ$ के अन्तर्गत एक वर्ग $OABC$ बना हुआ है। यदि $OA = 20 \text{ cm}$ है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए।)

हल : दिया है : चतुर्थांश $OPBQ$ के अन्तर्गत बना वर्ग $OABC$ जिसकी भुजा $a = OA = 20 \text{ cm}$ दी है।

चूँकि चतुर्थांश $OPBQ$ की त्रिज्या $r = OB$ है जो वर्ग $OABC$ का विकर्ण है।

$$\Rightarrow r = a\sqrt{2} = 20\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{चतुर्थांश का क्षेत्रफल} = \frac{1}{4} \pi r^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 3.14 \times (20\sqrt{2})^2 = \frac{3.14 \times 800}{4} = 628 \text{ cm}^2$$

$$\text{वर्ग का क्षेत्रफल} = a^2 = (20)^2 = 400 \text{ cm}^2$$

\therefore छायांकित भाग का क्षेत्रफल = चतुर्थांश का क्षेत्रफल - वर्ग का क्षेत्रफल

$$\text{अतः, } ar(\text{छायांकित भाग}) = 628 - 400 = 228 \text{ cm}^2$$

प्रश्न 12. AB और CD केन्द्र O और त्रिज्याओं 21 cm और 7 cm वाले दो संकेन्द्रीय वृत्तों के दो चाप हैं (देखिए संलग्न आकृति)। यदि $\angle AOB = 30^\circ$ है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 22/7$ का प्रयोग कीजिए।)

हल : त्रिज्यखण्ड OAB की त्रिज्या $r_1 = 21 \text{ cm}$ एवं शीर्ष कोण $\theta = 30^\circ$ एवं त्रिज्यखण्ड OCD की त्रिज्या $r_2 = 7 \text{ cm}$ एवं कोण $\theta = 30^\circ$ है।

$$ar(OAB) = \frac{\theta}{360^\circ} \pi r_1^2$$

$$\frac{30^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times (21)^2 = \frac{231}{2} \text{ cm}^2$$

एवं

$$ar(OCD) = \frac{\theta}{360^\circ} \pi r_2^2$$

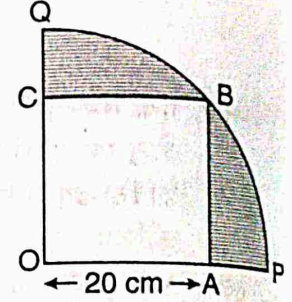
$$= \frac{30^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times (7)^2 = \frac{77}{6} \text{ cm}^2$$

अतः,

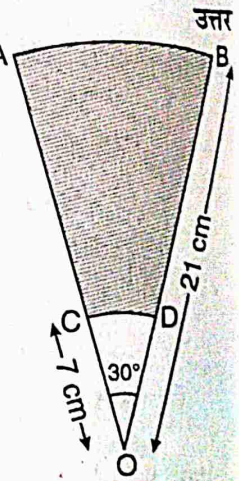
$$ar(\text{छायांकित भाग}) = ar(OAB) - ar(OCD)$$

$$= \frac{231}{2} - \frac{77}{6}$$

$$= \frac{693 - 77}{6} = \frac{616}{6} = \frac{308}{3} \text{ cm}^2$$



आकृति : 12.10



आकृति : 12.11

प्रश्न 13. संलग्न आकृति 12.12 में ABC त्रिज्या 14 cm वाले एक वृत्त का चतुर्थांश है तथा BC को व्यास मानकर एक अर्धवृत्त खींचा गया है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 22/7$ का प्रयोग कीजिए।)

हल: चित्रानुसार, समकोण समद्विबाहु त्रिभुज BAC में $\angle A = 90^\circ$,
भुजा $a = AB = AC =$ वृत्त की त्रिज्या $= r_1 = 14$ cm,
समकोण $\triangle BAC$ में,

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$$

$$= \sqrt{14^2 + 14^2} = 14\sqrt{2}$$

= अर्द्ध वृत्त का व्यास

अतः अर्द्धवृत्त की त्रिज्या $r_2 = \frac{1}{2} \times 14\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$ cm

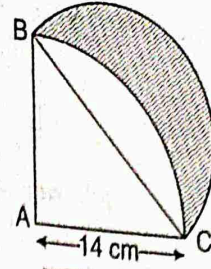
$$ar(\triangle BAC) = \frac{1}{2} \times 14 \times 14 = 98 \text{ cm}^2$$

$$ar(\text{चतुर्थांश}) = \frac{1}{4} \pi r_1^2 = \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times (14)^2$$

$$= 154 \text{ cm}^2$$

$$ar(\text{अर्द्धवृत्त}) = \frac{1}{2} \pi r_2^2 = \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times (7\sqrt{2})^2 = 154 \text{ cm}^2$$

अतः, $ar(\text{छायांकित भाग}) = ar(\triangle BAC) + ar(\text{अर्द्धवृत्त}) - ar(\text{चतुर्थांश})$
 $= 98 + 154 - 154 = 98 \text{ cm}^2$



आकृति : 12.12

प्रश्न 14. दी गई आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
जहाँ $ABCD$ भुजा 14 cm का एक वर्ग है।
(2019)

उत्तर

हल: यहाँ, वर्ग $ABCD$ का क्षेत्रफल $= (\text{भुजा})^2 = (14)^2 = 196 \text{ cm}^2$

तथा प्रत्येक वृत्त का व्यास $= \frac{CD}{2} = \frac{14}{2} = 7$ cm

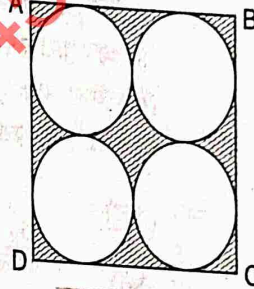
इसलिए, त्रिज्या $r = \frac{7}{2}$ cm

अब, चारों वृत्तों का क्षेत्रफल $= 4 \times$ एक वृत्त का क्षेत्रफल

$$4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$$

$$= 154 \text{ cm}^2$$

अतः, छायांकित भाग का क्षेत्रफल $=$ वर्ग $ABCD$ का क्षेत्रफल $-$ चारों वृत्तों का क्षेत्रफल
 $= 196 - 154 = 42 \text{ cm}^2$



आकृति : 12.13

उत्तर

दीर्घ उत्तरीय/विश्लेषणात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. 10 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केन्द्र पर एक समकोण अन्तरित करती है।
निम्नलिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

(i) संगत लघु वृत्तखण्ड (2020, 22)

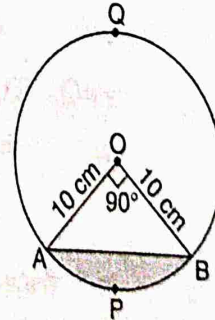
(ii) संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।)

हल: दिया है: $r = 10$ cm एवं $\theta = 90^\circ$

(i) चूँकि लघु त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360} \pi r^2$

$$ar(OAPB) = \frac{90}{360} \times 3.14 \times (10)^2$$

$$= \frac{1}{4} \times 3.14 \times 100$$



आकृति : 12.14

$$ar(OAPB) = 78.5 \text{ cm}^2 \quad \dots(1)$$

$$\therefore ar(\Delta OAB) = \frac{1}{2} OA \times OB$$

$$\Rightarrow ar(OAB) = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50 \text{ cm}^2 \quad \dots(2)$$

अतः, संगत लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

$$ar(APB) = ar(OAPB) - ar(OAB) \\ = 78.5 - 50 = 28.5 \text{ cm}^2$$

[समीकरण (1) एवं (2) से] उत्तर

$$(ii) \text{ चूँकि संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{360 - \theta}{360} \pi r^2$$

$$\text{अतः,} \quad ar(OAQB) = \frac{360 - 90}{360} \times 3.14 \times (10)^2 \\ = \frac{270}{360} \times 314 = \frac{3}{4} \times 314 \\ = 235.5 \text{ cm}^2$$

प्रश्न 2. त्रिज्या 21 cm वाले वृत्त का एक चाप केन्द्र पर 60° का कोण अन्तरित करता है। ज्ञात कीजिए :

(i) चाप की लम्बाई (2019, 22)

(ii) चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल (2019)

(iii) संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल।

($\pi = 22/7$ का प्रयोग कीजिए।)

$$\text{हल : (i) चूँकि} \quad \text{चाप की लम्बाई} = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$$

$$\text{अतः,} \quad \text{चाप की लम्बाई} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$$

$$\text{चाप (APB)} = \frac{1}{6} \times 22 \times 6 = 22 \text{ cm}$$

$$(ii) \text{ चूँकि त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{\theta}{360^\circ} \pi r^2$$

$$\text{अतः,} \quad ar(OAPB) = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times (21)^2 \\ = \frac{1}{6} \times 22 \times 3 \times 21 = 231 \text{ cm}^2$$

(iii) चूँकि ΔOAB में, $\angle AOB = 60^\circ$ एवं $\angle OAB = \angle OBA$

$$\text{तथा} \quad \angle OAB + \angle OBA = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \angle OAB = \angle OBA = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

$\Rightarrow \Delta OAB$ एक समबाहु त्रिभुज है जिसकी भुजा = 21 cm

$$\text{चूँकि समबाहु } \Delta \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{\sqrt{3}}{4} (\text{भुजा})^2$$

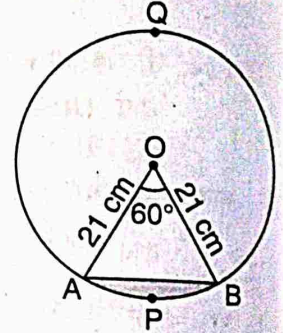
$$\Rightarrow \quad ar(\Delta OAB) = \frac{\sqrt{3}}{4} (21)^2 = \frac{441\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

और चूँकि वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल = संगत त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल - संगत त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\text{अतः,} \quad ar(\Delta APB) = ar(OAPB) - ar(\Delta OAB)$$

$$= \left(231 - \frac{441\sqrt{3}}{4} \right) \text{ cm}^2$$

उत्तर



आकृति : 12.15

उत्तर

उत्तर

प्रश्न 3. 15 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केन्द्र पर 60° का कोण अन्तरित करती है। संगत लघु और दीर्घ वृत्तखण्डों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

($\pi = 3.14$ और $\sqrt{3} = 1.73$ का प्रयोग कीजिए।)

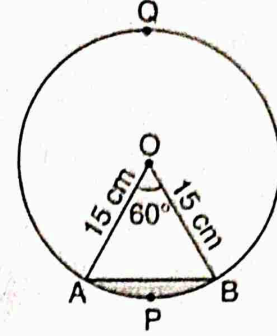
हल : ज्ञात है : वृत्त की त्रिज्या $OA = OB = 15$ cm

एवं $\angle AOB = 60^\circ$
 $\Rightarrow \angle OAB + \angle OBA = 180^\circ - 60^\circ$
 $= 120^\circ$... (1)

और $\angle OAB = \angle OBA$... (2) [$\because OA = OB$]

$\Rightarrow \angle OAB = \angle OBA$

$= \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$



आकृति : 12.16

[समीकरण (1) एवं (2) से]

$\Rightarrow \Delta OAB$ एक समबाहु त्रिभुज है जिसकी प्रत्येक भुजा 15 cm है।

चूँकि त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$

$\Rightarrow ar(OAPB) = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times 3.14 \times 15 \times 15$
 $= \frac{1}{6} \times 3.14 \times 15 \times 15 = 1.57 \times 75$

$\Rightarrow ar(OAPB) = 117.75 \text{ cm}^2$... (3)

चूँकि समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} (\text{भुजा})^2$

$\Rightarrow ar(OAB) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 15 \times 15 = \frac{225\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow ar(OAB) = \frac{225 \times 1.73}{4} = 97.31 \text{ cm}^2$ (लगभग) ... (4)

अतः लघु वृत्तखण्ड APB का क्षेत्रफल = त्रिज्यखण्ड $OAPB$ का क्षेत्रफल - ΔOAB का क्षेत्रफल

$\Rightarrow ar(APB) = ar(OAPB) - ar(OAB)$

$\Rightarrow ar(APB) = 117.75 - 97.31 = 20.44 \text{ cm}^2$

उत्तर

[समीकरण (3) एवं (4) से मान रखने पर]

चूँकि वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$
 $= 3.14 \times 15 \times 15 = 706.5 \text{ cm}^2$

अतः, दीर्घ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल - लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल

$\Rightarrow ar(AQB) = 706.5 - 20.44 = 686.06 \text{ cm}^2$ (लगभग) उत्तर

प्रश्न 4. त्रिज्या 12 cm वाले एक वृत्त की कोई जीवा केन्द्र पर 120° का कोण अन्तरित करती है। संगत वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ और $\sqrt{3} = 1.73$ का प्रयोग कीजिए।)

हल : ज्ञात है : केन्द्र O वाला वृत्त जिसकी त्रिज्या 12 cm है तथा एक जीवा AB केन्द्र O पर $\angle AOB = 120^\circ$ का कोण बनाती है।

O से $OM \perp AB$ खींचिए जो AB को M पर प्रतिच्छेद करती है।

चूँकि समद्विबाहु त्रिभुज OAB में OM शीर्ष लम्ब है।

इसलिए यह $\angle AOB = 120^\circ$ को समद्विभाजित करेगी

अर्थात् $\angle AOM = \angle BOM = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$

एवं $AM = BM = \frac{1}{2} AB$

अब समकोण $\triangle OMA$ में,

$$\frac{OM}{OA} = \cos \angle AOM$$

$$\frac{OM}{12} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

\Rightarrow

$$OM = \frac{1}{2} \times 12 = 6 \text{ cm}$$

\Rightarrow

$$(\because \cos 60^\circ = \frac{1}{2})$$

एवं:

$$\frac{AM}{OA} = \sin \angle AOM$$

$$\frac{AM}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

\Rightarrow

$$AM = 6\sqrt{3} = 6 \times 1.73 = 10.38 \text{ cm } (\because \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2})$$

\Rightarrow

$$AB = 2 AM = 2 \times 10.38 = 20.76 \text{ cm}$$

$$\text{त्रिभुज } OAB \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times AB \times OM$$

\Rightarrow

$$ar(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \times 20.76 \times 6 = 62.28 \text{ cm}^2 \quad \dots(1)$$

$$\text{चूँकि त्रिज्यखण्ड } OAPB \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{120^\circ}{360} \times 3.14 \times (12)^2$$

\Rightarrow

$$ar(OAPB) = 3.14 \times 48 = 150.72 \text{ cm}^2 \quad \dots(2)$$

चूँकि

$$\text{वृत्तखण्ड } APB = ar(OAPB) - ar(OAB)$$

\Rightarrow

$$ar(APB) = 150.72 - 62.28$$

[समीकरण (1) एवं (2) से मान रखने पर]

अतः,

$$ar(APB) = 88.44 \text{ cm}^2$$

उत्तर

प्रश्न 5. एक गोल मेजपोश पर छः समान डिजाइन बने हुए हैं, जैसा कि संलग्न आकृति में दर्शाया गया है। यदि मेजपोश की त्रिज्या 28 cm है, तो ₹ 0.35 प्रतिवर्ग सेण्टीमीटर की दर से इन डिजाइनों को बनाने की लागत ज्ञात कीजिए। ($\pi = 22/7$ एवं $\sqrt{3} = 1.7$ का प्रयोग कीजिए।)

हल : मेजपोश कुल छः बराबर त्रिज्यखण्डों में विभक्त है जिनकी त्रिज्या

$$28 \text{ cm तथा त्रिज्याओं के बीच कोण } \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ \text{ होगा।}$$

मान लीजिए कि एक त्रिज्यखण्ड $OAPB$ संलग्न आकृति में दिखाया गया है।

$\triangle OAB$ एक समबाहु त्रिभुज है जिसकी भुजा 28 cm है।

(क्योंकि $\angle AOB = 60^\circ$ एवं $\angle OAB = \angle OBA = 60^\circ$)

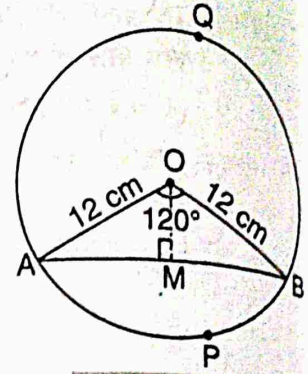
$$\text{समबाहु त्रिभुज } OAB \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (28)^2$$

\Rightarrow

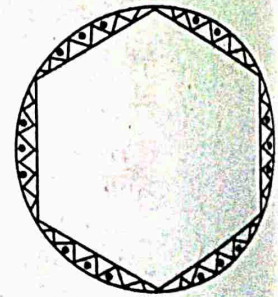
$$ar(OAB) = 333.2 \text{ cm}^2 \quad \dots(1)$$

$$\text{त्रिज्यखण्ड } OAPB \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

$$ar(OAPB) = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} (28 \times 28)$$



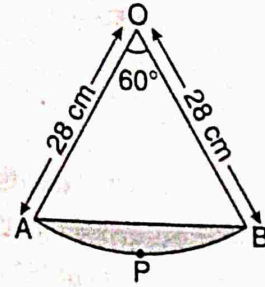
आकृति : 12.17



आकृति : 12.18

$$\begin{aligned} \Rightarrow ar(OAPB) &= \frac{22 \times 56}{3} \text{ cm}^2 \\ &= 410.67 \text{ cm}^2 \\ \text{वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल} &= ar(OAPB) - ar(OAB) \\ &= 410.67 - 333.2 \\ &= 77.47 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{6 वृत्तखण्डों का कुल क्षेत्रफल} &= 6 \times 77.47 = 464.82 \text{ cm}^2 \\ \text{अतः, डिजाइन बनाने की लागत} &= \text{दर} \times \text{कुल क्षेत्रफल} \\ &= 0.35 \times 464.82 = \text{₹ } 162.68 \text{ उत्तर} \end{aligned}$$



आकृति : 12.19

प्रश्न 6. संलग्न आकृति में ABCD एक आयत है, जिसकी विमाएँ 21 cm × 14 cm हैं। BC को व्यास मानकर एक अर्द्धवृत्त खींचा गया है। आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल तथा परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल : ज्ञात है : एक आयत जिसकी विमाएँ 21 cm × 14 cm तथा एक अर्द्धवृत्त जिसका व्यास 14 cm है

$$\Rightarrow \text{अर्द्धवृत्त की त्रिज्या} = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}$$

$$\text{आयत का क्षेत्रफल} = 21 \times 14 = 294 \text{ cm}^2$$

$$\text{अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times (7)^2 = 77 \text{ cm}^2$$

$$\text{चूँकि } ar(\text{छायांकित भाग}) = ar(\text{आयत}) - ar(\text{अर्द्धवृत्त})$$

$$\Rightarrow ar(\text{छायांकित भाग}) = 294 - 77 = 217 \text{ cm}^2$$

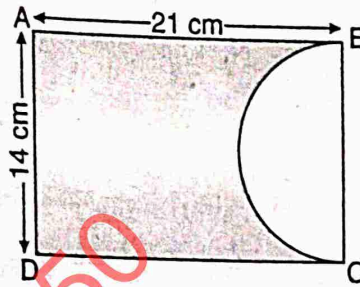
$$\text{छायांकित भाग की परिमाप} = AB + DC + AD + \pi r$$

$$\Rightarrow \text{छायांकित भाग की परिमाप} = 21 + 21 + 14 + \frac{22}{7} \times 7$$

$$= 21 + 21 + 14 + 22 = 78 \text{ cm}$$

अतः, छायांकित भाग का अभीष्ट क्षेत्रफल = 217 cm² एवं अभीष्ट परिमाप = 78 cm है।

उत्तर



आकृति : 12.20

प्रश्न 7. संलग्न आकृति में O केन्द्र वाले दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ 21 cm एवं 42 cm हैं, यदि $\angle AOB = 60^\circ$ है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग कीजिए।)

हल : ज्ञात है : बाह्य वृत्त की त्रिज्या $r_1 = 42 \text{ cm}$ एवं आन्तरिक वृत्त की त्रिज्या $r_2 = 21 \text{ cm}$, छोटे वृत्त के दीर्घ त्रिज्यखण्ड का शीर्ष कोण $\theta_2 = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$ तथा बड़े वृत्त के त्रिज्यखण्ड का शीर्ष कोण $\theta_1 = 60^\circ$ है।

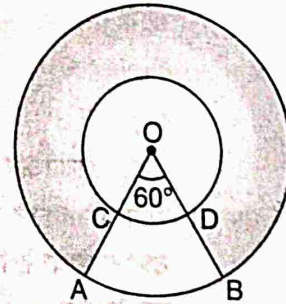
$$\therefore ar(\text{दीर्घ त्रिज्यखण्ड}) = \frac{\theta_2}{360^\circ} \times \pi r_2^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow ar(\text{दीर्घ त्रिज्यखण्ड}) &= \frac{300^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times (21)^2 \\ &= 5 \times 11 \times 21 = 1155 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore ar(\text{बड़े वृत्त का त्रिज्यखण्ड}) &= \frac{\theta_1}{360^\circ} \times \pi (r_1)^2 \\ &= \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times (42)^2 = 924 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{बड़े वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r_1^2 = \frac{22}{7} \times (42)^2$$

$$\Rightarrow ar(\text{दीर्घ वृत्त}) = 5544 \text{ cm}^2$$



आकृति : 12.21

$$\begin{aligned} \text{चूँकि } ar(\text{छायांकित भाग}) &= ar(\text{दीर्घवृत्त}) - ar(\text{छोटे वृत्त का दीर्घ त्रिज्यखण्ड}) \\ &\quad - ar(\text{बड़े वृत्त का लघु त्रिज्यखण्ड}) \\ \Rightarrow ar(\text{छायांकित भाग}) &= 5544 - 1155 - 924 \\ &= 5544 - 2079 = 3465 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

अतः, छायांकित भाग का अभीष्ट क्षेत्रफल = 3465 cm^2

प्रश्न 8. दी गई आकृति में, प्रत्येक 3 cm व्यास के तीन अर्द्धवृत्त, 4.5 cm त्रिज्या का एक अर्द्धवृत्त बनाया गया है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि 4.5 cm त्रिज्या के अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times (4.5)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{9}{2}\right)^2 \\ &= \frac{891}{28} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\text{चूँकि 4.5 cm व्यास अर्थात् } \frac{9}{4} \text{ cm त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल} = \frac{22}{7} \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{891}{56} \text{ cm}^2$$

चूँकि 3 cm व्यास अर्थात् $\frac{3}{2}$ cm त्रिज्या के एक अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{99}{28} \text{ cm}^2$$

$$\begin{aligned} \text{कुल क्षेत्रफल} &= ar\left(\frac{9}{4} \text{ cm त्रिज्या का अर्द्धवृत्त}\right) + ar\left(\frac{3}{2} \text{ cm त्रिज्या का अर्द्धवृत्त}\right) \\ &= \frac{891}{28} + \frac{99}{28} = \frac{990}{28} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{रिक्त स्थान का क्षेत्रफल} &= ar\left(\frac{9}{4} \text{ cm त्रिज्या का वृत्त}\right) + 2 \times ar\left(\frac{3}{2} \text{ cm त्रिज्या का अर्द्धवृत्त}\right) \\ &= \frac{891}{56} + 2 \times \frac{99}{28} = \frac{891 + 396}{56} = \frac{1287}{56} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ar(\text{छायांकित भाग}) &= \text{कुल क्षेत्रफल} - \text{रिक्त स्थान का क्षेत्रफल} \\ &= \frac{990}{28} - \frac{1287}{56} \\ &= \frac{1980 - 1287}{56} = \frac{693}{56} = 12.375 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

अतः, छायांकित भाग का अभीष्ट क्षेत्रफल = 12.375 cm^2 है।

प्रश्न 9. संलग्न आकृति में O केन्द्र वाले वृत्त का एक त्रिज्यखण्ड OAP दर्शाया गया है जिसका केन्द्र पर अन्तरित कोण θ है। AB वृत्त की त्रिज्या OA पर लम्ब है, जो OP को बढ़ाने पर बिन्दु B पर काटता है। सिद्ध कीजिए कि रेखांकित भाग का परिमाण $r \left[\tan \theta + \sec \theta + \frac{\pi \theta}{180} - 1 \right]$ है।

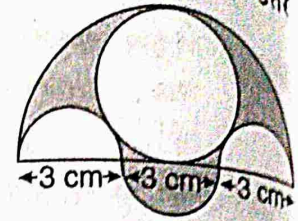
हल : समकोण $\triangle OAB$ में,

$$\therefore \tan \theta = \frac{AB}{r} \Rightarrow AB = r \tan \theta \quad \dots(1)$$

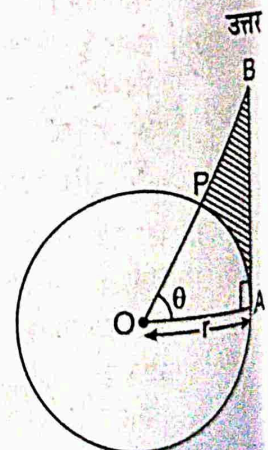
$$\text{एवं} \quad \sec \theta = \frac{OB}{r} \Rightarrow OB = r \sec \theta \quad \dots(2)$$

$$\text{तथा} \quad \text{चाप } AP = \frac{\theta}{180^\circ} \pi r \quad \dots(3)$$

$$\begin{aligned} \text{चूँकि छायांकित भाग का परिमाण} &= AB + PB + \text{चाप } AP \\ &= AB + (OB - OP) + \text{चाप } AP \end{aligned}$$



आकृति : 12.22



आकृति : 12.23

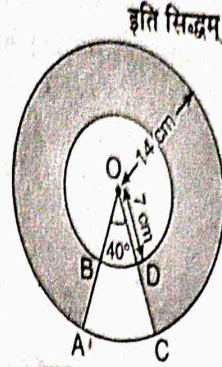
$$\begin{aligned} \text{परिमाप} &= r \tan \theta + r \sec \theta - r + \frac{\theta}{180^\circ} \pi r \\ &= r \left[\tan \theta + \sec \theta + \frac{\pi \theta}{180^\circ} - 1 \right] \end{aligned}$$

अतः, अभीष्ट परिमाप = $r \left[\tan \theta + \sec \theta + \frac{\pi \theta}{180^\circ} - 1 \right]$ है।

प्र. 10. संलग्न आकृति में दो संकेन्द्रीय वृत्तों, जिनकी त्रिज्याएँ 7 cm तथा 14 cm हैं, के बीच घिरे छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जबकि $\angle AOC = 40^\circ$ है। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।)

हल : ज्ञात है : बड़े वृत्त की त्रिज्या $r_1 = 14$ cm

छोटे वृत्त की त्रिज्या $r_2 = 7$ cm तथा त्रिज्यखण्ड AOC का शीर्ष कोण $\theta_1 = 40^\circ$ है। छोटे वृत्त के दीर्घ त्रिज्यखण्ड का कोण $\theta_2 = 360^\circ - 40^\circ = 320^\circ$.



इति सिद्धम्

आकृति : 12.24

$$\begin{aligned} \text{बड़े वृत्त का क्षेत्रफल} &= \pi r_1^2 \\ &= \frac{22}{7} \times (14)^2 = 616 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{छोटे वृत्त के दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} &= \frac{\theta_2}{360^\circ} \pi (r_2)^2 \\ &= \frac{320^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times (7)^2 \\ &= \frac{8}{9} \times 154 = \frac{1232}{9} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{बड़े वृत्त के लघु त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} &= \frac{\theta_1}{360^\circ} \pi (r_1)^2 \\ &= \frac{40^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} (14)^2 \\ &= \frac{1}{9} \times 22 \times 28 = \frac{616}{9} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

रिक्त स्थान का क्षेत्रफल = दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

+ लघु त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \frac{1232}{9} + \frac{616}{9} = \frac{1848}{9} = \frac{616}{3} \\ &= 205.33 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{छायांकित भाग का क्षेत्रफल} &= \text{बड़े वृत्त का क्षेत्रफल} - \text{रिक्त स्थान का क्षेत्रफल} \\ &= 616 - 205.33 = 410.67 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

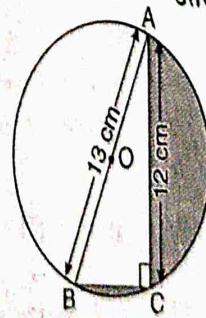
अतः, छायांकित भाग का अभीष्ट क्षेत्रफल = 410.67 cm^2

प्र. 11. संलग्न आकृति में O केन्द्र वाले वृत्त का व्यास $AB = 13$ cm है तथा $AC = 12$ cm है। BC को मिलाया गया है। छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए।)

हल : ज्ञात है : $\triangle ACB$ में $\angle C$ समकोण है (चूँकि अर्द्धवृत्त का कोण है), विकर्ण $AB = 13$ cm तथा $AC = 12$ cm, वृत्त का व्यास $AB = 13$ cm तो त्रिज्या $r = \frac{13}{2}$ cm

समकोण $\triangle ACB$ में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(13)^2 - (12)^2}$$



आकृति : 12.25

$$\Rightarrow BC = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{समकोण } \triangle ACB \text{ का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times BC \times AC \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \pi r^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 3.14 \times \left(\frac{13}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3.14 \times 169}{8} = 66.33 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ar(छायांकित क्षेत्र)} &= \text{ar(अर्द्धवृत्त)} - \text{ar}(ABC) \\ &= 66.33 - 30 = 36.33 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

अतः, छायांकित भाग का अभीष्ट क्षेत्रफल = 36.33 cm^2 .

प्रश्न 12. संलग्न आकृति में PQRS एक वर्गाकार लॉन है जिसकी भुजा PQ = 42 cm है। दो वृत्ताकार फूलों की क्यारियाँ भुजा PS तथा QR पर हैं जिनका केन्द्र इस वर्ग के विकर्णों का प्रतिच्छेदन बिन्दु O है। दोनों फूलों की क्यारियों (छायांकित भाग) का कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है PQRS एक वर्गाकार लॉन जिसकी भुजा PQ = 42 m है अर्थात् PS = PQ = QR = RS = 42 m. हम जानते हैं कि वर्ग के विकर्ण समकोण पर समादिभाजित करते हैं। मान लीजिए OP = r वृत्त की त्रिज्या है।

समकोण $\triangle SOP$ में पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\begin{aligned} \Rightarrow OP^2 + OS^2 &= PS^2 \Rightarrow r^2 + r^2 = (42)^2 \\ 2r^2 &= 42 \times 42 \Rightarrow r^2 = 21 \times 42 \end{aligned}$$

$$\text{त्रिज्यखण्ड } OPS \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ar(त्रिज्यखण्ड)} &= \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} r^2 \\ &= \frac{11}{14} \times r^2 = \frac{11}{14} \times 21 \times 42 = 693 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

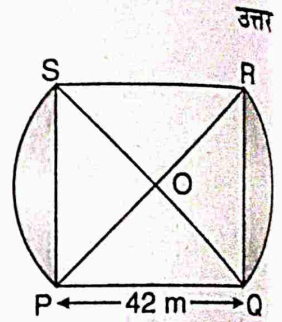
$$\triangle POS \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times OP \times OS = \frac{1}{2} r^2$$

$$\therefore \text{ar}(POS) = \frac{1}{2} \times 21 \times 42 = 441 \text{ m}^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{ar(छायांकित वृत्तखण्ड)} &= \text{ar(त्रिज्यखण्ड)} - \text{ar}(POS) \\ &= 693 - 441 = 252 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{कुल छायांकित भाग का क्षेत्रफल} &= 2 \times 252 \\ &= 504 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

अतः, दोनों फूलों की क्यारियों (छायांकित भाग) का अभीष्ट क्षेत्रफल = 504 m^2

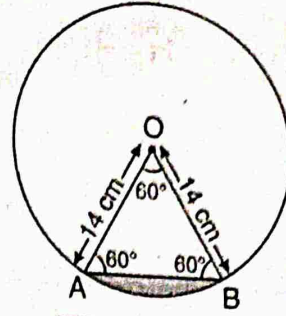


आकृति : 12.26

13. 14 cm त्रिज्या वाले उस लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका केन्द्रीय कोण 60° है। संगत दीर्घ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)।

हल: मान लीजिए O केन्द्र वाले वृत्त की त्रिज्या $r = OA = OB = 14$ cm तथा OA और OB के बीच केन्द्र पर बना कोण (लघु वृत्तखण्ड का केन्द्रीय कोण) $\theta = 60^\circ$ दिया है।

ΔOAB एक समबाहु त्रिभुज होगा जिसकी भुजा $a = OA = AB = OB = 14$ cm है।



आकृति : 12.27

$$\begin{aligned} \therefore \text{त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} &= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2 \\ &= \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times (14)^2 \\ &= \frac{1}{6} \times 22 \times 28 = \frac{616}{6} = \frac{308}{3} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{समबाहु } \Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल} &= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (14)^2 = 49\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल} &= \text{त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल} - \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} \\ &= \frac{308}{3} - 49\sqrt{3} \\ &= \frac{308 - 147\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{7(44 - 21\sqrt{3})}{3} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\text{अतः, लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{7(44 - 21\sqrt{3})}{3} \text{ cm}^2$$

उत्तर

$$\begin{aligned} \therefore \text{वृत्त का क्षेत्रफल} &= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times (14)^2 \\ &= 22 \times 28 = 616 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{दीर्घ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल} &= \text{वृत्त का क्षेत्रफल} - \text{लघु वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल} \\ &= 616 - \left(\frac{308 - 147\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= \frac{1848 - 308 + 147\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{1540 + 147\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{7(220 + 21\sqrt{3})}{3} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\text{अतः, दीर्घ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{7(220 + 21\sqrt{3})}{3} \text{ cm}^2$$

उत्तर



अध्याय

13

पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन

[Surface Areas and Volumes]

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

बहु-विकल्पीय प्रश्न

- यदि दो ठोस समान आधार त्रिज्या r के अर्द्ध गोले आपस में आधार से आधार सटाकर जोड़ दिए जाते हैं, तो इस प्रकार प्राप्त नए ठोस का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा :
 (a) $4\pi r^2$ (b) $6\pi r^2$ (c) $3\pi r^2$ (d) $8\pi r^2$.
- r cm त्रिज्या एवं h cm ($h > 2r$) ऊँचाई का एक लम्ब वृत्तीय बेलन एक गोले को ठीक-ठीक ढक लेता है तो इस गोले का व्यास होगा :
 (a) r cm (b) $2r$ cm (c) h cm (d) $2h$ cm.
- एक लम्बवृत्तीय शंकु को आधार के समान्तर तल द्वारा काटने पर प्राप्त परिच्छेद होगा :
 (a) वृत्त (b) शंकु छिन्नक (c) गोला (d) अर्द्ध गोला।
- दो गोलों के आयतनों का अनुपात $64 : 27$ है तो उनके पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात होगा :
 (a) $3 : 4$ (b) $4 : 3$ (c) $9 : 16$ (d) $16 : 9$.

उत्तर—1. (a), 2. (b), 3. (a), 4. (d).

रिक्त स्थानों की पूर्ति

- बेलन के आयतन का सूत्र है।
- घन के आयतन का सूत्र है।
- अर्द्ध गोले के आयतन का सूत्र है।

(2020)

उत्तर—1. $\pi r^2 h$, 2. भुजा³, 3. $\frac{2}{3} \pi r^3$ ।

जोड़ी मिलाइए

स्तम्भ 'अ'

स्तम्भ 'ब'

- | | |
|--|-----------------------------|
| 1. अर्द्ध गोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल | (a) $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ |
| 2. बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल | (b) $2\pi r^2$ |
| 3. शंकु का आयतन | (c) $2\pi r h$ |
| 4. गोले का पृष्ठ | (d) $4\pi r^2$ |

उत्तर—1. →(b), 2. →(c), 3. →(a), 4. →(d).

सत्य/असत्य कथन

- यदि किसी बेलन के एक सिरे पर उसी त्रिज्या का एक अर्द्ध गोलाकार गड्ढा कर दिया जाए तो प्राप्त ठोस का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल दोनों के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल के योग के बराबर होता है।
- शंकु का आयतन $= \pi r^2 h$ है।
- अर्द्धगोले का आयतन $= \frac{4}{3} \pi r^3$ है।

(2022)

(2022)

4. बेलन का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r h^3$ होता है।

उत्तर-1. सत्य, 2. असत्य, 3. असत्य, 4. असत्य।

एक शब्द/वाक्य में उत्तर

- घन के पृष्ठीय क्षेत्रफल का सूत्र लिखिए।
- घनाभ के पृष्ठीय क्षेत्रफल का सूत्र लिखिए।
- गोले के पृष्ठीय क्षेत्रफल का सूत्र लिखिए।

उत्तर-1. $6a^2$, 2. $2(lb + bh + hl)$, 3. $4\pi r^2$.

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. दवा का एक कैप्सूल (Capsule) एक बेलन के आकार का है जिसके दोनों सिरों पर एक-एक अर्द्ध गोला लगा हुआ है (देखिए संलग्न आकृति)। पूरे कैप्सूल की लम्बाई 14 mm है और उसका व्यास 5 mm है। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(2020)

हल : मान लीजिए दवा का एक कैप्सूल कुल 14 mm लम्बा तथा $d = 5$ mm व्यास वाला एक इस प्रकार का बेलनाकार है जिसके दोनों सिरों पर उसी व्यास के एक-एक अर्द्ध गोले लगे हुए हैं।

चूँकि बेलनाकार भाग एवं अर्द्धगोलीय भाग का व्यास $d = 5$ mm

\Rightarrow बेलनाकार भाग एवं अर्द्ध गोलीय भाग की त्रिज्या $r = \frac{5}{2}$ mm

\therefore कैप्सूल की कुल लम्बाई = बेलनाकार भाग की लम्बाई l + दो अर्द्धगोलीय त्रिज्या अर्थात् व्यास \Rightarrow

$l + 5 = 14$ mm $\Rightarrow l = 14 - 5 = 9$ mm

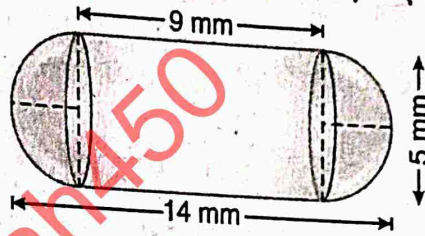
\therefore कैप्सूल का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

+ $2 \times$ अर्द्धगोलीय भाग का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

अतः कैप्सूल का अभीष्ट पृष्ठीय क्षेत्रफल $S_w = 2\pi r l + 2 \times 2\pi r^2 = 2\pi r(l + 2r)$

\Rightarrow $= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{5}{2} \times \left(9 + 2 \times \frac{5}{2}\right)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{5}{2} \times 14 = 220$ mm² (लगभग) उत्तर



आकृति : 13.1

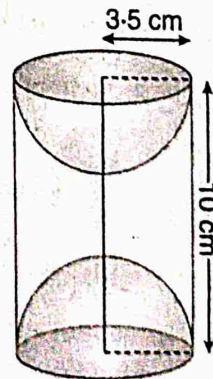
प्रश्न 2. लकड़ी के एक ठोस बेलन के प्रत्येक सिरे पर एक अर्द्ध गोला खोदकर निकालते हुए एक वस्तु बनाई गई है जैसा कि संलग्न आकृति में दर्शाया गया है। यदि बेलन की ऊँचाई 10 cm है और आधार की त्रिज्या 3.5 cm है, तो इस वस्तु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : ज्ञात है : $h = 10$ cm ऊँचाई एवं $r = 3.5$ cm त्रिज्या वाला लकड़ी का एक बेलन जिसके दोनों सिरों से उसी त्रिज्या का एक-एक अर्द्ध गोलाकार भाग काटकर निकाल दिया गया है।

\therefore प्राप्त ठोस का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

+ $2 \times$ अर्द्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल



आकृति : 13.2

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi rh + 2 \times 2\pi r^2 = 2\pi r(h + 2r) \\
 &= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5(10 + 2 \times 3.5) \\
 &= 22 \times 17 = 374 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

उत्तर

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. एक गोलाकार काँच के बर्तन की एक बेलनाकार गर्दन है जिसकी लम्बाई 8 cm है और व्यास 2 cm है, जबकि गोलाकार भाग का व्यास 8.5 cm है। इसमें भरे जा सकने वाली पानी की मात्रा मापकर एक बच्चे ने यह ज्ञात किया कि इस बर्तन का आयतन 345 cm³ है। जाँच कीजिए कि उस बच्चे का उत्तर सही है या नहीं। यह मानते हुए कि उपरोक्त मापन आन्तरिक मापन है और $\pi = 3.14$ है।

हल : गोलाकार भाग का व्यास $2R = 8.5 \text{ cm} \Rightarrow R = \frac{8.5}{2}$

एवं बेलनाकार भाग का व्यास $2r = 2 \text{ cm} \Rightarrow r = \frac{2}{2} = 1 \text{ cm}$

गोलाकार भाग का आयतन $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times \left(\frac{8.5}{2}\right)^3 = \frac{1.57 \times (8.5)^3}{3}$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{964.18}{3} \text{ cm}^3 = 321.39 \text{ cm}^3$$

बेलनाकार भाग का आयतन $= \pi r^2 h = 3.14 \times (1)^2 \times 8$

$$\Rightarrow V_2 = 25.12 \text{ cm}^3$$

कुल आयतन $V = V_1 + V_2 = 321.39 + 25.12 = 346.51 \text{ cm}^3$

अतः, बच्चे का उत्तर सही नहीं है, क्योंकि सही आयतन 346.51 cm³ है।

उत्तर

प्रश्न 2. 6 m चौड़ी और 1.5 m गहरी एक नहर में पानी 10 km/h चाल से बह रहा है। 30 मिनट में यह नहर कितने क्षेत्रफल की सिंचाई कर पायेगी जबकि ऊँचाई के लिए 8 cm गहरे पानी की आवश्यकता होती है?

हल : मान लीजिए नहर एक घनाभ के आकार की है जिसकी चौड़ाई $b = 6 \text{ m}$ और गहराई $h = 1.5 \text{ m}$ जिसमें 10 km/h की चाल से पानी बह रहा है। पुनः मान लीजिए यह 30 मिनट में x वर्ग मीटर क्षेत्रफल की सिंचाई करेगा जिसमें पानी की गहराई $d = 8 \text{ cm} = 0.08 \text{ m}$ है।

30 मिनट में जल धारा की लम्बाई $= \frac{30}{60} h \times 10 \text{ km/h} = 5 \text{ km}$

$l = 5000 \text{ m}$

जल धारा का 30 मिनट में आयतन $= lbh = 5000 \times 6 \times 1.5 \text{ m}^3$

$V = 45000 \text{ m}^3$

प्रश्नानुसार, $x \times 0.08 = 45000$

$$\Rightarrow x = \frac{45000}{0.08} = \frac{45000 \times 100}{8} \text{ m}^2$$

अतः, अभीष्ट क्षेत्रफल $= 562500 \text{ m}^2$

$= 56.25 \text{ हेक्टेअर}$

उत्तर

दीर्घ उत्तरीय/विश्लेषणात्मक प्रश्न

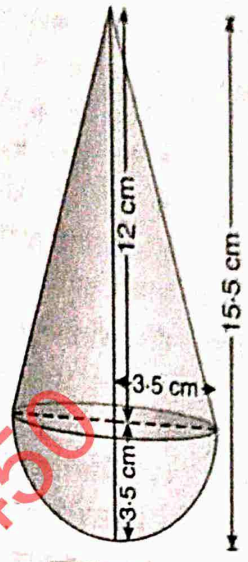
प्रश्न 1. एक खिलौना त्रिज्या 3.5 cm वाले एक शंकु के आकार का है जो उसी त्रिज्या वाले एक अर्द्ध गोले पर अध्यारोपित है। इस खिलौने की सम्पूर्ण ऊँचाई 15.5 cm है। इस खिलौने का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : ज्ञात है : संलग्न आकृति के अनुसार एक खिलौना जिसकी सम्पूर्ण ऊँचाई 15.5 cm तथा अर्द्ध गोले एवं शंकु के आधार की त्रिज्या = 3.5 cm दी गयी है, अतः $r = \frac{7}{2}$ cm.

⇒ शंकु की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई $h = 15.5 - 3.5 = 12$ cm

∴ शंकु की तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{(h)^2 + (r)^2}$

⇒ $l = \sqrt{(12)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2}$
 $= \sqrt{144 + \frac{49}{4}}$
 $= \sqrt{\frac{576 + 49}{4}}$
 $= \sqrt{\frac{625}{4}} = \frac{25}{2}$ cm = 12.5 cm



आकृति : 13.3

चूँकि खिलौने का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = शंकु का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल + अर्द्ध गोले का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल
 अतः, खिलौने का अभीष्ट सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r l + 2\pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{25}{2} + 2 \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2$
 $= \frac{275}{2} + 77 = \frac{275 + 154}{2} = \frac{429}{2} = 214.5$ cm²

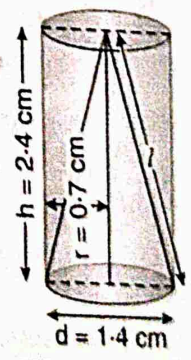
उत्तर

प्रश्न 2. ऊँचाई 2.4 cm और व्यास 1.4 cm वाले एक ठोस बेलन में से इसी ऊँचाई और इसी व्यास वाला एक शंकवाकार खोल (Cavity) काट लिया जाता है। शेष बचे ठोस का निकटतम वर्ग सेण्टीमीटर तक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $h = 2.4$ cm ऊँचाई एवं $d = 1.4$ cm व्यास वाले एक बेलन में से उसी ऊँचाई एवं उसी व्यास का शंकवाकार खोल काट दिया जाता है। मान लीजिए शंकु की तिर्यक ऊँचाई = l cm है।

चूँकि व्यास = 1.4 cm
 ⇒ त्रिज्या = $\frac{1.4}{2} = 0.7$ cm

चूँकि तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(2.4)^2 + (0.7)^2}$
 ⇒ $l = \sqrt{5.76 + 0.49} = \sqrt{6.25}$
 $= 2.5$ cm



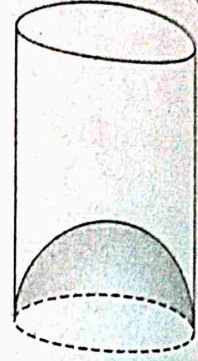
आकृति : 13.4

चूँकि प्राप्त ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + ऊपर के आधार का वृत्तीय क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_w &= 2\pi rh + \pi rl + \pi r^2 \\ &= \pi r(2h + l + r) \\ &= \frac{22}{7} \times 0.7(2 \times 2.4 + 2.5 + 0.7) \\ &= 2.2(4.8 + 2.5 + 0.7) = 2.2 \times 8.0 = 17.6 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

अतः, शेष बचे ठोस का अभीष्ट पृष्ठीय क्षेत्रफल = 18 cm^2 (निकटतम cm^2 में)

- प्रश्न 3. एक जूस बेचने वाला अपने ग्राहकों को आकृति में दर्शाए गिलासों से जूस देता था, बेलनाकार गिलास का आन्तरिक व्यास 5 सेमी था परन्तु गिलास के निचले आधार में एक उभरा हुआ अर्द्धगोला था, जिससे गिलास की धारिता कम हो जाती थी। यदि एक गिलास की ऊँचाई 10 सेमी थी, तो गिलास की आभासी धारिता या वास्तविक धारिता ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ उपयोग करें।) (2022)



आकृति : 13.5

हल : चूँकि, गिलास का आन्तरिक व्यास = 5 cm व ऊँचाई = 10 cm है।

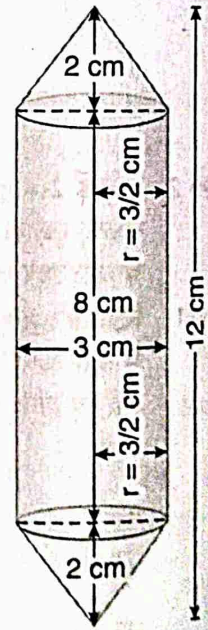
$$\begin{aligned} \therefore \text{गिलास की आभासी धारिता} &= \pi r^2 h \\ &= 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 10 = 196.25 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

परन्तु इसकी वास्तविक धारिता उपरोक्त धारिता से आधार में बने अर्द्धगोले के आयतन के बराबर कम है।

$$\text{अर्थात् कमी बराबर है, } \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 2.5 = 32.71 \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{गिलास की वास्तविक धारिता} &= \text{आभासी धारिता} - \text{अर्द्धगोले का आयतन} \\ &= 196.25 - 32.71 = 163.54 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

- प्रश्न 4. एक इन्जीनियरिंग के विद्यार्थी रचेल से एक पतली ऐलुमिनियम की शीट का प्रयोग करते हुए एक मॉडल बनाने को कहा गया, जो एक ऐसे बेलन के आकार का हो जिसके दोनों सिरों पर दो शंकु जुड़े हों। इस मॉडल का व्यास 3 cm और इसकी लम्बाई 12 cm है। यदि प्रत्येक शंकु की ऊँचाई 2 cm हो, तो रचेल द्वारा बनाए गए मॉडल में अन्तर्विष्ट हवा का आयतन ज्ञात कीजिए। यह मान लीजिए कि मॉडल की आन्तरिक तथा बाहरी विमाएँ लगभग बराबर हैं।



आकृति : 13.6

- हल : ज्ञात है : 12 cm लम्बा एक बेलनाकार मॉडल जिसके दोनों सिरों पर $h' = 2 \text{ cm}$ ऊँचाई के शंकु। शंकु एवं बेलन के व्यास $d = 3 \text{ cm}$ अर्थात् उनकी त्रिज्याएँ $r = \frac{3}{2} \text{ cm}$ हैं।

$$\Rightarrow \text{बेलन की ऊँचाई } h = 12 - 2 \times 2 = 12 - 4 = 8 \text{ cm}$$

मॉडल का आयतन (धारिता)

$$= \text{बेलन का आयतन} + 2 \times \text{शंकु का आयतन}$$

$$= \pi r^2 h + 2 \times \frac{1}{3} \pi r^2 h'$$

$$\text{अतः, मॉडल में अन्तर्विष्ट हवा का अभीष्ट आयतन} = \pi r^2 \left(h + \frac{2}{3} h' \right)$$

$$= \frac{22}{7} \left(\frac{3}{2} \right)^2 \times \left(8 + \frac{2}{3} \times 2 \right)$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{9}{4} \times \left(\frac{24 + 4}{3} \right) = \frac{22}{7} \times \frac{9}{4} \times \frac{28}{3} = 66 \text{ cm}^3$$

उत्तर

प्रश्न 5. एक गुलाबजामुन में उसके आयतन की लगभग 30% चीनी की चासनी है। 45 गुलाबजामुनों में लगभग कितनी चासनी होगी यदि प्रत्येक गुलाबजामुन एक बेलन के आकार का है, जिसके दोनों सिरे अर्द्ध गोलाकार हैं तथा इसकी लम्बाई 5 cm एवं व्यास 2.8 cm है (देखिए संलग्न आकृति)।

हल: 5 cm लम्बे तथा $d = 2.8$ cm व्यास वाले 45 ऐसे बेलनाकार गुलाबजामुन हैं जिसके सिरे उसी व्यास के अर्द्ध गोलाकार हैं। गुलाबजामुनों में उनके आयतन का 30% चीनी की चासनी है।

$$\begin{aligned} \text{बेलनाकार भाग का व्यास} &= \text{अर्द्धगोलाकार भाग का व्यास} \\ d &= 2.8 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{बेलन एवं अर्द्ध गोले की त्रिज्याएँ } r = \frac{2.8}{2} = 1.4 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{बेलनाकार भाग की लम्बाई } h &= 5 \text{ cm} - 2 \times 1.4 \text{ cm} \\ &= 2.2 \text{ cm} \end{aligned}$$

एक गुलाबजामुन का आयतन

$$\begin{aligned} &= \text{बेलन का आयतन} \\ &+ 2 \times \text{अर्द्ध गोले का आयतन} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V = \pi r^2 h + 2 \times \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$= \pi r^2 \left(h + \frac{4}{3} r \right)$$

$$= \frac{22}{7} \times (1.4)^2 \left(2.2 + \frac{4}{3} \times 1.4 \right)$$

$$= 6.16 \left(\frac{6.6 + 5.6}{3} \right) = \frac{6.16 \times 12.2}{3} = \frac{75.152}{3}$$

45 गुलाबजामुनों का आयतन

$$V = 45 \times \frac{75.152}{3} = 1127.28 \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned} \text{अतः, चासनी का अभीष्ट आयतन} &= \frac{30}{100} \times V = \frac{30 \times 1127.28}{100} \\ &= 338.184 \text{ cm}^3 \text{ (लगभग)} \end{aligned}$$

प्रश्न 6. ऊँचाई 220 cm और आधार व्यास 24 cm वाले एक बेलन जिस पर ऊँचाई 60 cm और त्रिज्या 8 cm वाला एक अन्य बेलन आरोपित है, से लोहे का एक स्तम्भ बना है। इस स्तम्भ का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए जबकि दिया है 1 cm^3 लोहे का द्रव्यमान 8 g होता है ($\pi = 3.14$ लीजिए)।

हल: एक लोहे का स्तम्भ दो बेलनों के संयोग से बना है जिसमें

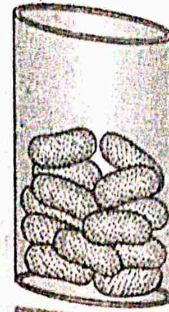
$$r_1 = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}, h_1 = 220 \text{ cm}, r_2 = 8 \text{ cm} \text{ एवं } h_2 = 60 \text{ cm} \text{ दिए हैं।}$$

सूत्र बेलन का आयतन $V = \pi r^2 h$ से,

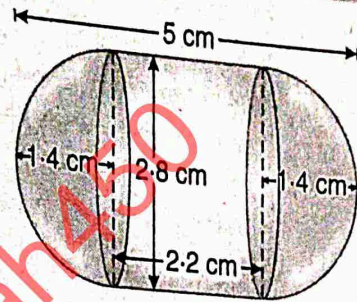
$$\begin{aligned} \text{प्रथम बेलन का आयतन } V_1 &= \pi r_1^2 h_1 = \pi (12)^2 \times 220 \\ &= 31680 \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{और द्वितीय बेलन का आयतन } V_2 &= \pi r_2^2 h_2 = \pi (8)^2 \times 60 \\ &= 3840 \pi \end{aligned}$$

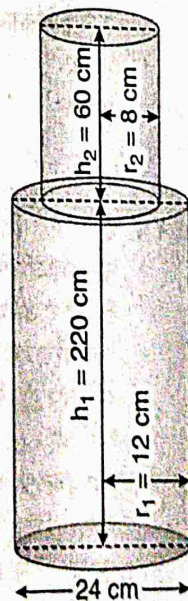
$$\text{कुल आयतन} = V_1 + V_2 = 31680 \pi + 3840 \pi = 35520 \pi$$



आकृति : 13.7



आकृति : 13.8



आकृति : 13.9

$$V = 35520 \times 3.14 = 111532.8 \text{ cm}^3$$

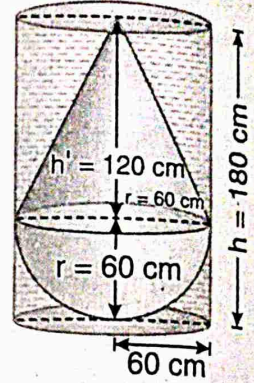
$$\therefore \text{लोहे का द्रव्यमान} = \text{आयतन (cm}^3 \text{ में)} \times \text{द्रव्यमान (g/cm}^3 \text{ में)}$$

$$\text{अतः, लोहे का अभीष्ट द्रव्यमान} = (111532.8 \times 8) \text{ g} = 892262.4 \text{ g}$$

$$= 892.2624 \text{ kg} = 892.261 \text{ kg (लगभग)} \quad |$$

प्रश्न 7. एक ठोस में, ऊँचाई 120 cm और त्रिज्या 60 cm वाला एक शंकु सम्मिलित है, जो 60 cm त्रिज्या वाले एक अर्द्धगोले पर आरोपित है। इस ठोस को पानी से भरे हुए एक लम्बवृत्तीय बेलन में इस प्रकार सीधा डाल दिया जाता है कि यह बेलन की तली को स्पर्श करे। यदि बेलन की त्रिज्या 60 cm है और ऊँचाई 180 cm है, तो बेलन में शेष बचे पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए $h = 180 \text{ cm}$ ऊँचे तथा $r = 60 \text{ cm}$ त्रिज्या के बेलनाकार बर्तन में जल भरा है, जिसमें एक ठोस जो $r = 60 \text{ cm}$ त्रिज्या वाले अर्द्धगोले पर $r = 60 \text{ cm}$ त्रिज्या तथा $h' = 120 \text{ cm}$ ऊँचाई के एक शंकु से मिलकर बना है, डाला जाता है जिसमें उसके आयतन के बराबर जल बाहर निकल जाता है।



आकृति : 13.10

$$\therefore \text{बेलन का आयतन} = \pi r^2 h$$

$$= \pi (60)^2 \times 180$$

$$\Rightarrow V_1 = 648000 \pi \text{ cm}^3$$

$$= 0.648 \pi \text{ m}^3$$

$$\therefore \text{शंकु का आयतन} = \frac{1}{3} \pi r^2 h' = \frac{1}{3} \pi (60)^2 \times 120$$

$$\Rightarrow V_2 = 144000 \pi \text{ cm}^3 = 0.144 \pi \text{ m}^3$$

$$\therefore \text{अर्द्धगोलीय ठोस का आयतन} = \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi (60)^3$$

$$\Rightarrow V_3 = 14400 \pi \text{ cm}^3 = 0.144 \pi \text{ m}^3$$

$$\Rightarrow \text{ठोस का आयतन} = V_2 + V_3 = 0.144 \pi \text{ m}^3 + 0.144 \pi \text{ m}^3$$

$$(V_2 + V_3) = 0.288 \pi \text{ m}^3$$

अतः, बेलनाकार बर्तन में अवशेष जल का आयतन = बेलन का आयतन - ठोस का आयतन

$$= V_1 - (V_2 + V_3)$$

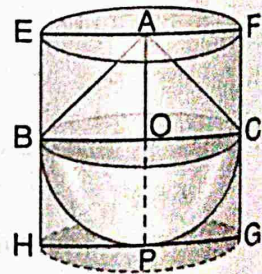
$$= 0.648 \pi - 0.288 \pi = 0.360 \pi \text{ m}^3$$

$$= 0.360 \times \frac{22}{7} \text{ m}^3 = 1.131 \text{ m}^3 \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 8. एक ठोस खिलौना एक अर्द्धगोले के आकार का है, जिस पर एक लम्ब वृत्तीय शंकु आरोपित है। इस शंकु की ऊँचाई 2 cm है, और आधार का व्यास 4 cm है। इस खिलौने का आयतन निर्धारित कीजिए। यदि एक लम्बवृत्तीय बेलन इस खिलौने का परिमाण हो, तो बेलन और खिलौने के आयतनों का अन्तर ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए।)

हल : [उपर्युक्त प्रश्न की तरह हल कीजिए।]

[उत्तर—खिलौने का आयतन = 25.12 cm^3 एवं आयतन का अन्तर = 25.12 cm^3 .]



आकृति : 13.11

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

बहु-विकल्पीय प्रश्न

- $\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ सूत्र है :
(a) माध्य का (b) माध्यक का (c) बहुलक का (d) सूचकांक का।
- $a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$ सूत्र है :
(a) माध्य का (b) माध्यक का (c) बहुलक का (d) सूचकांक का।
- $a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$ सूत्र है :
(a) माध्य का (b) माध्यक का (c) बहुलक का (d) सूचकांक का।
- $l_1 + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right] \times h$ सूत्र है :
(a) माध्य का (b) माध्यक का (c) बहुलक का (d) सूचकांक का।
- $l_1 + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$ सूत्र है :
(a) माध्य का (b) माध्यक का (c) बहुलक का (d) सूचकांक का।

उत्तर—1. (a), 2. (a), 3. (a), 4. (b), 5. (c).

रिक्त स्थानों की पूर्ति

- 3 माध्यक = बहुलक + (2020)
- सूत्र $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$ में a कहलाता है।
- माध्यक = $l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) h$ में l , होती है।
- बहुलक = $l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$ में h होता है।
- सूत्र $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times h$ में $u_i = \dots\dots\dots$ होगा।

उत्तर—1. 2 माध्य, 2. कल्पित माध्य, 3. माध्यक वर्ग की निम्न सीमा, 4. बहुलक वर्ग की वर्ग माप,

$$5. \frac{x_i - a}{h} ।$$

जोड़ी मिलाइए

स्तम्भ 'अ'

1. $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$

2. $l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf_i}{f} \right) \times h =$

3. $l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h =$

4. $\bar{x} = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times h$

5. $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

स्तम्भ 'ब'

(a) माध्य ज्ञात करने की पद (पग) विचलन विधि

(b) माध्य ज्ञात करने की विचलन विधि

(c) माध्य ज्ञात करने की प्रत्यक्ष विधि

(d) माध्यिका

(e) बहुलक

उत्तर—1. →(c), 2. →(d), 3. →(e), 4. →(a), 5. →(b).

सत्य/असत्य

- समान प्रेक्षणों के वर्गीकृत एवं अवर्गीकृत आँकड़ों से निकाले गए माध्यकों का मान सदैव समान होता है।
- सूत्रों द्वारा केन्द्रीय मापों के परिकलन में वर्गों का सतत होना आवश्यक है।
- समान प्रेक्षणों के वर्गीकृत एवं अवर्गीकृत आँकड़ों से निकाले गए बहुलकों का मान सदैव समान होता है।
- किसी बारम्बारता बंटन में किसी वर्ग को संचयी बारम्बारता उस वर्ग से पहले वाले सभी वर्गों की बारम्बारताओं का योग होती है। (2020)
- संचयी बारम्बारता सारणी की आवश्यकता माध्यक का परिकलन करने में होती है।
- 3 माध्यिका = बहुलक + 2 माध्य। (2022)

उत्तर—1. असत्य, 2. सत्य, 3. असत्य, 4. सत्य, 5. सत्य, 6. सत्य।

एक शब्द/वाक्य में उत्तर

- केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापों माध्य, माध्यक एवं बहुलक में से कोई भी दो मापें दी हैं, तो तीसरी माप कैसे ज्ञात करेंगे?
- सर्वाधिक बारम्बारता वाला वर्ग क्या कहलाता है? (2022)
- सम्पूर्ण वितरण को दो बराबर भागों में बाँटने वाला अंक जिस वर्ग अन्तराल में होता है उस वर्ग को क्या कहते हैं? (2019)
- 1, 2, 3, 4, 5 का समान्तर माध्य क्या होगा? (2019)
- माध्यिका का सूत्र लिखिए। (2019)

उत्तर—1. बहुलक = $3 \times$ माध्यक - $2 \times$ माध्य सूत्र का प्रयोग करके, 2. बहुलक वर्ग

3. माध्यक वर्ग, 4. 3, 5. माध्यिका = $l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$.

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. किसी गेंदबाज द्वारा 10 क्रिकेट मैचों में लिए गए विकेटों की संख्याएँ निम्नलिखित हैं—

2, 6, 4, 5, 0, 2, 1, 3, 2, 3

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल :

विकिटों की संख्या	0	1	2	3	4	5	6
आवृत्ति	1	1	3	2	1	1	1

चूँकि अधिकतम बारम्बारता 3 लिए गए 2 विकिटों की है।
अतः, आँकड़ों का अभीष्ट बहुलक = 2

उत्तर

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. नीचे दिया हुआ बंटन एक दिवसीय क्रिकेट मैचों में गेंदबाजों द्वारा लिए गए विकिटों की संख्या दर्शाता है। उपयुक्त विधि चुनते हुए लिए गए विकिटों का माध्य ज्ञात कीजिए।

(2022)

विकिटों की संख्या	20-60	60-100	100-150	150-250	250-350	350-450
गेंदबाजों की संख्या	7	5	16	12	2	3

हल :

विकिटों की संख्या	गेंदबाजों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$f_i \times x_i$
20-60	7	40	280
60-100	5	80	400
100-150	16	125	2000
150-250	12	200	2400
250-350	2	300	600
350-450	3	400	1200
योग	$\sum f_i = 45$		$\sum f_i x_i = 6880$

$$\therefore \text{विकिटों का माध्य } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{6880}{45} = 152.89$$

उत्तर

प्रश्न 2. विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा अपने पर्यावरण चेतना अभियान के अन्तर्गत एक सर्वेक्षण किया गया, जिसमें उन्होंने एक मोहल्ले के 20 घरों में लगे हुए पौधों से सम्बन्धित निम्नलिखित आँकड़े एकत्रित किए। प्रति घर माध्य पौधों की संख्या ज्ञात कीजिए।

पौधों की संख्या	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
घरों की संख्या	1	2	1	5	6	2	3

माध्य ज्ञात करने के लिए आपने किस विधि का प्रयोग किया और क्यों ?

हल :

पौधों की संख्या	घरों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$f_i \times x_i$
0-2	1	1	1
2-4	2	3	6
4-6	1	5	5
6-8	5	7	35
8-10	6	9	54
10-12	2	11	22
12-14	3	13	39
योग	$\sum f_i = 20$		$\sum f_i x_i = 162$

$$\therefore \text{प्रति घर माध्य पौधों की अभीष्ट संख्या } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{162}{20} = 8.1 \text{ पौधे}$$

हमने प्रत्यक्ष विधि का प्रयोग किया क्योंकि f_i एवं x_i के संख्यात्मक मान बहुत कम हैं। उत्तर

प्रश्न 3. निम्नलिखित आँकड़ों से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए : (2019)

वर्ग अंतराल	10—25	25—40	40—55	55—70	70—85	85—100
विद्यार्थियों की संख्या	2	3	7	6	6	6

हल :

वर्ग अंतराल	विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$f_i \times x_i$
10—25	2	17.5	35.0
25—40	3	32.5	97.5
40—55	7	47.5	332.5
55—70	6	62.5	375.2
70—85	6	77.5	465.0
85—100	6	92.5	555.0
योग	$\sum f_i = 30$		$\sum f_i x_i = 1860$

$$\therefore \text{अभीष्ट समान्तर माध्य } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1860}{30} = 62$$

प्रश्न 4. किसी फैक्ट्री के 50 श्रमिकों की दैनिक मजदूरी के निम्नलिखित बंटन पर विचार कीजिए :

दैनिक मजदूरी (₹ में)	500—520	520—540	540—560	560—580	580—600
श्रमिकों की संख्या	12	14	8	6	10

एक उपयुक्त विधि का प्रयोग करते हुए इस फैक्ट्री के श्रमिकों की माध्य दैनिक मजदूरी ज्ञात कीजिए। (2020, 22)

हल :

दैनिक मजदूरी (₹ में)	श्रमिकों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$u_i = \frac{x_i - 550}{h}$	$f_i u_i$
500—520	12	510	-2	-24
520—540	14	530	-1	-14
540—560	8	550	0	0
560—580	6	570	+1	+6
580—600	10	590	+2	+20
योग	$\sum f_i = 50$			$\sum f_i u_i = -12$

मान लीजिए कल्पित माध्य $a = 550$ एवं $h = 20$ है।

$$\text{चूँकि माध्य } \bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times h$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 550 + \frac{-12 \times 20}{50} = 550 - \frac{240}{50} = 550 - 4.80$$

अतः, अभीष्ट माध्य दैनिक मजदूरी = ₹ 545.20 उत्तर

प्रश्न 5. निम्नलिखित बंटन एक मोहल्ले के बच्चों के दैनिक जेब खर्च दर्शाता है। माध्य जेब खर्च ₹ 18 है। लुप्त बारम्बारता f ज्ञात कीजिए।

दैनिक जेब भत्ता (₹ में)	11—13	13—15	15—17	17—19	19—21	21—23	23—25
बच्चों की संख्या	7	6	9	13	f	5	4

हल :

दैनिक जेब भत्ता (₹ में)	बच्चों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$f_i x_i$
11—13	7	12	84
13—15	6	14	84
15—17	9	16	144
17—19	13	18	234
19—21	f	20	$20f$
21—23	5	22	110
23—25	4	24	96
योग	$\sum f_i = 44 + f$		$\sum f_i x_i = 752 + 20f$

$$\therefore \text{माध्य } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \Rightarrow \frac{752 + 20f}{44 + f} = 18$$

$$\Rightarrow 20f + 752 = 18f + 792$$

$$\Rightarrow 20f - 18f = 792 - 752$$

$$\Rightarrow 2f = 40 \Rightarrow \text{अतः, } f \text{ का अभीष्ट मान } f = \frac{40}{2} = 20 \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 6. विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा मोहल्ले के 20 परिवारों पर किये गये सर्वेक्षण के परिणामस्वरूप विभिन्न परिवारों के सदस्यों की संख्या से सम्बन्धित निम्नलिखित आँकड़े प्राप्त हुये :

परिवार माप	1—3	3—5	5—7	7—9	9—11
परिवारों की संख्या	7	8	2	2	1

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए। (2019)

हल : उपर्युक्त प्रेक्षकों में अधिकतम वर्ग बारम्बारता 8 है तथा इसका संगत वर्ग 3—5 है। अतः अभीष्ट बहुलक वर्ग 3—5 है। अब, निम्न सीमा $l = 3$, वर्ग माप $h = 2$, बहुलक वर्ग की बारम्बारता $f_1 = 8$, इससे पहले वर्ग की बारम्बारता $f_0 = 7$ तथा बाद के वर्ग की बारम्बारता $f_2 = 2$ है।

$$\text{अतः, बहुलक } Z = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

$$= 3 + \left(\frac{8 - 7}{2 \times 8 - 7 - 2} \right) \times 2$$

$$= 3 + \frac{2}{7} = 3.286$$

उत्तर

प्रश्न 7. निम्नलिखित आँकड़े 225 बिजली उपकरणों के प्रेक्षित जीवनकाल (घण्टों में) की सूचना देते हैं :

जीवनकाल (घण्टों में)	0—20	20—40	40—60	60—80	80—100	100—120
बारम्बारता	10	35	52	61	38	29

उपकरणों का बहुलक जीवनकाल ज्ञात कीजिए।

हल : उपर्युक्त प्रेक्षकों में बहुलक वर्ग 60—80 है जिसकी निम्न सीमा $l = 60$, वर्ग माप $h = 80 - 60 = 20$, बारम्बारता $f_1 = 61$ है तथा इससे पहले वर्ग की बारम्बारता $f_0 = 52$ एवं ठीक बाद के वर्ग की बारम्बारता $f_2 = 38$ है।

अतः,

$$\begin{aligned} \text{बहुलक } Z &= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h \\ &= 60 + \left(\frac{61 - 52}{2 \times 61 - 52 - 38} \right) \times 20 \\ &= 60 + \left(\frac{9}{122 - 90} \right) \times 20 \\ &= 60 + \frac{180}{32} = 60 + 5.63 \end{aligned}$$

अतः, बहुलक जीवनकाल का अभीष्ट मान = 65.63 घण्टा (लगभग)

प्रश्न 8. यदि नीचे दिए हुए बंटन का माध्यक 28.5 हो, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	योग
बारम्बारता	5	x	20	15	y	5	60

हल :

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता (f_i)	संचयी बारम्बारता (cf)
0—10	5	5
10—20	x	$5 + x$
20—30	20	$25 + x$
30—40	15	$40 + x$
40—50	y	$40 + x + y$
50—60	5	$45 + x + y$
योग	60	

$$\text{चूँकि } 45 + x + y = 60 \Rightarrow x + y = 60 - 45 = 15$$

चूँकि माध्यक 28.5 दिया है जो वर्ग (20—30) में स्थित है।

$$\Rightarrow l = 20, f = 20, cf = 5 + x, h = 10, n = 60$$

$$\text{अतः, माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

$$\Rightarrow 28.5 = 20 + \left(\frac{30 - (5 + x)}{20} \right) \times 10$$

$$\Rightarrow 57 = 40 + 30 - 5 - x \Rightarrow x = 70 - 5 - 57$$

$$\Rightarrow x = 70 - 62 = 8$$

$$\Rightarrow 8 + y = 15 \Rightarrow y = 15 - 8 = 7$$

अतः, x एवं y के अभीष्ट मान क्रमशः 8 एवं 7 हैं।

प्रश्न 9. एक जीवन बीमा एजेण्ट 100 पॉलिसीधारकों की आयु के बण्टन के निम्नलिखित आँकड़े ज्ञात करता है। माध्यक आयु परिकलित कीजिए, यदि पॉलिसी केवल उन्हीं व्यक्तियों को दी जाती है जिनकी आयु 18 वर्ष उससे अधिक हो, परन्तु 60 वर्ष से कम हो।

आयु (वर्षों में)	पॉलिसीधारकों की संख्या
20 से कम	2
25 से कम	6
30 से कम	24
35 से कम	45
40 से कम	78
45 से कम	89
50 से कम	92
55 से कम	98
60 से कम	100

हल : माध्यक ज्ञात करने के लिए हमें वर्ग अन्तराल एवं उनकी संचयी बारम्बारताओं की आवश्यकता होती है इसलिए

आयु (वर्षों में)	बारम्बारता (f_i)	संचयी बारम्बारता (cf)
15—20	2	2
20—25	4	6
25—30	18	24
30—35	21	45
35—40	33	78
40—45	11	89
45—50	3	92
50—55	6	98
55—60	2	100

$$n = 100, \text{ माध्यक} = \frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50\text{वाँ पद}$$

माध्यिका वर्ग (35—40) है जिसमें $l = 35, cf = 45, f = 33$ एवं $h = 40 - 35 = 5$

$$\begin{aligned} \text{अतः, माध्यक} &= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h \\ &= 35 + \left(\frac{50 - 45}{33} \right) \times 5 \\ &= 35 + \frac{5 \times 5}{33} = 35 + \frac{25}{33} = 35 + 0.76 = 35.76 \end{aligned}$$

अतः, अभीष्ट माध्यक आयु = 35.76 वर्ष (लगभग)। उत्तर

दीर्घ उत्तरीय/विश्लेषणात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. निम्नलिखित सारणी किसी अस्पताल में एक विशेष वर्ष में भर्ती हुए रोगियों की आयु को दर्शाती है :

आयु (वर्षों में)	5—15	15—25	25—35	35—45	45—55	55—65
रोगियों की संख्या	6	11	21	23	14	5

उपरोक्त आँकड़ों का बहुलक (2020) और माध्य ज्ञात कीजिए। दोनों केन्द्रीय प्रवृत्तियों की तुलना कीजिए और उनकी व्याख्या कीजिए।

हल : बहुलक के परिकलन के लिए :

यहाँ बहुलक वर्ग 35—45 है क्योंकि इसकी बारम्बारता सर्वाधिक 25 है। इस वर्ग की निम्न सीमा $l = 35$, बारम्बारता $f_1 = 23$, वर्ग माप $h = 45 - 35 = 10$, बहुलक वर्ग से पहले वर्ग की बारम्बारता $f_0 = 21$ एवं बाद के वर्ग की बारम्बारता $f_2 = 14$

$$\begin{aligned} \text{अतः,} \quad \text{बहुलक } Z &= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h \\ &= 35 + \left(\frac{23 - 21}{2 \times 23 - 21 - 14} \right) \times 10 \\ &= 35 + \frac{2}{46 - 35} \times 10 \\ &= 35 + \frac{20}{11} = 35 + 1.82 = 36.82 \end{aligned}$$

उत्तर

माध्य के परिकलन के लिए :

आयु (वर्षों में)	रोगियों की संख्या (f_i)	वर्ग चिह्न (x_i)	$f_i \cdot x_i$
5—15	6	10	60
15—25	11	20	220
25—35	21	30	630
35—45	23	40	920
45—55	14	50	700
55—65	5	60	300
योग	$\sum f_i = 80$	2830	$\sum f_i x_i = 2830$

$$\text{अतः,} \quad \text{माध्य } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2830}{80} = 35.37$$

उत्तर

व्याख्या : अस्पताल में भर्ती अधिकतम रोगी 36.82 वर्ष आयु (लगभग) के हैं जबकि अस्पताल में भर्ती किए गए औसत रोगियों की आयु = 35.37 (लगभग) है।

उत्तर

प्रश्न 2. निम्नलिखित आँकड़े किसी गाँव के 200 परिवारों के कुल मासिक घरेलू व्यय के बंटन को दर्शाते हैं। इन परिवारों का बहुलक मासिक व्यय ज्ञात कीजिए साथ ही माध्य मासिक व्यय भी ज्ञात कीजिए।

व्यय (₹ में)	परिवारों की संख्या
1000—1500	24
1500—2000	40
2000—2500	33
2500—3000	28
3000—3500	30
3500—4000	22
4000—4500	16
4500—5000	7

हल : [उपर्युक्त प्रश्न 1 की तरह हल कीजिए।]

[अतः, अभीष्ट बहुलक $Z = ₹ 1847.83$ एवं माध्य $\bar{x} = 2662.50$]

प्रश्न 3. निम्नलिखित बंटन भारत के उच्चतर माध्यमिक स्कूलों में राज्यों के अनुसार शिक्षक-विद्यार्थी अनुपात को दर्शाता है। इन आँकड़ों के बहुलक और माध्य ज्ञात कीजिए। दोनों मापकों की व्याख्या कीजिए।

प्रति शिक्षक विद्यार्थियों की संख्या	राज्य/संघीय क्षेत्रों की संख्या
15—20	3
20—25	8
25—30	9
30—35	10
35—40	3
40—45	0
45—50	0
50—55	2

हल : [उपर्युक्त प्रश्न 1 की तरह हल कीजिए।]

[अतः, अभीष्ट बहुलक $Z = ₹ 30.625$ (लगभग) एवं माध्य $\bar{x} = 29.2$ (लगभग)]

प्रश्न 4. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन किसी मोहल्ले के 68 उपभोक्तों की बिजली की मासिक खपत दर्शाता है। इन आँकड़ों के माध्यक, माध्य और बहुलक ज्ञात कीजिए। इनकी तुलना कीजिए।

मासिक खपत (इकाइयों में)	उपभोक्तों की संख्या
65—85	4
85—105	5
105—125	13
125—145	20
145—165	14
165—185	8
185—205	4

हल :

मासिक खपत इकाइयों में	उपभोक्ताओं की संख्या (f_i)	संचयी बारम्बारता (cf)	वर्ग चिह्न (x_i)	$u_i = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
65—85	4	4	75	-3	-12
85—105	5	9	95	-2	-10
105—125	13	22	115	-1	-13
125—145	20	42	135	0	0

145—165	14	56	155	+1	14
165—185	8	64	175	+2	16
185—205	4	68	195	+3	12
योग	$\Sigma f_i = 68$				$\Sigma f_i u_i = 7$

माध्यक = $\frac{n}{2} = \frac{68}{2} = 34$ वाँ पद \Rightarrow माध्यक कक्षा (125—145) है

जिसमें $l = 125, cf = 22, f = 20, h = 20$

$$\text{माध्यक} = l + \left[\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right] \times h = 125 + \left[\frac{(34 - 22)}{20} \right] \times 20$$

$$= 125 + 12 = 137 \text{ इकाई}$$

कल्पित माध्य $a = 135$, वर्ग माप $h = 20$

$$\text{माध्य } \bar{x} = a + \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i} \times h = 135 + \frac{7 \times 20}{68}$$

$$= 135 + \frac{140}{68} = 135 + 2.06 = 137.06 \text{ इकाई (लगभग)}$$

चूँकि बहुलक कक्षा (125—145) है जिसमें $l = 125, h = 20$, बारम्बारता $f_1 = 20$, ठीक पहले वर्ग की बारम्बारता $f_0 = 13$ तथा ठीक बाद के वर्ग की बारम्बारता $f_2 = 14$

$$\text{बहुलक } Z = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$$

$$\Rightarrow Z = 125 + \frac{20 - 13}{2 \times 20 - 13 - 14} \times 20$$

$$= 125 + \frac{7 \times 20}{40 - 27}$$

$$= 125 + \frac{140}{13}$$

$$= 125 + 10.77$$

$$= 135.77 \text{ इकाई (लगभग)}$$

व्याख्या : इस स्थिति में तीनों मापक लगभग समान हैं।

प्रश्न 5. एक स्थानीय टेलीफोन निर्देशिका से 100 कुलनाम (surnames) लिए गए और उनमें प्रयुक्त अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों की संख्या का निम्नलिखित बारम्बारता बंटन प्राप्त हुआ :

अक्षरों की संख्या	1—4	4—7	7—10	10—13	13—16	16—19
कुलनामों की संख्या	6	30	40	16	4	4

कुलनामों में माध्यक अक्षरों की संख्या ज्ञात कीजिए। कुलनामों में माध्य अक्षरों की संख्या ज्ञात कीजिए। साथ ही, कुलनामों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल : [उपर्युक्त प्रश्न 4 की तरह हल कीजिए।]

[अतः, अभीष्ट माध्यक = 8.05, माध्य $\bar{x} = 8.32$ एवं बहुलक $Z = 7.88$]



वस्तुनिष्ठ प्रश्न

बहु-विकल्पीय प्रश्न

- यदि एक घटना घटित नहीं हो सकती तो इसकी प्रायिकता होगी :
 (a) 1 (b) $\frac{3}{4}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 0.
- निम्न में से कौन किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती?
 (a) $\frac{1}{3}$ (b) 0.1 (c) 3% (d) $\frac{17}{16}$.
- एक घटना असम्भावी है तो इसकी प्रायिकता निम्न के निकटस्थ होगी :
 (a) 0.0001 (b) 0.001 (c) 0.01 (d) 0.1.
- यदि किसी घटना की प्रायिकता p है तो इसकी पूरक घटना की प्रायिकता होगी :
 (a) $p-1$ (b) p (c) $1-p$ (d) $1-\frac{1}{p}$.
- किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता प्रतिशत में दी गई है। यह कभी नहीं हो सकती :
 (a) 100 से कम (b) शून्य से कम
 (c) एक से अधिक (d) कोई भी लेकिन एक पूर्ण संख्या।

उत्तर—1. (d), 2. (d), 3. (a), 4. (c), 5. (b).

रिक्त स्थानों की पूर्ति

- सभी सम्भव प्रायिकताओं का योग सदैव होता है।
- एक साथ घटित न होने वाली घटनाएँ घटनाएँ कहलाती हैं।
- यादृच्छिक प्रयोग में सभी सम्भव परिणामों का समुच्चय कहलाता है।
- प्रतिदर्श समष्टि का प्रत्येक उप-समुच्चय उसकी एक है।
- किसी असम्भव घटना की प्रायिकता होती है।
- किसी प्रयोग की सभी प्रारम्भिक घटनाओं की प्रायिकता का योग है। (2019, 20)

उत्तर—1. एक, 2. परस्पर अपवर्जी, 3. प्रतिदर्श समष्टि, 4. घटना, 5. शून्य (0), 6. एक।

जोड़ी मिलाइए

- | स्तम्भ 'अ' | स्तम्भ 'ब' |
|-----------------------------------|-------------------|
| 1. असम्भव घटनाओं की प्रायिकता | (a) $\frac{1}{3}$ |
| 2. किसी निश्चित घटना की प्रायिकता | (b) $\frac{1}{6}$ |

3. एक पासे को फेंकने पर एक विषम अंक आने की प्रायिकता (c) 0 (शून्य)
4. एक पासे को फेंकने पर एक पूर्ण वर्ग आने की प्रायिकता (d) 1 (एक)
5. एक पासे को फेंकने पर 5 का गुणक आने की प्रायिकता (e) $\frac{1}{2}$
- उत्तर—1.→(c), 2.→(d), 3.→(e), 4.→(a), 5.→(b).

सत्य/असत्य कथन

1. किसी घटना की प्रायिकता एक से अधिक भी हो सकती है।
 2. एक पासे को फेंकने पर उसके फलक पर 7 आने की प्रायिकता शून्य (0) होती है।
 3. किसी घटना की प्रायिकता ऋणात्मक भी हो सकती है।
 4. किसी निश्चित घटना की प्रायिकता का मान एक होता है।
 5. एक सिक्के को उछालने पर चित आने की प्रायिकता एक होती है।
- उत्तर—1. असत्य, 2. सत्य 3. असत्य, 4. सत्य, 5. असत्य।

एक शब्द/वाक्य में उत्तर

1. किसी घटना के घटित होने की सम्भावनाओं का परिमाण बोधक या संख्यात्मक निरूपण क्या कहलाता है? (2022)
 2. एक असम्भव घटना की प्रायिकता क्या होगी? (2022)
 3. निश्चित घटना की प्रायिकता लिखिए। (2019)
 4. घटना E की प्रायिकता + घटना ' E नहीं' की प्रायिकता का मान होता है। (2019)
- अथवा
- $P(E) + P(\bar{E})$ का मान क्या होगा? (2022)
- उत्तर—1. प्रायिकता, 2. 0 (शून्य), 3. 1 (एक), 4. 1 (एक)।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

- प्रश्न 1. असम्भव घटना को परिभाषित कीजिए। (2022)
- उत्तर— "वह घटना जिसका घटित होना असम्भव हो, असम्भव घटना कहलाती है।" किसी भी असम्भव घटना की प्रायिकता शून्य होती है।
- प्रश्न 2. प्रारम्भिक घटना को परिभाषित कीजिए। (2022)
- उत्तर— "किसी प्रयोग की वह घटना जिसका केवल एक ही परिणाम हो प्रारम्भिक घटना कहलाती है।"
- प्रश्न 3. दो खिलाड़ी संगीता और रेशमा टेनिस का एक मैच खेलती हैं। संगीता द्वारा मैच जीतने की प्रायिकता 0.62 है। रेशमा के जीतने की क्या प्रायिकता है? (2019)
- हल : रेशमा के मैच जीतने की प्रायिकता, $P(R) = 1 - P(S)$
 $= 1 - 0.62 = 0.38$
- प्रश्न 4. यदि $P(E) = 0.05$ है, तो $P(\bar{E})$ (" E नहीं" की प्रायिकता) क्या है? (2019)
- हल : $P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - 0.05 = 0.95$
- प्रश्न 5. यदि $P(E) = 0.06$ है, तो ' E नहीं' की प्रायिकता क्या होगी? (2022)
- हल : ' E नहीं', $P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 1 - 0.06 = 0.94$

प्रश्न 6. एक थैले में केवल नीबू की महक वाली गोलियाँ हैं। मालिनी बिना थैले में झाँके उसमें से एक गोली निकालती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह निकाली गयी गोली :

(i) सन्तरे की महक वाली है, (ii) नीबू की महक वाली है।

हल : (i) प्रायिकता 0 (शून्य) होगी, क्योंकि थैले में सन्तरे की महक वाली एक भी गोली नहीं है।

(ii) प्रायिकता 1 (एक) होगी, क्योंकि थैले में सभी गोलियाँ नीबू की महक वाली हैं।

प्रश्न 7. एक थैले में 3 लाल और 5 काली गेंदें हैं। इस थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। इसकी प्रायिकता क्या है कि गेंद (i) लाल हो? (ii) लाल नहीं हो?

हल : (i) गेंदों की कुल संख्या $S = 3 + 5 = 8$

अर्थात् प्रयोग के सभी सम्भावित परिणामों की संख्या $S = 8$

लाल गेंद होने के अनुकूल परिणामों की संख्या = 3

⇒ अतः, लाल गेंद होने की प्रायिकता $P(E) = \frac{E \text{ के अनुकूल परिणाम } n(E)}{\text{कुल सम्भावित परिणाम } n(S)} = \frac{3}{8}$ उत्तर

(ii) लाल गेंद नहीं होने की प्रायिकता $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

$= 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ उत्तर

प्रश्न 8. एक पिग्गी बैंक (Piggy bank) में, 50 पैसे के 100 सिक्के, ₹ 1 के 50 सिक्के, ₹ 2 के 20 सिक्के और ₹ 5 के 10 सिक्के हैं। यदि पिग्गी बैंक को हिलाकर एक सिक्का गिरने का परिणाम समप्रायिक है, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि वह गिरा हुआ सिक्का (i) 50 पैसे का होगा? (ii) ₹ 5 का नहीं होगा।

हल : मान लीजिए

$n(E_1) = 50$ पैसे के सिक्कों की संख्या = 100

$n(E_2) = ₹ 1$ के सिक्कों की संख्या = 50

$n(E_3) = ₹ 2$ के सिक्कों की संख्या = 20

$n(E_4) = ₹ 5$ के सिक्कों की संख्या = 10

कुल सिक्कों की संख्या

$n(S) = n(E_1) + n(E_2) + n(E_3) + n(E_4)$

⇒

$n(S) = 100 + 50 + 20 + 10 = 180$

(i)

$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{100}{180} = \frac{5}{9}$

उत्तर

(ii)

$n(\bar{E}_4) = n(S) - n(E_4) = 180 - 10 = 170$

$P(\bar{E}_4) = \frac{n(\bar{E}_4)}{n(S)} = \frac{170}{180} = \frac{17}{18}$

उत्तर

प्रश्न 9. ताश के पाँच पत्तों—ईट का दहला, गुलाम, बेगम, बादशाह और इक्का को पलटकर खूब फेंट दिया जाता है। फिर इनमें से एक पत्ता यादृच्छया निकाला जाता है :

(i) इसकी क्या प्रायिकता है कि यह एक बेगम है?

(ii) यदि बेगम निकल आती है, तो उसे अलग रख दिया जाता है और एक अन्य पत्ता निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि दूसरा निकाला गया पत्ता (a) एक इक्का है?

(b) एक बेगम है?

हल : (i) चूँकि

$n(S_1) = 5$ एवं $n(E_1) = 1$

⇒

$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S_1)} = \frac{1}{5}$

उत्तर

(ii) बेगम निकालकर रख दी जाती है तो $n(S_2) = 4$

(a) चूँकि

$n(E_2) = 1 \Rightarrow P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S_2)} = \frac{1}{4}$

उत्तर

(b) चूँकि

$n(E_3) = 0$ चूँकि बेगम है ही नहीं।

⇒

$P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S_2)} = \frac{0}{4} = 0$

उत्तर

- प्रश्न 10. (i) 20 बल्बों के एक समूह में 4 बल्ब खराब हैं। इस समूह में से एक बल्ब यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि बल्ब खराब होगा? (2020)
- (ii) मान लीजिए (i) में निकाला गया बल्ब खराब नहीं है और न ही इसे दुबारा बल्बों के साथ मिलाया जाता है। अब शेष बल्बों में से एक बल्ब यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह बल्ब खराब नहीं होगा?

हल : (i) $n(S_1) = 20$ एवं $n(E_1) = 4$

$$\Rightarrow P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S_1)} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

उत्तर

(ii) $n(S_2) = 20 - 1 = 19$ कुल बल्बों की संख्या

खराब बल्बों की संख्या = 4 \Rightarrow जो बल्ब खराब नहीं हैं उनकी संख्या = $19 - 4 = 15$ बल्ब

$$\Rightarrow n(E_2) = 15$$

$$\Rightarrow P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S_2)} = \frac{15}{19}$$

उत्तर

- प्रश्न 11. एक बच्चे के पास ऐसा पासा है, जिसके फलकों पर निम्नलिखित अक्षर अंकित हैं :

A B C D E A

इस पासे को एक बार फेंका जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि (i) A प्राप्त हो? (ii) D प्राप्त हो?

हल : कुल सम्भावित घटनाएँ $n(S) = 6$

(i) A के अनुकूल घटनाएँ $n(E_1) = 2$

[\because A दो बार आया है]

$$\Rightarrow P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

उत्तर

(ii) $\because n(E_2) = 1 \Rightarrow P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{1}{6}$

उत्तर

- प्रश्न 12. 144 बॉल पेनों के समूह में 20 बॉल पेन खराब हैं और शेष अच्छे हैं। आप वही पेन खरीदना चाहेंगे, जो अच्छा हो, परन्तु खराब पेन आप खरीदना नहीं चाहेंगे। दुकानदार इन पेनों में से, यादृच्छया एक पेन निकालकर आपको देता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि :

(i) आप पेन खरीदेंगे?

(ii) आप पेन नहीं खरीदेंगे?

हल : कुल पेनों की संख्या $n(S) = 144$

खरीदे जा सकने वाले अच्छे पेनों की संख्या, $n(E) = 144 - 20 = 124$.

खरीदे नहीं जा सकने वाले खराब पेनों की संख्या, $n(\bar{E}) = 20$

$$(i) P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{124}{144} = \frac{31}{36}$$

उत्तर

$$(ii) P(\bar{E}) = \frac{n(\bar{E})}{n(S)} = \frac{20}{144} = \frac{5}{36}$$

उत्तर

- प्रश्न 13. एक पासे को दो बार फेंका जाता है। इसकी प्रायिकता क्या है कि—

(i) 5 किसी भी बार नहीं आयेगा?

(ii) 5 कम-से-कम एक बार आयेगा?

हल : एक पासे को दो बार फेंकना अर्थात् दो पासों को एक साथ फेंकना समान प्रयोग है अतः

कुल सम्भावनाएँ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6).

$$\text{कुल सम्भावनाएँ} = n(S) = 36$$

(i) 5 एक भी बार न आने की घटना $n(E_1) = 25$

$$\Rightarrow P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{25}{36} \quad \text{उत्तर}$$

(ii) $n(E_2) = n(S) - n(E_1) = 36 - 25 = 11$

$$\Rightarrow P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{11}{36} \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 14. निम्नलिखित में से कौन-से तर्क सत्य हैं और कौन-से तर्क असत्य हैं? सकारण उत्तर दीजिए।

(i) यदि दो सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है, तो इसके तीन सम्भावित परिणाम दो चित, दो पट या प्रत्येक एक बार है। अतः इनमें से प्रत्येक परिणाम की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है।

(ii) यदि एक पासे को फेंका जाता है, तो इसके दो सम्भावित परिणाम एक विषम संख्या या एक सम संख्या है। अतः एक विषम संख्या ज्ञात करने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है।

हल : (i) यह कथन सत्य नहीं है, क्योंकि हम इस प्रकार वर्गीकृत तो कर सकते हैं लेकिन ये सम-सम्भावी नहीं हैं, क्योंकि तीसरे केस में पहले पर चित और दूसरे पर पट तथा पहले पर पट और दूसरे पर चित ये दो अलग घटनाएँ हैं। इस प्रकार चार सम्भावनाएँ हो सकती हैं। इस प्रकार परिणामों की प्रायिकता $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ एवं $\frac{1}{2}$ होती है।

(ii) कथन सत्य है, क्योंकि प्रश्न में विचारित दोनों परिणाम सम-सम्भावी हैं।

प्रश्न 15. दो भिन्न पासों को एक साथ उछाला गया। दोनों पासों के ऊपरी तलों पर आयी संख्याओं का गुणनफल 6 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : कुल सम्भावित परिणामों की संख्या $= n(S) = 6 \times 6 = 36$

गुणनफल 6 आने के सम्भावित परिणाम $(2 \times 3), (3 \times 2), (1 \times 6), (6 \times 1)$

$$\Rightarrow n(6) = 4$$

$$\Rightarrow P(6) = \frac{n(6)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

अतः, अभीष्ट प्रायिकता $P(6) = \frac{1}{9}$ उत्तर

प्रश्न 16. अच्छी प्रकार से फेंटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। इसकी प्रायिकता परिकलित कीजिए कि यह पत्ता—(i) एक इक्का होगा (2019),

(ii) एक इक्का नहीं होगा। (2019, 22)

हल : चूँकि एक गड्डी में 4 इक्के होते हैं तथा कुल 52 पत्ते होते हैं।

(i) निकाले गये पत्ते के इक्का होने की प्रायिकता, $P(E) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ उत्तर

(ii) निकाले गये पत्ते के इक्का न होने की प्रायिकता, $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$

$$= 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13} \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 17. 52 पत्तों की अच्छी तरह फेंटी गयी ताश की गड्डी में से यादृच्छया एक पत्ता निकाला गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाला गया पत्ता न तो लाल रंग का है और न ही एक बेगम है।

हल : चूँकि कुल सम्भावित परिणामों की संख्या = कुल पत्तों की संख्या $= n(S) = 52$

चूँकि निकाला गया पत्ता न तो लाल रंग का है और न ही बेगम है अर्थात् निकाला गया पत्ता बेगम रहित काले रंग का पत्ता है अतः सम्भावित परिणामों की कुल संख्या $= n(E) = 26 - 2 = 24$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{24}{52} = \frac{6}{13}$$

$$\text{अतः, अभीष्ट प्रायिकता} = \frac{6}{13}$$

उत्तर

प्रश्न 18. 900 सेबों के एक ढेर में से यादृच्छया एक सेब चुनने पर सड़ा हुआ सेब निकलने की प्रायिकता 0.18 है। ढेर में सड़े हुए सेबों की संख्या क्या है?

हल : चूँकि कुल सम्भावित परिणामों की संख्या = ढेर के कुल सेबों की संख्या = $n(S) = 900$
मान लीजिए सड़े हुए सेबों की संख्या = $n(E) = x$ है तथा चुना हुआ सेब सड़ा होने की प्रायिकता

$$P(E) = 0.18 \text{ (दिया है)}$$

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \Rightarrow 0.18 = \frac{x}{900}$$

$$\Rightarrow x = 900 \times 0.18 = 162$$

अतः, सड़े हुए अभीष्ट सेबों की संख्या = 162.

उत्तर

प्रश्न 19. हरप्रीत दो भिन्न-भिन्न सिक्कों को एक साथ उछालती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह कम-से-कम एक चित प्राप्त करेगी ? (2020)

हल : कुल सम्भावित परिणाम = $(H, H), (H, T), (T, H), (T, T) \Rightarrow n(S) = 4$
कम-से-कम एक चित आने के सम्भावित परिणाम = $(H, H), (H, T), (T, H) \Rightarrow n(E) = 3$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

$$\text{अतः, अभीष्ट प्रायिकता} = \frac{3}{4}$$

उत्तर

प्रश्न 20. दो पासे एक साथ फेंके जाते हैं। इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि दोनों पासों पर आने वाले अंकों का अन्तर 2 हो।

हल : कुल सम्भावित परिणामों की संख्या = $n(S) = 36$
अन्तर 2 होने के सम्भावित परिणाम $(3, 1), (1, 3), (4, 2), (2, 4), (3, 5), (5, 3), (4, 6), (6, 4)$
 $\Rightarrow n(E) = 8$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$\text{अतः, अभीष्ट प्रायिकता} = \frac{2}{9}$$

उत्तर

प्रश्न 21. आँग्ल भाषा की वर्णमाला से एक अक्षर यादृच्छया चुना जाता है। चुना गया अक्षर व्यंजन होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : आँग्ल भाषा में उपस्थित समस्त अक्षरों की कुल संख्या = $n(S) = 26$
व्यंजनों की कुल संख्या = $n(C) = 26 - 5 = 21$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{21}{26}$$

$$\text{अतः, अभीष्ट प्रायिकता } P(C) = \frac{21}{26}$$

उत्तर

प्रश्न 22. एक बक्से में 1,000 सील किए हुए लिफाफे हैं। उनमें से 10 पर नकद पुरस्कार ₹ 100 का अंकित है, 100 पर ₹ 50 पुरस्कार एवं 200 पर ₹ 20 का पुरस्कार अंकित है। शेष पर कोई भी नकद पुरस्कार नहीं है। उन लिफाफों को अच्छी तरह से फेंटकर मिला दिया जाता है और एक लिफाफा यादृच्छया निकाला जाता है तो उस लिफाफे को बिना नकद पुरस्कार वाला लिफाफा होने की प्रायिकता क्या होगी ?

हल : कुल लिफाफों की संख्या = $n(S) = 1000$
 नकद पुरस्कार वाले लिफाफों की कुल संख्या = $n(E) = 10 + 100 + 200 = 310$
 \Rightarrow बिना नकद पुरस्कार वाले लिफाफों की संख्या = $n(\bar{E}) = n(S) - n(E)$
 $\Rightarrow n(\bar{E}) = 1000 - 310 = 690$
 $\Rightarrow P(\bar{E}) = \frac{n(\bar{E})}{n(S)} = \frac{690}{1000} = 0.69$

अतः, अभीष्ट प्रायिकता = 0.69 उत्तर

प्रश्न 23. एक बक्से A में 25 स्लिप हैं जिनमें से 19 पर ₹ 1 अंकित है तथा शेष पर ₹ 5 अंकित है। दूसरे बक्से B में 50 स्लिप हैं जिनमें से 45 पर ₹ 1 अंकित है तथा शेष पर ₹ 13 अंकित है। दोनों बक्सों की सभी स्लिपों को एक तीसरे बक्से में डालकर अच्छी तरह मिला दिया जाता है। इनमें से एक स्लिप को यादृच्छया निकाला जाता है तो इसकी प्रायिकता क्या होगी कि निकाली गयी स्लिप पर ₹ 1 अंकित न हो।

हल : कुल स्लिपों की संख्या = $n(S) = 25 + 50 = 75$
 ₹ 1 अंकित स्लिपों की संख्या = $n(\text{₹ } 1) = 19 + 45 = 64$
 ₹ 1 अंकित न होने वाली स्लिपों की संख्या = $n(\bar{\text{₹ } 1}) = 75 - 64 = 11$

$$\Rightarrow P(\bar{\text{₹ } 1}) = \frac{n(\bar{\text{₹ } 1})}{n(S)} = \frac{11}{75}$$

अतः, अभीष्ट प्रायिकता $P(\bar{\text{₹ } 1}) = \frac{11}{75}$ उत्तर

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 1. एक डिब्बे में 5 लाल कंचे, 8 सफेद कंचे और 4 हरे कंचे हैं। इस डिब्बे में से एक कंचा यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाला गया कंचा (i) लाल है? (ii) सफेद है? (iii) हरा नहीं है?

हल : कुल कंचों की संख्या = $5 + 8 + 4 = 17$
 अर्थात् सभी सम्भव परिणामों की संख्या $(S) = 17$

(i) लाल कंचा होने के अनुकूल परिणाम $n(E_R) = 5$

$$\Rightarrow P(E_R) = \frac{n(E_R)}{n(S)} = \frac{5}{17} \quad \text{उत्तर}$$

(ii) सफेद कंचा होने के अनुकूल परिणाम $n(E_W) = 8$

$$\Rightarrow P(E_W) = \frac{n(E_W)}{n(S)} = \frac{8}{17} \quad \text{उत्तर}$$

(iii) हरा कंचा होने के अनुकूल परिणाम $n(E_G) = 4$

$$\Rightarrow \text{हरा कंचा न होने का परिणाम} = n(\bar{E}_G) = 17 - 4 = 13$$

$$\Rightarrow P(\bar{E}_G) = \frac{n(\bar{E}_G)}{n(S)} = \frac{13}{17} \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 2. एक बक्से में 3 नीले, 2 सफेद और 4 लाल कंचे हैं। यदि इस बक्से में से एक कंचा यादृच्छया निकाला जाता है, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि यह कंचा (i) सफेद है, (ii) नीला है, (iii) लाल है। (2019)

हल : [उपर्युक्त प्रश्न 1 की तरह हल कीजिए।]

[उत्तर—(i) $\frac{2}{9}$, (ii) $\frac{1}{3}$, (iii) $\frac{4}{9}$.]

प्रश्न 3. एक पासे को एक बार फेंका जाता है। निम्नलिखित को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए—

(i) एक अभाज्य संख्या।

(ii) 2 और 6 के बीच स्थित कोई संख्या।

(iii) एक विषम संख्या।

(2020)

हल : कुल सम्भावित परिणाम $n(S) = 6$

(i) अभाज्य संख्याएँ हैं $E_1 = 2, 3, 5$

$$\Rightarrow n(E_1) = 3$$

$$\Rightarrow P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

उत्तर

(ii) 2 (दो) और 6 के बीच संख्याएँ : $E_2 = 3, 4, 5$

$$\Rightarrow n(E_2) = 3$$

$$\Rightarrow P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

उत्तर

(iii) विषम संख्याएँ हैं : $E_3 = 1, 3, 5$

$$\Rightarrow n(E_3) = 3$$

$$\Rightarrow P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

उत्तर

प्रश्न 4. मान लीजिए हम एक पासे को एक बार फेंकते हैं। (i) 4 से बड़ी संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या होगी? (ii) 4 से छोटी या उसके बराबर संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

हल : [उपर्युक्त प्रश्न 3 की तरह हल कीजिए]

[उत्तर—(i) $\frac{1}{3}$, (ii) $\frac{2}{3}$]

प्रश्न 5. एक पेटी में 90 डिस्क (discs) हैं, जिन पर 1 से 90 संख्याएँ अंकित हैं। यदि इस पेटी में से एक डिस्क यादृच्छया निकाली जाती है, तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस डिस्क पर अंकित होगा, (i) दो अंकों की संख्या, (ii) एक पूर्ण वर्ग संख्या, (iii) 5 से विभाज्य एक संख्या?

हल : कुल सम्भावित घटनाएँ = कुल संख्याएँ, $n(S) = 90$

(i) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 एवं 9 इन 9 (नौ) संख्याओं को छोड़कर शेष सभी संख्याएँ 2 अंकों की होंगी।

$$\Rightarrow n(E_1) = 90 - 9 = 81$$

$$\Rightarrow P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{81}{90} = \frac{9}{10}$$

उत्तर

(ii) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, ये 9 (नौ) संख्याएँ पूर्ण वर्ग हैं।

$$\Rightarrow n(E_2) = 9$$

$$\Rightarrow P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$$

उत्तर

(iii) 5 से विभाज्य संख्याएँ हैं—5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85 एवं 90.

अर्थात् ये 18 संख्याएँ 5 से विभाज्य हैं— $n(E_3) = 18$

$$\Rightarrow P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$$

उत्तर

दीर्घ उत्तरीय/विश्लेषणात्मक प्रश्न

प्रश्न 1. 52 पत्तों की अच्छी तरह फेंटी गयी एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। निम्नलिखित को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए—

(i) लाल रंग का बादशाह।

(ii) एक फेस कार्ड अर्थात् तस्वीर वाला पत्ता। (2020)

(iii) लाल रंग का तस्वीर वाला पत्ता।

(iv) पान का गुलाम।

(v) हुकुम का पत्ता।

(vi) एक ईट की बेगम।

हल : ∵ सभी पत्तों की संख्या $n(S) = 52$

(i) लाल रंग के बादशाहों की संख्या, $n(E_1) = 2$

$$\Rightarrow P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26} \quad \text{उत्तर}$$

(ii) तस्वीर वाले पत्तों (फेस कार्डों) की संख्या, $n(E_2) = 12$

$$\Rightarrow P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13} \quad \text{उत्तर}$$

(iii) लाल रंग की तस्वीर वाले पत्तों की संख्या, $n(E_3) = 6$

$$\Rightarrow P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{6}{52} = \frac{3}{26} \quad \text{उत्तर}$$

(iv) पान के गुलाम की संख्या, $n(E_4) = 1$

$$\Rightarrow P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(S)} = \frac{1}{52} \quad \text{उत्तर}$$

(v) हुकुम के पत्तों की संख्या, $n(E_5) = 13$.

$$\Rightarrow P(E_5) = \frac{n(E_5)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \quad \text{उत्तर}$$

(vi) एक ईट की बेगम $\Rightarrow n(E_6) = 1$

$$\Rightarrow P(E_6) = \frac{n(E_6)}{n(S)} = \frac{1}{52} \quad \text{उत्तर}$$



गणित : कक्षा X

बोर्ड परीक्षा प्रश्न-पत्र : 2019

समय : 3 घण्टा]

[पूर्णांक : 100/80

- निर्देश— (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
 (ii) प्रश्न क्रमांक 1 से 5 तक वस्तुनिष्ठ प्रकार के प्रश्न हैं।
 (iii) प्रश्न क्रमांक 6 से अन्त तक आन्तरिक विकल्प दिए गए हैं।
 (iv) जहाँ आवश्यक हो स्वच्छ एवं नामांकित चित्र बनाइए।

1. सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए :

1 × 5 = 5

- (i) 96 और 404 का HCF होगा :
 (a) 120, (b) 4, (c) 10, (d) 3.
- (ii) यदि द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक α और β हो, तो $\alpha \cdot \beta$ का मान होगा :
 (a) c/a , (b) a/c , (c) $-c/a$, (d) $-a/c$.
- (iii) बहुपद $x^2 - 3$ के शून्यक होंगे :
 (a) $\pm \sqrt{3}$, (b) ± 3 , (c) 3, (d) 9.
- (iv) जब $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ हो, तो समीकरण निकाय $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$:
 (a) के दो हल होंगे (b) का कोई हल नहीं होगा,
 (c) के अनंत अनेक हल होंगे (d) का अद्वितीय हल होगा।
- (v) $x - 2y = 0$ और $3x + 4y - 20 = 0$ रेखाएँ :
 (a) प्रतिच्छेद करती हैं, (b) संपाती हैं,
 (c) समान्तर हैं, (d) इनमें से कोई नहीं।

उत्तर—(i) (b), (ii) (a), (iii) (a), (iv) (b), (v) (a).

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

1 × 5 = 5

- (i) एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ में कोई वास्तविक मूल नहीं होते यदि
- (ii) समीकरण $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ का विविक्तकर हैं।
- (iii) समान्तर श्रेणी $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots$ में सार्वअन्तर d है।
- (iv) किसी प्रयोग की सभी प्रारम्भिक घटनाओं की प्रायिकता का योग हैं।
- (v) कोण θ वाले त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल का सूत्र है।

उत्तर—(i) $b^2 < 4ac$, (ii) 0, (iii) -1, (iv) एक, (v) क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360} \pi r^2$.

3. निम्नलिखित में सत्य/असत्य बताइए :

1 × 5 = 5

- (i) वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब, जीवा को समद्विभाजित करता है।
 (ii) सभी वर्ग समरूप होते हैं।
 (iii) समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ आधार \times शीर्षलम्ब होता है।
 (iv) वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा को छेदक रेखा कहते हैं।
 (v) देखी गई वस्तु का उन्नयन कोण दृष्टि रेखा और क्षैतिज रेखा से बना कोण होता, जबकि वस्तु को देखने के लिए अपने सिर को नीचे की ओर झुकाना पड़ता है।

उत्तर—(i) सत्य, (ii) सत्य, (iii) सत्य, (iv) सत्य, (v) असत्य।

1 × 5 = 5

4. प्रत्येक का एक शब्द/वाक्य में उत्तर लिखिए :

(i) 1, 2, 3, 4, 5 का समान्तर माध्य क्या होगा ?

(ii) माध्यिका का सूत्र लिखिए।

(iii) घटना E की प्रायिकता + घटना 'E' नहीं, की प्रायिकता का मान होता है।

(iv) शंकु के छिन्नक का सूत्र लिखिए।

(v) एक वृत्त की कितनी समान्तर स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं ?

उत्तर—(i) 3, (ii) माध्यिका = $l + \left(\frac{n/2 - cf}{f}\right) \times h$, (iii) 1 (एक), (iv) $V = \frac{1}{3} \pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$,

(v) 2 (दो)।

1 × 5 = 5

5. सही जोड़ी बनाइए :

'अ'

(i) $1 + \cot^2 \theta$

(ii) $\sec \theta$

(iii) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$

(iv) $\tan 60^\circ$

(v) $\cos(90^\circ - \theta)$

'ब'

(a) $\sin \theta$

(b) 0

(c) $\sqrt{3}$

(d) 1

(e) $\operatorname{cosec}^2 \theta$

(f) $\frac{1}{\cos \theta}$

(g) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

उत्तर—(i) → (e), (ii) → (f), (iii) → (d), (iv) → (c), (v) → (a).

6. संख्याओं 6 और 20 के अभाज्य गुणनखण्डन विधि से HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

अथवा

संख्या 6, 72 और 120 का अभाज्य गुणनखण्डन विधि से H.C.F. ज्ञात कीजिए।

7. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः -3 और 2 है।

अथवा

$2x^2 + 3x + 1$ को $x + 2$ से भाग दीजिए।

8. बिन्दुओं (2, 3) और (4, 1) के बीच की दूरियाँ ज्ञात कीजिए।

अथवा

उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (1, -1), (-4, 6) और (-3, -5) हैं।

9. दो खिलाड़ी संगीता और रेशमा टेनिस का एक मैच खेलती हैं। संगीता द्वारा मैच जीतने की प्रायिकता 0.62 है। रेशमा के जीतने की क्या प्रायिकता है?

अथवा

एक बक्से में 3 नीले, 2 सफेद और 4 लाल कंचे (Marbles) हैं। यदि इस बक्से में से एक कंचा यादृच्छया निकाला गया तो इसकी प्रायिकता है कि वह कंचा (i) सफेद, (ii) नीला, (iii) लाल है।

10. यदि $P(E) = 0.05$ है, तो $P(\bar{E})$ ("E नहीं" की प्रायिकता) क्या है?

अथवा

अच्छी प्रकार से फेंटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। इसकी प्रायिकता परिकलित कीजिए कि यह पत्ता (i) एक इक्का होगा, (ii) एक इक्का नहीं होगा।

11. सिद्ध कीजिए— $\sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A$.

अथवा

निम्नलिखित का मान निकालिए : $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ$.

12. K का मान ज्ञात कीजिए, यदि बिन्दु A(2, 3), B(4, K) और C(6, -3) संरेखी हैं।

अथवा

बिन्दुओं (5, -6) और (-1, -4) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को y-अक्ष किस अनुपात में विभाजित करती है, प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

13. बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती हैं।

अथवा

सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरोँ पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समान्तर होती हैं।

14. त्रिज्या 4 सेमी वाले एक वृत्त के त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 30° है। साथ ही संगत दीर्घ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)

अथवा

6 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के एक त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका कोण 60° है।

15. सिद्ध कीजिए कि $5 - \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अथवा

दर्शाइए कि एक धनात्मक विषम पूर्णांक $4q + 1$ या $4q + 3$ के रूप का होता है जब q एक पूर्णांक है।

16. द्विघात बहुपद $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

अथवा

$3x^3 + x^2 + 2x + 5$ को $1 + 2x + x^2$ से भाग दीजिए।

17. यदि किसी सामान्तर श्रेणी (A.P.) के प्रथम 14 पदों का योग 1050 है तथा इसका प्रथम पद 10 है, तो 20वाँ पद ज्ञात कीजिए।

अथवा

उस सामान्तर श्रेणी (A.P.) का 31वाँ पद ज्ञात कीजिए जिसका 11वाँ पद 38 और 16वाँ पद 73 है।

18. भूमि में एक बिन्दु P से एक 10 मीटर ऊँचे भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। भवन के शिखर पर एक ध्वज को लहराया गया है और P से ध्वज के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। ध्वज-दंड की लम्बाई और बिन्दु P से भवन की दूरी ज्ञात कीजिए। (यहाँ आप $\sqrt{3} = 1.732$ ले सकते हैं)

अथवा

एक बहुमंजिल भवन के शिखर से देखने पर एक 8 m ऊँचे भवन के शिखर और तल के अवनमन कोण क्रमशः 30° और 45° हैं। बहुमंजिल भवन की ऊँचाई और दो भवनों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

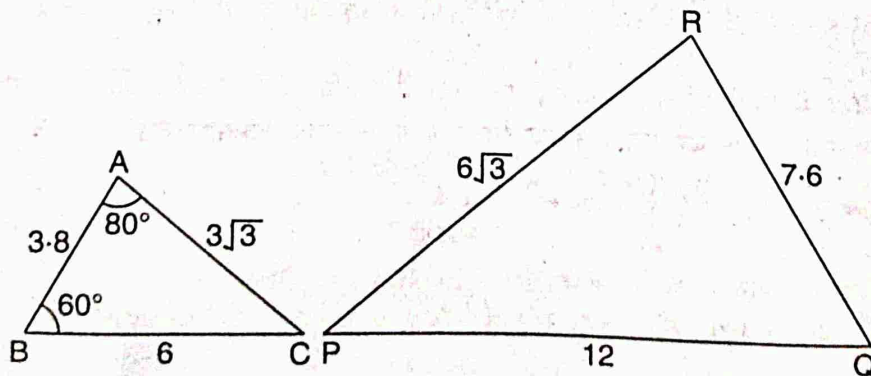
19. विलोपन विधि का प्रयोग करके निम्न रैखिक समीकरण युग्म को हल कीजिए :

$$2x + 3y = 8; \quad 4x + 6y = 7.$$

अथवा

5 संतरे और 3 सेबों का मूल्य ₹ 35 है तथा 2 संतरे और 4 सेबों का मूल्य ₹ 28 है। तब 1 संतरा तथा 1 सेब का मूल्य ज्ञात कीजिए।

20. आकृति में $\angle P$ ज्ञात कीजिए।



अथवा

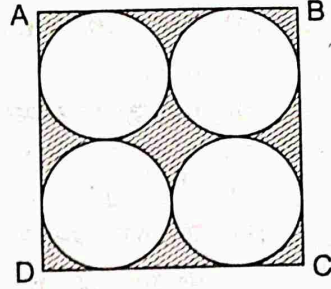
ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसका कोण C समकोण है। सिद्ध कीजिए कि $AB^2 = 2AC^2$ है।

21. दी गई आकृति में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जहाँ $ABCD$ भुजा 14 cm का एक वर्ग है। 4

अथवा

त्रिज्या 21 cm वाले वृत्त का एक चाप केन्द्र पर 60° का कोण अंतरित करता है।

- (i) चाप की लम्बाई
(ii) त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



22. निम्न समीकरण के मूल ज्ञात कीजिए : $x + \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$. 5

अथवा

दो ऐसे क्रमागत विषम धनात्मक पूर्णोंक ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 290 हो।

23. यदि $\sin A = \frac{3}{4}$, तो $\cos A$ और $\tan A$ का मान परिकलित कीजिए। 5

अथवा

निम्नलिखित का मान निकालिए : $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$.

24. एक त्रिभुज ABC के समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं की $\frac{5}{3}$ हो। 5

अथवा

किसी चूड़ी की सहायता से वृत्त खींचिए। वृत्त के बाहर एक बिंदु से वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए।

25. एक शंकु का छिन्नक जो 45 cm ऊँचा है, के सिरों के त्रिज्याएँ क्रमशः 25 cm और 7 cm हैं। इसका आयतन ज्ञात कीजिए। 5

अथवा

पानी से पूरी भरी हुई एक अर्द्धगोलाकार टंकी को एक पाइप द्वारा $3\frac{4}{7}$ लिटर प्रति सेकण्ड की दर से खाली किया जाता है। यदि टंकी का व्यास 3 मीटर है, तो वह कितने समय में आधी खाली हो जाएगी? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।)

26. विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा मोहल्ले के 20 परिवारों पर लिये गये सर्वेक्षण के परिणामस्वरूप विभिन्न परिवारों के सदस्यों की संख्या से सम्बन्धित निम्नलिखित आँकड़े प्राप्त हुए : 5

परिवार माप	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
परिवारों की संख्या	7	8	2	2	1

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

अथवा

दिये गये आँकड़ों से सामान्तर माध्य ज्ञात कीजिए :

वर्ग अंतराल	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
विद्यार्थियों की संख्या	2	3	7	6	6	6

बोर्ड परीक्षा प्रश्न-पत्र : 2020

1. सही विकल्प चुनकर लिखिए :

1 × 5 = 5

- (i) जब $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ हो, तो समीकरण निकाय $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 :$$

(a) का एक अद्वितीय हल होगा,

(b) का कोई हल नहीं होगा,

(c) के दो हल होंगे,

(d) के अनंत: अनेक हल होंगे।

- (ii) A.P. : 10, 7, 4... का 10वाँ पद है :
 (a) 14, (b) 17, (c) -14, (d) -17.
- (iii) यदि द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक α और β हों, तो $\alpha + \beta$ का मान होगा :
 (a) $-\frac{b}{a}$, (b) $\frac{b}{a}$, (c) $\frac{a}{b}$, (d) $-\frac{a}{b}$.
- (iv) यदि एक बिन्दु P से O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर PA, PB स्पर्श रेखाएँ परस्पर 80° के कोण पर झुकी हों, तो $\angle POA$ बराबर है :
 (a) 50° , (b) 60° , (c) 70° , (d) 80° .
- (v) ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि D भुजा BC का मध्य-बिन्दु है। त्रिभुजों ABC और BDE के क्षेत्रफलों का अनुपात है :
 (a) 2 : 1, (b) 1 : 2, (c) 4 : 1, (d) 1 : 4.

उत्तर—(i) (d), (ii) (d), (iii) (a), (iv) (a), (v) (c).

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

1 × 5 = 5

- (i) बेलन के आयतन का सूत्र है।
 (ii) किसी प्रयोग की सभी प्रारम्भिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग है।
 (iii) केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापकों में एक आनुभाविक सम्बन्ध है
 3 माध्यक = बहुलक +
 (iv) r त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल का सूत्र है।
 (v) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उसे बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है।

उत्तर—(i) $\pi r^2 h$, (ii) एक, (iii) 2 माध्य, (iv) πr^2 , (v) केवल एक।

3. निम्नलिखित में सत्य/असत्य लिखिए :

1 × 5 = 5

- (i) किसी बारम्बारता बंटन में किसी वर्ग की संचयी बारम्बारता उस वर्ग से पहले वाले सभी वर्गों की बारम्बारताओं का योग होती है।
 (ii) त्रिज्या r वाले वृत्त की परिधि = $2\pi r$
 (iii) घात 2 के किसी बहुपद के अधिक से अधिक दो शून्यक हो सकते हैं।
 (iv) किसी बिन्दु की y -अक्ष से दूरी उस बिन्दु का y निर्देशांक कहलाती है।
 (v) $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

उत्तर—(i) सत्य, (ii) सत्य, (iii) सत्य, (iv) असत्य, (v) असत्य।

4. सही जोड़ी बनाइए :

1 × 5 = 5

स्तम्भ 'अ'	स्तम्भ 'ब'
(i) $\operatorname{cosec}(90 - \theta)$	(a) 0
(ii) $\sqrt{\sec^2 \theta - \tan^2 \theta}$	(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(iii) $\sin 0^\circ$	(c) $\sec \theta$
(iv) $\tan \theta$	(d) 1
(v) $\cos 45^\circ$	(e) $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

उत्तर—(i) → (c), (ii) → (d), (iii) → (a), (iv) → (e), (v) → (b).

5. प्रत्येक का एक शब्द/वाक्य में उत्तर लिखिए :

1 × 5 = 5

- (i) दृष्टि-रेखा की परिभाषा लिखिए।
 (ii) दो चरों x व y वाले रैखिक समीकरण का मानक रूप लिखिए।

(iii) समान्तर श्रेणी का व्यापक रूप लिखिए।

(iv) द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के विविक्तकर ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।

(v) क्या $(x+1)^2 = 2(x-3)$ द्विघात समीकरण है ?

उत्तर—(i) हमारी आँख से उस वस्तु को जिसे हम देख रहे हैं, जोड़ने वाली रेखा दृष्टि रेखा कहलाती है, (ii) $ax + by + c = 0$, (iii) $a, a \pm d, a \pm 2d, a \pm 3d, \dots$, (iv) $b^2 - 4ac$, (v) हाँ।

6. संख्या 12, 15 और 21 का अभाज्य गुणनखण्ड विधि से H.C.F. ज्ञात कीजिए। 2

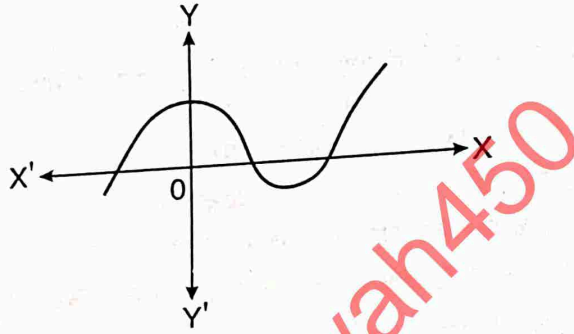
अथवा

बिना लम्बी विभाजन प्रक्रिया किये बताइए कि परिमेय संख्या $\frac{35}{50}$ का दशमलव प्रसार सांत है या अंसांत आवर्ती है। 2

7. बहुपद $x^2 - 3$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।

अथवा

किसी बहुपद $p(x)$ के लिए, $y = p(x)$ का ग्राफ नीचे आकृति में दिया है। $p(x)$ के शून्यकों की संख्या ज्ञात कीजिए।



8. बिन्दुओं $(0, 0)$ और $(36, 15)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। 2

अथवा

x -अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो $(2, -5)$ और $(-2, 9)$ से समदूरस्थ है।

9. 20 बल्बों के एक समूह में 4 बल्ब खराब हैं। इस समूह में से एक बल्ब यादृच्छ्या निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह बल्ब खराब है ? 2

अथवा

एक पाँसे को एक बार फेंका जाता है। एक विषम संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

10. हरप्रीत दो भिन्न-भिन्न सिक्कों को एक साथ उछालती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह कम-से-कम एक चित प्राप्त करेगी ? 2

अथवा

52 पत्तों की अच्छी प्रकार से फेंटी गई एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। एक फेस कार्ड प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

11. यदि $\sin A = \frac{3}{4}$, तो $\cos A$ और $\tan A$ का मान परिकलित कीजिए। 3

अथवा

यदि $\tan A = \cot B$, तो सिद्ध कीजिए कि $A + B = 90^\circ$ ।

12. बिन्दु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जहाँ AB एक वृत्त का व्यास है जिसका केन्द्र $(2, -3)$ है तथा B के निर्देशांक $(1, 4)$ हैं। 3

अथवा

k व. मान ज्ञात कीजिए, यदि बिन्दु $A(8, 1)$, $B(k, -4)$ और $C(2, -5)$ संरेखी हैं।

13. 5 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PQ केन्द्र O से जाने वाली एक रेखा से बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है कि $OQ = 12$ सेमी। PQ की लम्बाई ज्ञात कीजिए। 3

अथवा

बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती हैं।

14. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 19 सेमी और 9 सेमी हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसकी परिधि इन दोनों वृत्तों की परिधियों के योग के बराबर है। 3

अथवा

10 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केन्द्र पर एक समकोण अंतरित करती है। संगत लघु वृत्त खण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

15. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। 4

अथवा

135 और 225 का HCF ज्ञात करने के लिए यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कीजिए।

16. द्विघात बहुपद $x^2 - 2x - 8$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के सम्बन्ध की सत्यता की जाँच कीजिए। 4

अथवा

$3x^3 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ के अन्य सभी शून्यक ज्ञात कीजिए, यदि इसके दो शून्यक $\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ हैं।

17. k के किस मान के लिए, निम्न रेखिक समीकरणों के युग्म का कोई हल नहीं है ? 4

$$3x + y = 1$$

$$(2k - 1)x + (k - 1)y = 2k + 1$$

अथवा

दो संपूरक कोणों में बड़ा कोण छोटे कोण से 18 डिग्री अधिक है। उन्हें ज्ञात कीजिए।

18. किसी A.P. का प्रथम पद 5, अंतिम पद 45 और योग 400 है। पदों की संख्या और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए। 4

अथवा

10 और 250 के बीच में 4 के कितने गुणज हैं ?

19. 1.5 मीटर लम्बा एक प्रेक्षक एक चिमनी से 28.5 मीटर की दूरी पर है। उसकी आँखों से चिमनी के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। चिमनी की ऊँचाई बताइए। 4

अथवा

सर्कस का एक कलाकर एक 20 मीटर लम्बी डोर पर चढ़ रहा है जो अच्छी तरह से तनी हुई है, भूमि पर सीधे लगे खम्भे के शिखर से बंधा हुआ है। यदि भूमि स्तर के साथ डोर द्वारा बनाया गया कोण 30° हो, तो खम्भे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

20. लम्बाई 6 मीटर वाले एक ऊर्ध्वाधर स्तम्भ की भूमि पर छाया की लम्बाई 4 मीटर है, जबकि उसी समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 28 मीटर है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। 4

अथवा

एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा $2a$ है। उसके प्रत्येक शीर्षलम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

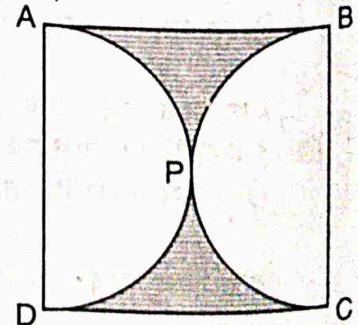
21. एक छतरी में आठ ताने हैं, जो बराबर दूरी पर लगे हुए हैं। छतरी को 45 सेमी त्रिज्या वाला एक सपाट वृत्त मानते हुए, इसकी दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4

अथवा

आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि ABCD भुजा 14 सेमी का एक वर्ग है तथा APD और BPC दो अर्धवृत्त हैं।

22. निम्नलिखित द्विघात समीकरण में k का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि उसके दो बराबर मूल हों : 5

$$2x^2 + kx + 3 = 0.$$



अथवा

निम्नलिखित समीकरण के मूल ज्ञात कीजिए : $x - \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$.

23. सिद्ध कीजिए : $\frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 \sec A$.

5

अथवा

यदि A, B और C त्रिभुज ABC के अन्तःकोण हों, तो दिखाइए कि :

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

24. 3 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। इसके किसी बढ़ाए गए व्यास पर केन्द्र से 7 सेमी की दूरी पर स्थित दो बिन्दु P और Q लीजिए। इन दोनों बिन्दुओं से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए।

5

अथवा

5 सेमी, 6 सेमी और 7 सेमी भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ दिये हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{7}{5}$ गुनी हों। रचना के पद भी लिखिए।

25. मॉडल बनाने वाली मिट्टी से ऊँचाई 24 सेमी और आधार त्रिज्या 6 सेमी वाला एक शंकु बनाया गया है। एक बच्चे ने इसे गोले के आकार में बदल दिया। गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

5

अथवा

दवा का एक कैप्सूल एक बेलन के आधार का है जिसके दोनों सिरों पर एक-एक अर्धगोला लगा हुआ है। पूरे कैप्सूल की लम्बाई 14 मिमी है और उसका व्यास 5 मिमी है। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

26. किसी फैक्टरी के 50 श्रमिकों की दैनिक मजदूरी के निम्नलिखित बंटन पर विचार कीजिए :

दैनिक मजदूरी (रुपये में)	500-520	520-540	540-560	560-580	580-600
श्रमिकों की संख्या	12	14	8	6	10

इस फैक्टरी के श्रमिकों की माध्य दैनिक मजदूरी ज्ञात कीजिए।

अथवा

निम्नलिखित सारणी किसी अस्पताल में एक विशेष वर्ष में भर्ती हुए रोगियों की आयु को दर्शाती है :

आयु (वर्षों में)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
रोगियों की संख्या	6	11	21	23	14	5

उपरोक्त आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

बोर्ड परीक्षा प्रश्न-पत्र : 2021

विशेष : कोरोना बीमारी के चलते माध्यमिक शिक्षा मण्डल, मध्य प्रदेश, भोपाल द्वारा गणित : कक्षा 10 की बोर्ड परीक्षा 2021 निरस्त कर दी गई थी।

बोर्ड परीक्षा प्रश्न-पत्र : 2022

1. सही विकल्प चुनकर लिखिए :

1 × 6 = 6

(i) HCF (91, 21) है :

- (a) 91, (b) 21, (c) 13, (d) 12.

(ii) समीकरण निकाय $x + 2y + 5 = 0$ और $-3x - 6y + 1 = 0$ का हल होगा :

- (a) अद्वितीय हल, (b) कोई हल नहीं,
-
- (c) अनन्ततः अनेक हल, (d) दो हल।

(iii) द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यकों का योग होगा :

- (a)
- $\frac{b}{a}$
- , (b)
- $\frac{a}{b}$
- , (c)
- $-\frac{b}{a}$
- , (d)
- $-\frac{c}{a}$
- .

(iv) द्विघात बहुपद $x^2 - 4x + 4 = 0$ के विविक्तकर का मान होगा :

- (a) 4, (b) 2, (c) 0, (d) 1.

(v) वृत्त के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की संख्या होगी :

- (a) 1, (b) 2, (c) 3, (d) 0.

(vi) बिन्दु (0, 5) एवं (-5, 0) के बीच की दूरी है :

- (a) 5, (b)
- $5\sqrt{2}$
- , (c)
- $2\sqrt{5}$
- , (d) 2.

उत्तर—(i) सभी विकल्प गलत हैं (सही उत्तर 7 है), (ii) (b), (iii) (c), (iv) (c), (v) (a), (vi) (b).

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

1 × 7 = 7

(i) $\text{HCF}(a, b) \times \text{LCM}(a, b) = \dots$ है।(ii) समीकरण $x + y = 8$ में यदि $x = 3$, तब $y = \dots$ होगा।(iii) एक बहुपद जिसकी घात 3 है, वह \dots बहुपद कहलाता है।(iv) यदि प्रथम पद a एवं सार्व-अन्तर d हो, तब n वाँ पद \dots होगा।(v) प्रत्येक वर्ग \dots होते हैं।(vi) एक रेखा जो वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है वह \dots रेखा कहलाती है।(vii) त्रिज्या r वाले वृत्त का क्षेत्रफल का सूत्र = \dots है।उत्तर—(i) $a \times b$, (ii) 5, (iii) त्रिघात, (iv) $a + (n - 1)d$, (v) समरूप, (vi) छेदक, (vii) πr^2 .

3. सही जोड़ी मिलाइए :

1 × 6 = 6

स्तम्भ 'अ'

स्तम्भ 'ब'

(i) $\text{cosec}(90^\circ - \theta)$

(a) 1

(ii) $\cos \theta$

(b) 0

(iii) $\sin 0^\circ$ (c) $\frac{1}{\sec \theta}$ (iv) $\cos 0^\circ$ (d) $\text{cosec } \theta$ (v) $\sqrt{1 + \tan^2 \theta}$ (e) $\sin \theta$ (vi) $\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ (f) $\sec \theta$ (g) $\sec^2 \theta$

उत्तर—(i) → (d), (ii) → (c), (iii) → (b), (iv) → (a), (v) → (f), (vi) → (e).

4. प्रत्येक का एक शब्द/वाक्य में उत्तर लिखिए :

1 × 7 = 7

(i) यदि $a = bq$, तो a एवं b में क्या सम्बन्ध है ?(ii) यदि a, b और c वास्तविक संख्याएँ हैं, और $a \neq 0$, तब द्विघात समीकरण किस रूप का होगा ?

(iii) समकोण त्रिभुज प्रमेय का नाम लिखो।

(iv) मूल बिन्दु से बिन्दु (x, y) की दूरी लिखो।

(v) सर्वाधिक बारम्बारता वाला वर्ग क्या कहलाता है ?

(vi) एक असंभव घटना की प्रायिकता क्या होगी ?

(vii) $P(E) + P(\bar{E})$ का मान क्या होगा ?

उत्तर—(i) b, a का गुणनखण्ड है, (ii) $ax^2 + bx + c = 0$, (iii) पाइथागोरस प्रमेय, (iv) $\sqrt{x^2 + y^2}$,

(v) बहुलक वर्ग, (vi) 0 (शून्य), (vii) 1 (एक)।

5. निम्नलिखित में सत्य/असत्य लिखिए :

1 × 6 = 6

(i) $x(x-1) = 0$ में x का मान शून्य और एक है।

(ii) समान्तर श्रेणी 10, 7, 4 ... का 10वाँ पद -17 है।

(iii) समरूप त्रिभुजों का क्षेत्रफल सदैव बराबर होता है।

(iv) शंकु का आयतन $= \pi r^2 h$ है।

(v) अर्द्ध गोले का आयतन $= \frac{4}{3} \pi r^3$ होगा।

(vi) 3 माध्यिका = बहुलक + 2 माध्य।

उत्तर—(i) सत्य, (ii) सत्य, (iii) असत्य, (iv) असत्य, (v) असत्य, (vi) सत्य।

6. दर्शाइए कि प्रत्येक धनात्मक सम पूर्णांक $2q$ के रूप में होता है तथा प्रत्येक धनात्मक विषम पूर्णांक $2q + 1$ के रूप का होता है जहाँ q कोई पूर्णांक है।

अथवा

संख्या 6, 72 और 120 का अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा L.C.M. ज्ञात कीजिए।

7. द्विघात बहुपद $6x^2 - 3 - 7x$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।

अथवा

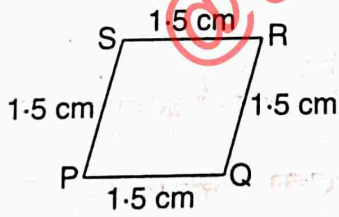
एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यकों के योग तथा गुणनफल क्रमशः 1, 1 हैं।

8. A.P. : -5, -1, 3, 7 के लिए प्रथम पद a और सार्व अन्तर d लिखिए।

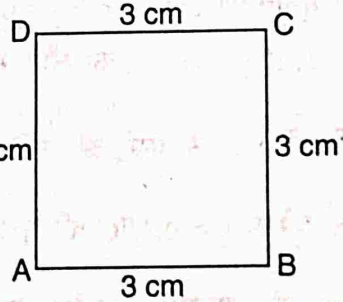
अथवा

A.P. : 21, 18, 15, का कौन-सा पद -81 है ?

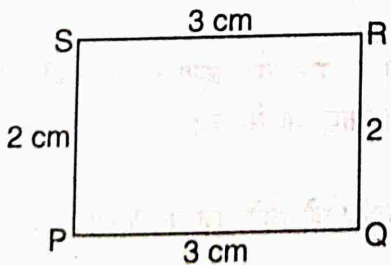
9. बताइए कि निम्नलिखित आकृतियाँ समरूप हैं या नहीं।



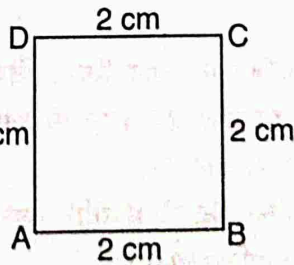
एवं



(A)



(B)



अथवा

भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि (i) उनके संगत कोण हों तथा (ii) उनकी संगत भुजाएँ हों। (बराबर/समानुपाती)

10. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जो बिन्दुओं $(-1, 7)$ और $(4, -3)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को $2 : 3$ के अनुपात में विभाजित करता है। 2
- अथवा
- यदि बिन्दु $A(6, 1)$, $B(8, 2)$, $C(9, 4)$ और $D(P, 3)$ एक समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष इसी क्रम में हों, तो P का मान ज्ञात कीजिए।
11. बिन्दुओं $A(5, 2)$, $B(4, 7)$ और $C(7, -4)$ से बनने वाले $\triangle ABC$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 2
- अथवा
- K का मान ज्ञात कीजिए, यदि बिन्दु $A(2, 3)$, $B(4, K)$ और $C(6, -3)$ संरेखी हैं।
12. यदि $\sin A = \frac{3}{4}$, तो $\cos A$ और $\tan A$ का मान परिकलित कीजिए। 2
- अथवा
- एक समकोण त्रिभुज ABC में जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = 1$, तो सत्यापित कीजिए कि $2 \sin A \cdot \cos A = 1$.
13. 10 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केन्द्र पर एक समकोण अन्तरित करती है, तो संगत लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3 \cdot 14$) 2
- अथवा
- त्रिज्या 21 सेमी वाले वृत्त का एक चाप केन्द्र पर 60° का कोण अन्तरित करता है, चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
14. असम्भव घटना को परिभाषित कीजिए। 2
- अथवा
- प्रारम्भिक घटना को परिभाषित कीजिए।
15. अच्छी प्रकार से फेंटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है, इसकी प्रायिकता परिकलित कीजिए कि एक इक्का नहीं होगा। 2
- अथवा
- यदि $P(E) = 0.06$ है, तो 'E नहीं' की प्रायिकता क्या है ?
16. गुणनखण्ड द्वारा समीकरण $2x^2 + x - 6 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए। 3
- अथवा
- द्विघात समीकरण $2x^2 - 3x + 5 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।
17. A.P. : 3, 8, 13, 18, का कौन-सा पद 78 है ? 3
- अथवा
- यदि किसी A.P. के तीसरे और नौवें पद क्रमशः 4 और -8 हैं, तो इसका कौन-सा पद शून्य होगा ?
18. यदि कोई रेखा एक $\triangle ABC$ की भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर प्रतिच्छेद करें तथा भुजा BC के समान्तर हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ होगा। 3
- अथवा
- सिद्ध कीजिए कि यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समान्तर अन्य दो भुजाओं को भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने के लिए एक रेखा खींची जाए, तो ये अन्य दो भुजाएँ एक ही अनुपात में विभाजित हो जाती हैं।
19. सिद्ध कीजिए कि दो सकेन्द्रीय वृत्तों में बड़े वृत्त की जीवा जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती है, स्पर्श बिन्दु पर समद्विभाजित होती है। 3
- अथवा
- सिद्ध कीजिए कि वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से जाने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है।

20. निम्नलिखित समीकरणों के युग्मों को विलोपन विधि से हल कीजिए :

4

$$3x + y = 10 \text{ और } 2x + 2y = 12.$$

अथवा

- निम्नलिखित समीकरणों के युग्म को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए :

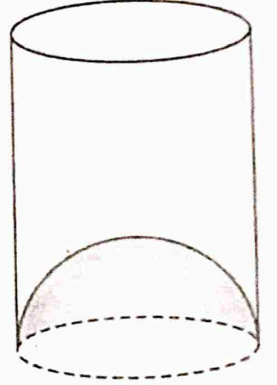
$$x + y = 5 \text{ और } 2x - 3y = 4.$$

21. 4 cm, 5 cm और 6 cm भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर इसके समरूप एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ प्रथम त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{2}{3}$ गुनी हैं। 4

अथवा

एक दिये गये त्रिभुज ABC के समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ दिए गए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{3}{4}$ हो।

22. एक जूस बेचने वाला अपने ग्राहकों को आकृति में दर्शाए गिलासों से जूस देता था, बेलनाकार गिलास का आन्तरिक व्यास 5 सेमी था परन्तु गिलास के निचले आधार में एक उभरा हुआ अर्द्ध गोला था, जिससे गिलास की धारिता कम हो जाती थी। यदि एक गिलास की ऊँचाई 10 सेमी थी, तो गिलास की आभासी धारिता या वास्तविक धारिता ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ का उपयोग करें)। 4



अथवा

मॉडल बनाने वाली मिट्टी से ऊँचाई 24 सेमी और आधार त्रिज्या 6 सेमी वाला एक शंकु बनाया गया है, एक बच्चे ने इसे गोले के आधार में बदल दिया। गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

23. किसी फैक्टरी के 50 श्रमिकों की दैनिक मजदूरी के निम्नलिखित बंटन पर विचार कीजिए : 4
एक उपयुक्त विधि का प्रयोग करते हुए, इस फैक्टरी के श्रमिकों की माध्य दैनिक मजदूरी ज्ञात कीजिए।

दैनिक मजदूरी (रुपये में)	500-520	520-540	540-560	560-580	580-600
श्रमिकों की संख्या	12	14	8	6	10

अथवा

नीचे दिया हुआ बंटन एक दिवसीय क्रिकेट मैचों में गेंदबाजों द्वारा लिये गये विकेटों की संख्या दर्शाता है। उपयुक्त विधि चुनते हुए लिये गये विकेटों का माध्य ज्ञात कीजिए।

विकेटों की संख्या	20-60	60-100	100-150	150-250	250-350	350-450
गेंदबाजों की संख्या	7	5	16	12	2	3

Amarwah unity



Amarwah Unity YouTube

SUBSCRIBED



15.9K subscribers • 250 videos

Stand with unity, an educational channel for the helping students & providing study materials



Uploads



Students Unity

public channel



Description

Paid promotion available contact  
@Unity450_bot

Instagram <https://instagram.com/amarwah450>

Join our PDF Channel <https://t.me/amarwah455>

Paid promotion available contact :-
@Unity450_bot

t.me/amarwah450

Invite Link



Notifications

On

