Page

-: पाठ → 3 :-

-: ऋजुरेखीय पथ पर गति :-

(सरल रेखा में गति)

→ **विराम अवस्था [Rest Position] →** यदि कोई वस्तु अपने किसी निश्चित बिन्दु के सापेक्ष अपनी स्थिति में समय के साथ परिवर्तन न करें तो वस्तु विराम अवस्था में कहलाती है।

यदि वस्तु की स्थिति को d से तथा समय को t से प्रदर्शित करें तो विराम अवस्था हेतु शर्त -

$$d \neq f(t)$$

जैसे →

1. कक्षा की दीवार में लगा ब्लैक बोर्ड।
2. फर्श पर रखी मेज।
3. दीवार में लगी घड़ी।

→ **गति की अवस्था →**

यदि कोई वस्तु किसी निश्चित बिन्दु के सापेक्ष अपनी स्थिति में समय के साथ परिवर्तन करें तो वस्तु गति अवस्था में होती है।

अतः गति अवस्था हेतु शर्त -

$$d = f(t)$$

जैसे →

1. गतिमान हवाईजहाज।
2. उड़ता हुआ पक्षी।
3. गतिमान साइकिल।
4. उड़ता हुआ, हुई पतंग।

→ **गति के प्रकार →**

किसी वस्तु में तीन प्रकार की गतियाँ हो सकती

Date
Page

1. स्थानान्तरीय गति [Translatory Speed] ⇒

जब कोई वस्तु इस प्रकार गति करे कि उसके सभी कण एक साथ सरल रेखीय पथ पर निश्चित समय में समान दूरी तय करते हों तो वस्तु की गति स्थानान्तरीय गति कहलाती है।

जैसे ⇒ 1. सीधी पटरी पर दौड़ती ट्रेन की गति।
2. पृथ्वी की ओर स्वतंत्र पूर्वक गिरती हुई वस्तु।

2. घूर्णन गति [Rotatory Speed] ⇒

जब कोई वस्तु इस प्रकार गति करे कि उसके सभी कण वृत्तीय पथों पर गति करे तथा सभी कणों के वृत्तीय पथों के केंद्र एक निश्चित रेखा पर स्थित हों तो वस्तु की गति घूर्णन गति कहलाती है।

जैसे ⇒ 1. पृथ्वी का अपनी अक्ष के परितः परिभ्रमण करना घूर्णन गति कहलाता है।

3. दोलनीय गति [Vibrational motion] ⇒

जब कोई वस्तु अपनी माध्य स्थिति इधर-उधर या ऊपर-नीचे आर्क गति करता है। तो वस्तु की गति दोलनीय गति कहलाती है।

जैसे ⇒ 1. सरल लोलक की गति।
2. झूले की गति।
3. स्प्रिंग से लटके पिण्ड की गति।

→ एकविमीय गति ⇒

यदि किसी वस्तु का निरूपक x, y, तथा z निर्देशांकों में से किसी एक निर्देशांक का समय के साथ परिवर्तन द्वारा प्रदर्शित करें तो ऐसी गति एक विमीय गति कहलाती है।

जैसे ⇒ 1. मुक्त रूप से पृथ्वी की ओर गिरती वस्तु।
2. सीधी पटरियों पर दौड़ती ट्रेन की गति।
3. सीधी सड़क पर दौड़ती कार।

Date
Page

→ **द्विविमीय गति** ⇒
जब कोई वस्तु की गति का निरूपण x, y तथा z निर्देशांकों में से किन्हीं दो निर्देशांकों जैसे x, y, z तथा का समय के साथ परिवर्तन द्वारा प्रदर्शित करें तो ऐसी गति द्विविमीय गति कहलाती है।

जैसे ⇒ 1. प्रक्षेप्य गति।
2. वृत्तीय गति।

→ **त्रिविमीय गति** ⇒
यदि कोई वस्तु की गति तीनों निर्देशांकों x, y तथा z का समय के साथ परिवर्तन हो रहा हो तो ऐसी गति त्रिविमीय गति कहलाती है।

जैसे ⇒ पात्र में बंद गैस के अणुओं की गति।

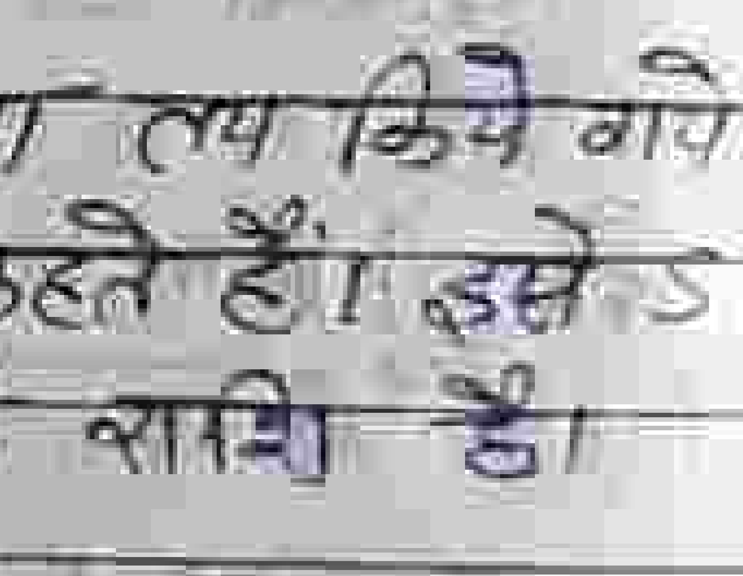
→ **दूरी [Distance]** ⇒
किसी गतिशील वस्तु द्वारा तय किये गये पथ की कुल लम्बाई को वस्तु द्वारा तय दूरी कहते हैं। इसे S से प्रदर्शित करते हैं। दूरी S एक अदिश राशि है।

जैसे ⇒ 1.

A B C D E
-100 -80 -60 -40 -20 0 20 40 60 80 100
दूरी S मी० में

माना वस्तु O से C तक जाती है। तथा पुनः वापस लौटकर B पर आ जाती है तो वस्तु द्वारा तय दूरी

$$S = OC + CB$$
$$= 60 \text{ मी०} + 20 \text{ मी०}$$
$$= \underline{80 \text{ मी०}}$$



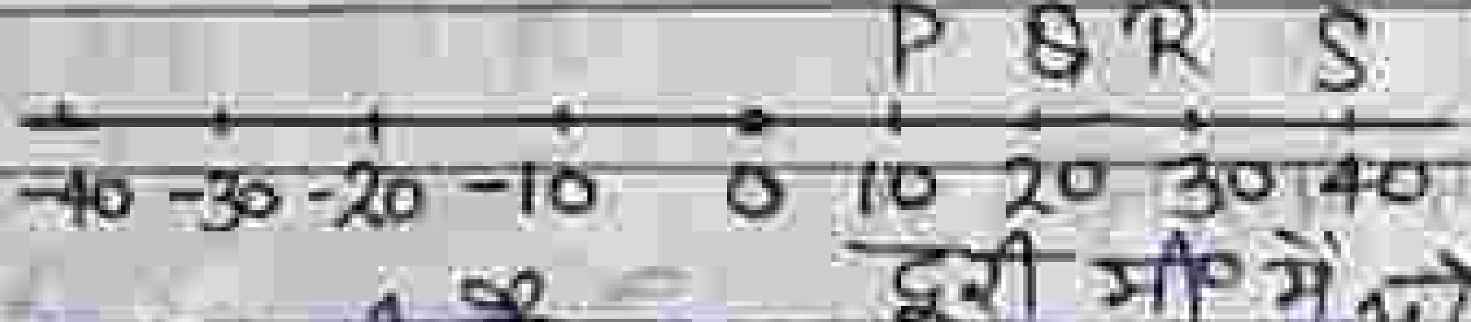
2. माना कोई वस्तु वृत्तीय पथ पर गति करके पथ A P B पर A से B तक पहुँचती है।
तो वृत्तीय पथ पर तय दूरी = पथ APB की लम्बाई
= अर्धवृत्त की लम्बाई
= πR

→ **विस्थापन [Displacement]** ⇒ किसी कण की प्रारम्भिक तथा अन्तिम स्थितियों के बीच की सदिश दूरी को ही कण का विस्थापन कहते हैं। इसे d से प्रदर्शित करते हैं। यह एक सदिश राशि है।

मात्रक = M.K.S. पद्धति में विस्थापन का मात्रक = मीटर

विमा = L

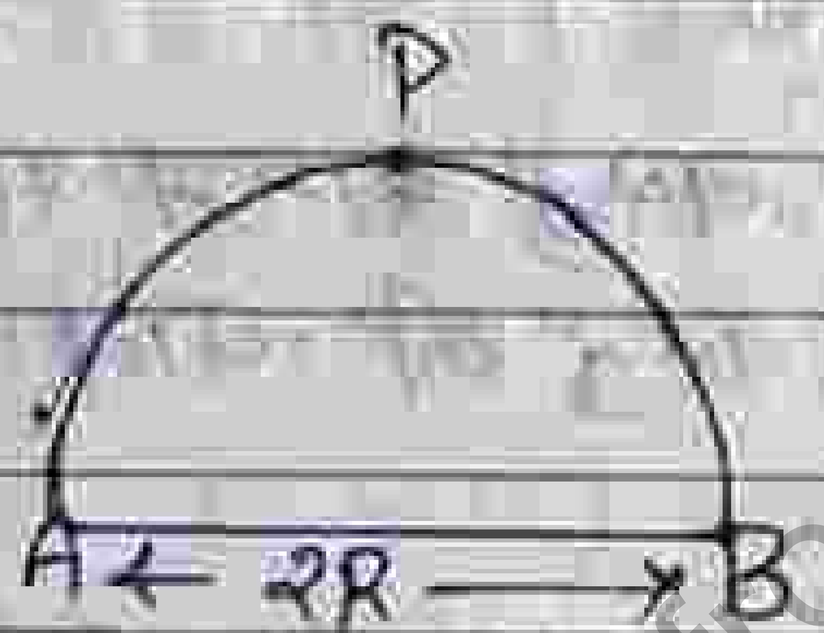
जैसे ⇒ 1.



माना वस्तु O से तक जाती है। तथा पुनः लौटकर Q तक वापस आती है।

$$\therefore \text{वस्तु का विस्थापन } (\vec{d}) = \vec{OS} - \vec{SQ}$$
$$= 40 - 20$$
$$= \underline{20 \text{ मी०}}$$

2.



$$\text{विस्थापन } (\vec{d}) = A \text{ व } B \text{ की सदिश दूरी}$$
$$= \underline{2R}$$

विशेष नोट ⇒ विस्थापन का मान 0, धनात्मक अथवा ऋणात्मक कुछ भी हो सकता है।

→ **चाल** ⇒

किसी गतिशील वस्तु द्वारा प्रति एकांक समय में तय की गई दूरी को वस्तु की चाल कहते हैं। इसे v से प्रदर्शित करते हैं। यदि समयान्तराल t में वस्तु द्वारा तय दूरी s हो तो

$$\text{चाल} = \frac{\text{तय दूरी}}{\text{समयान्तराल}}$$

या

$$\boxed{v = \frac{s}{t}}$$

मात्रक = $\left(\frac{s}{t}\right)$ का मात्रक

= मीटर / सेकण्ड

विमा = $\left(\frac{s}{t}\right)$ की विमा

= LT^{-1}

→ चाल एक अदिश राशि है।

→ चाल के प्रकार →

चाल दो प्रकार की होती है।

1. एकसमान चाल।
2. असमान अथवा परिवर्ती चाल।

1. एकसमान चाल →

जब कोई वस्तु समान समयान्तरालों में समान दूरियाँ तय करती हैं तो वस्तु की चाल एकसमान चाल कहलाती है।

जैसे → कोई कार्य 30 घण्टे में ~~2~~ 120 km दूरी तय करती है तथा प्रत्येक घण्टे में कार्य द्वारा तय दूरी 40 km है। अतः कार्य की एकसमान चाल 40 km / h होगी।

2. असमान अथवा परिवर्ती चाल →

जब कोई वस्तु समान समयान्तरालों भिन्न-भिन्न दूरियाँ तय करती हैं। तो वस्तु की चाल असमान या परिवर्ती चाल कहलाती है।

कोई कार्य 1 घण्टे में 30 km की दूरी उसके 1 घण्टे में 40 km, अगले 1 घण्टे में 50 km की दूरी तय करती है। कार्य के द्वारा समान समयान्तरालों में भिन्न-भिन्न दूरियाँ तय की जा रही हैं।

Page

औसत चाल →

किसी गतिशील वस्तु द्वारा किसी निश्चित समयान्तराल में तय की गई कुल दूरी तथा समयान्तराल के अनुपात को ही वस्तु की औसत चाल कहते हैं। इसे $\bar{v}$ से प्रदर्शित करते हैं।

अर्थात्

$$\text{औसत चाल } \bar{v} = \frac{\text{कुल तय दूरी}}{\text{समयान्तराल}}$$

यदि समयान्तराल Δt में तय दूरी Δs हो तो

$$\bar{v} = \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)$$

विशेष नोट →

1. यदि कोई वस्तु s_1, s_2, s_3 ---- दूरियाँ क्रमशः v_1, v_2, v_3 ---- चाल से तय करती है। तो

$$\text{कुल तय दूरी} = s_1 + s_2 + s_3 + \text{-----}$$

$$\text{लगा कुल समय} = t_1 + t_2 + t_3 + \text{-----}$$

$$\therefore \text{समय } t = \frac{\text{दूरी } s}{\text{चाल } v}$$

$$\text{कुल समय} = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \frac{s_3}{v_3} + \text{-------}$$

$$\therefore \text{औसत चाल} = \frac{\text{कुल तय दूरी}}{\text{समय}}$$

$$\bar{v} = \left(\frac{s_1 + s_2 + s_3 + \text{----}}{t_1 + t_2 + t_3 + \text{---}}\right)$$

2. यदि कोई वस्तु कुल दूरी को दो समान भागों में तय करते हुए पहली दूरी s को v_1 चाल से तथा दूसरी चाल दूरी s को v_2 चाल से तय करे तो

$$\text{औसत चाल } \bar{v} = \frac{\text{कुल तय दूरी}}{\text{कुल समय}}$$

$$\text{कुल तय दूरी} = s + s = 2s$$

$$\text{कुल समय} = t_1 + t_2$$

$$= \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}$$

Date
Page

औसत चाल $\bar{v} = \dfrac{s+s}{\dfrac{s}{v_1}+\dfrac{s}{v_2}}$

$= \dfrac{2s}{\dfrac{sv_1+sv_2}{v_1 v_2}} = \dfrac{2s(v_1 v_2)}{s(v_1+v_2)}$

$= \boxed{\dfrac{2v_1 v_2}{v_1+v_2}}$

तात्क्षणिक चाल अथवा तात्कालिक चाल ⇒

जब वस्तु असमान गति करती है तो वस्तु की चाल परिवर्ती होती है अर्थात "परिवर्ती चाल से गतिमान वस्तु की किसी विशेष क्षण पर चाल को वस्तु की तात्क्षणिक चाल कहते हैं।

यदि गतिमान वस्तु सूक्ष्म क्षण Δt में Δs दूरी तय करे अर्थात

$\Delta t \longrightarrow 0$

तात्क्षणिक चाल $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

तात्क्षणिक चाल $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

$v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \left(\dfrac{ds}{dt}\right)$

जहाँ

$\dfrac{ds}{dt}$ = दूरी s का समय t के सापेक्ष अवकलन गुणांक

→ वेग [velocity] ⇒

किसी गतिशील वस्तु द्वारा समय में तय किये गये विस्थापन को वस्तु का वेग कहते हैं। इसे v से प्रदर्शित करते हैं।

किसी गतिशील वस्तु की समय के साथ विस्थापन में परिवर्तन की दर को वेग कहते हैं। इसे $\vec{v}$ से प्रदर्शित करते हैं।
यदि t समयान्तराल में वस्तु द्वारा तय विस्थापन S हो तो -

$$\text{वेग} = \frac{\text{विस्थापन}}{\text{समय}}$$

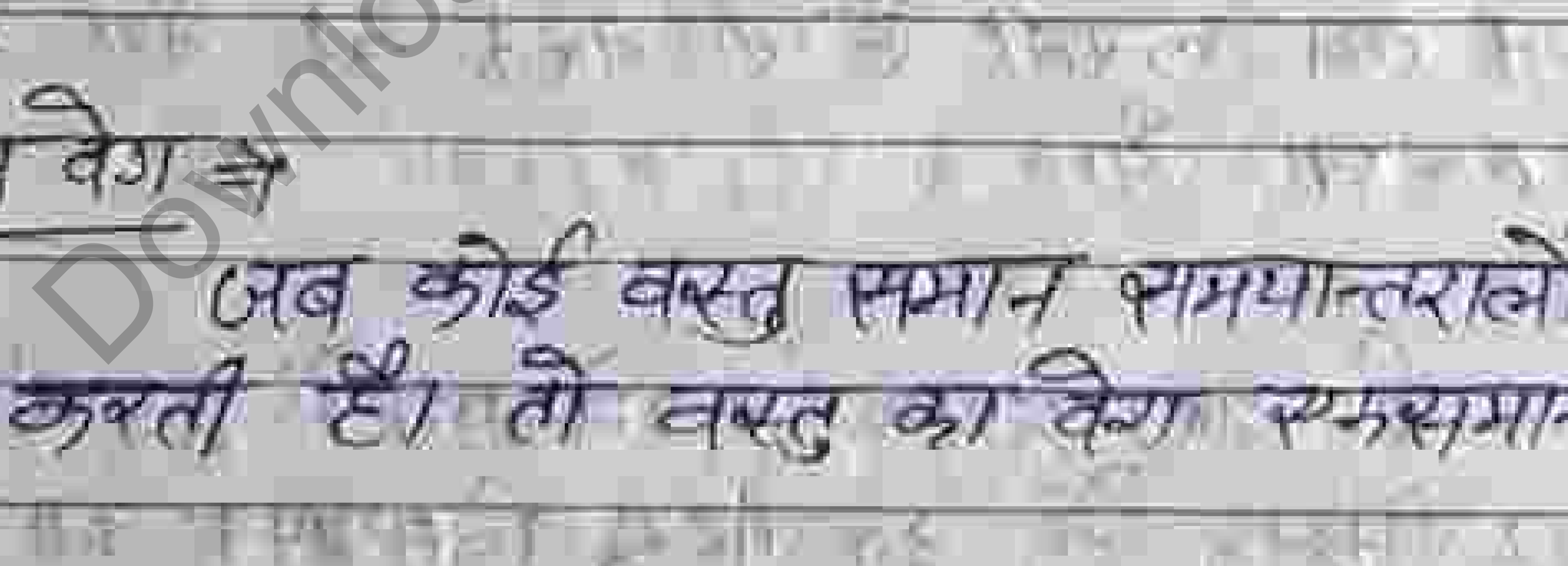
$$\vec{v} = \frac{\vec{S}}{t}$$

मात्रक = मीटर / सेकण्ड

$$\text{विमा} = \left(\frac{S}{T}\right) \text{ की विमा}$$
$$= \underline{LT^{-1}}$$

→ वेग के प्रकार ⇒
वेग दो प्रकार का होता है।
1. एकसमान वेग।
2. असमान वेग।

1. एकसमान वेग ⇒
जब कोई वस्तु समान समयान्तरालों में समान विस्थापन तय करती है। तो वस्तु का वेग एकसमान वेग कहलाता है।



$x_2 - x_1$

चित्रानुसार
मूल बिंदु O पर वस्तु का विस्थापन $x = 0$
तथा समय $t = 0$

$\therefore x = 0$
$t = 0$

$\therefore$ समयान्तराल $= (t_2 - t_1)$ में वस्तु का विस्थापन $=$
$\vec{x}_2 - \vec{x}_1$

$\therefore$ वेग $v = \frac{\text{विस्थापन}}{\text{समय}}$

$= \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1}$

2. असमान वेग ⇒
जब कोई वस्तु समान समयान्तरालों में भिन्न-भिन्न विस्थापन तय करती है। तो वस्तु का वेग असमान वेग कहलाता है। या
जैसे → जब कोई वस्तु समान समयान्तरालों में भिन्न-भिन्न विस्थापन तय करती है तो वस्तु का वेग असमान वेग कहलाता है।

किसी कार्य द्वारा प्रथम एक सेकण्ड में 20 मीटर विस्थापन दूसरे 2 सेकण्ड में 30 मीटर विस्थापन तथा तीसरे एक सेकण्ड में 50 मीटर विस्थापन तय करती है।

1 Second ⟶ 20 मी० $\frac{20}{1} = 20$ मी०/से०
1 Second ⟶ 30 मी० $\frac{30}{1} = 30$ मी०/से०

3. औसत वेग ⇒
जब कोई वस्तु असमान वेग से गतिशील होती है तो वस्तु के कुल विस्थापन तथा इसे तय करने में लगा समय लगे कुल समय के अनुपात को

→ वस्तु का औसत वेग कहते हैं। इसे v_{av} से प्रदर्शित करते हैं।

यदि Δt समयान्तराल में वस्तु का विस्थापन Δs हो तो

$$\left[\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}\right]$$

मात्रक = मीटर / सेकण्ड

विमा = LT^{-1}

तात्क्षणिक वेग →

असमान वेग से गतिमान किसी वस्तु का किसी विशेष क्षण पर वेग वस्तु का तात्कालिक वेग कहलाता है। यदि सूक्ष्म समयान्तराल Δt में वस्तु में उत्पन्न विस्थापन Δs हो तो

$$\text{तात्कालिक वेग } \vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}\right]$$

$$= \frac{ds}{dt}$$

→ जहाँ $\frac{ds}{dt}$ विस्थापन $\vec{s}$ का समय t के सापेक्ष अवकलन गुणांक।

चाल तथा वेग में अन्तर →

क्र. सं.	चाल	वेग
1.	यह एक अदिश राशि है।	यह एक सदिश राशि है।
2.	एकांक समय में वस्तु द्वारा तय दूरी को चाल कहते हैं चाल $v = \frac{\text{दूरी } s}{\text{समय } t}$	एकांक समय में वस्तु द्वारा तय दूरी को विस्थापन कहते हैं वेग $\vec{v} = \frac{\text{विस्थापन } \vec{s}}{\text{समय } t}$
3.	चाल सदैव धनात्मक होती है।	वेग ऋणात्मक, धनात्मक, 0 होता है।

वस्तु का वेग बदलने पर यह आवश्यक नहीं कि उसकी चाल भी बदल जाए।	वस्तु की चाल बदलने पर यह आवश्यक है कि उसका वेग भी बदल जाए।

विशेष नोट :- (For Numerical)

यदि कोई वस्तु t_1 समय में नियत वेग v_1 से तथा t_2 समय में वेग v_2 से गतिशील है तो औसत वेग -

$$\vec{v}_{av} = \frac{\text{कुल विस्थापन}}{\text{कुल समय}}$$

समय t_1 में v_1 वेग से विस्थापन $\vec{s}_1$ = वेग × समय

$= \vec{v}_1 \times t_1$

$= \vec{v}_1 t_1$

समय t_2 में v_2 वेग से विस्थापन $\vec{s}_2$ = वेग × समय

$= \vec{v}_2 \times t_2$

$= \vec{v}_2 t_2$

कुल समय = $t_1 + t_2$

∴ औसत वेग $\vec{v}_{av} = \dfrac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}$

$$= \frac{\vec{v}_2 t_2 + v_1 + t_1}{t_1 + t_2}$$

$$\boxed{\vec{v}_{av} = \frac{\vec{v}_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2}}$$

त्वरण [Acceleration] → "किसी गतिशील वस्तु के वेग परिवर्तन की दर को ही वस्तु का त्वरण कहते हैं। इसे $\vec{a}$ से प्रदर्शित करते हैं। त्वरण एक सदिश राशि है।"

यदि Δt समयान्तराल में वस्तु का वेग u से v हो जाता है

वेग परिवर्तन $\Delta v = v - u$

समयान्तराल Δt

$$\therefore \vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{u} - v}{\Delta t}}$$

मात्रक = त्वरण $\vec{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

a का मात्रक $= \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$ का मात्रक

$= \frac{\text{मीटर / सेकण्ड}}{\text{सेकण्ड}}$

$= \text{मी०} / \text{से०}^2$

विमा =

a की विमा $= \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$ की विमा

$= \frac{LT^{-1}}{T}$

$= \boxed{LT^{-2}}$

Page

औसत त्वरण ⇒
जब वस्तु परिवर्ती त्वरण से गतिशील होती है तो किसी निश्चित समयान्तराल में वेग परिवर्तन तथा समयान्तराल के अनुपात को ही वस्तु का औसत त्वरण कहते हैं। इसे a_{av} से प्रदर्शित करते हैं।
यदि किसी गतिशील वस्तु का समय t_1 पर वेग $\vec{V_1}$ तथा t_2 समय पर वेग $\vec{V_2}$ है अतः

वेग परिवर्तन $(\Delta \vec{v}) = \vec{V_2} - \vec{V_1}$
समयान्तराल $(\Delta t) = t_2 - t_1$

$\therefore$ औसत त्वरण $\vec{a}_{av} = \dfrac{\vec{V_2} - \vec{V_1}}{t_2 - t_1}$

तात्कालिक त्वरण ⇒
जब कोई वस्तु परिवर्ती त्वरण से गतिमय होती है तो किसी क्षण विशेष पर वस्तु का त्वरण तात्कालिक त्वरण कहलाता है।
यदि Δt समयान्तराल में वस्तु में वस्तु में वेग परिवर्तन Δv हो तो तात्कालिक त्वरण

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right)$$

$$= \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt}}$$

जहाँ $\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ = वेग v का समय t के साथ अवकलन गुणा।

ग्राफीय निरूपण

ऋजुरेखीय गति →

ऋजुरेखीय गति में वस्तु की गति का ग्राफ बनाकर उसका अध्ययन किया जाता है। ये ग्राफ निम्न प्रकार हैं।

1. **स्थिति-समय ग्राफ →** (VT graph) (वेग-समय ग्राफ)

Position time graph → वह ग्राफ जिसमें समय को x-अक्ष पर तथा वस्तु की विभिन्न स्थितियों को y-अक्ष पर प्रदर्शित करके खींचा गया ग्राफ स्थिति समय ग्राफ कहलाता है।

तीन कारों की 5 second के लिए गति प्रदर्शित है।

समय (t) सेकण्ड में	कार (A) दूरी मी० में	कार (B) दूरी मी० में	कार (C) दूरी मी० में
0	0.0	0.0	0.0
1	24.0	18.0	8.0
2	42.0	36.0	17.0
3	59.0	54.0	30.0
4	70.0	72.0	47.0
5	80.0	90.0	75.0

(एकसमान)

→ वेग-समय ग्राफ के अभिलक्षण →

1. वेग समय ग्राफ की धनात्मक प्रवणता वस्तु में त्वरित गति को प्रदर्शित करती है।
2. ग्राफ की ऋणात्मक प्रवणता वस्तु में मंदन को प्रदर्शित करती है।
3. वेग समय समय ग्राफ की प्रवणता जितनी अधिक होगी वस्तु का त्वरण अथवा मंदन उतना ही अधिक होगा।

2. त्वरण-समय ग्राफ (a-t graph)

वह ग्राफ जिसमें समय को x-अक्ष पर तथा वस्तु में उत्पन्न त्वरण को y-अक्ष पर लेकर ग्राफ बनायें तो ऐसा ग्राफ त्वरण समय ग्राफ कहलाता है।

1. जब वस्तु विराम अवस्था में स्थित हो तो -

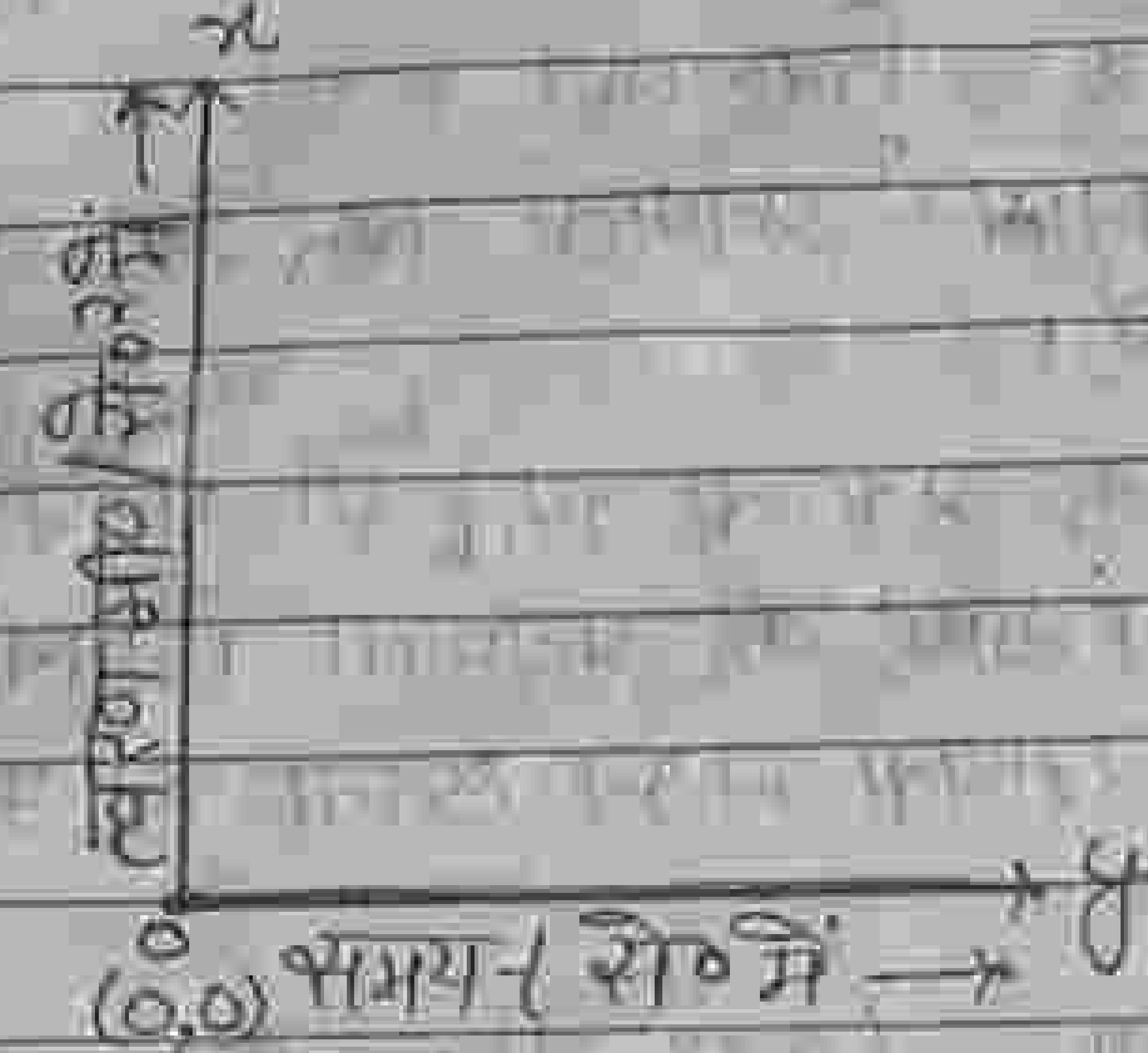
कण का वेग = 0

∴ त्वरण $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta 0}{\Delta t} = \frac{0}{\Delta t}$

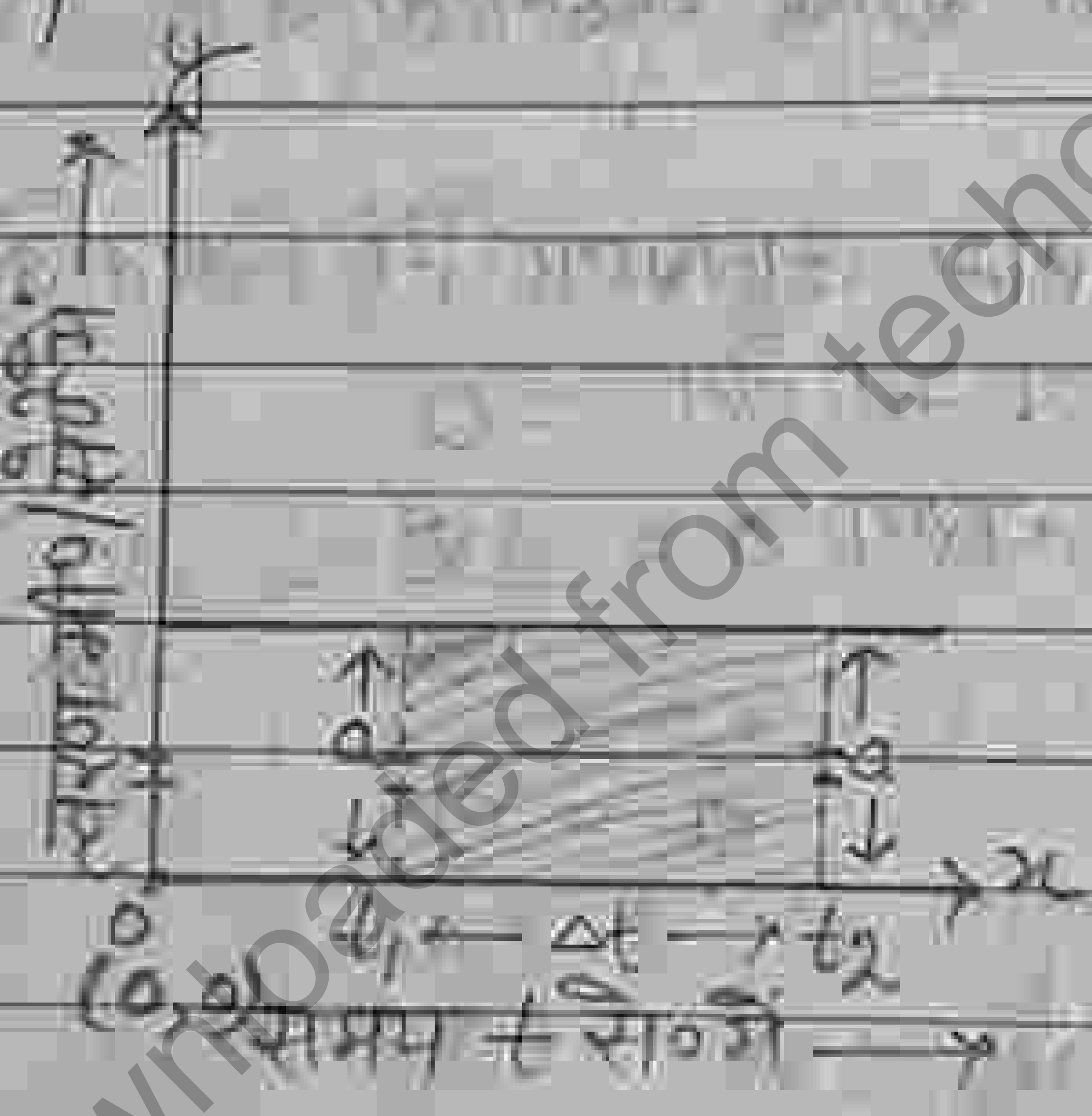
$a = 0$

अतः ग्राफ समय अक्ष पर आरोपित होगा।

2. यदि वस्तु नियत वेग अर्थात त्वरण $a = 0$ से गतिशील हो तो ग्राफ समय अक्ष पर ही अध्यारोपित होगा।



3. यदि कोई वस्तु नियत त्वरण (a) से गतिशील हो तो त्वरण-समय ग्राफ में प्राप्त ग्राफ समय अक्ष के समान्तर एक सरल रेखा होगी।



चित्रानुसार

गतिशील वस्तु के किन्हीं दो समयान्तरालों t_1 व t_2 के बीच वेग परिवर्तन Δv की गणना निम्न प्रकार कर सकते हैं।

∵ त्वरण नियत है।

अर्थात्

$a =$ नियत

∵ हम जानते हैं।

त्वरण $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

∴ $\Delta v = a \cdot \Delta t$

$\Delta v =$ लम्बाई × चौड़ाई

परन्तु $a \times \Delta t$ = त्वरण समय ग्राफ में समय अक्ष के बीच छायांकित भाग का क्षेत्रफल।

∴ त्वरण-समय ग्राफ में -

कण का वेग = समय Δt में घिरे छायांकित भाग का क्षेत्रफल

Imp गति के समीकरण ⇒

यदि कोई कण एक सरल रेखा के अनुदिश (उसी दिशा में) एकसमान त्वरण (a) से रेखा गतिशील हो तो कण का वेग, त्वरण, विस्थापन आदि के आपसी सम्बन्धों को गणितीय समीकरणों से व्यक्त करते हैं। ये समीकरण गति के समीकरण कहलाते हैं।

प्रतिपादन : सर आइजक न्यूटन

ये समीकरण निम्न प्रकार हैं।

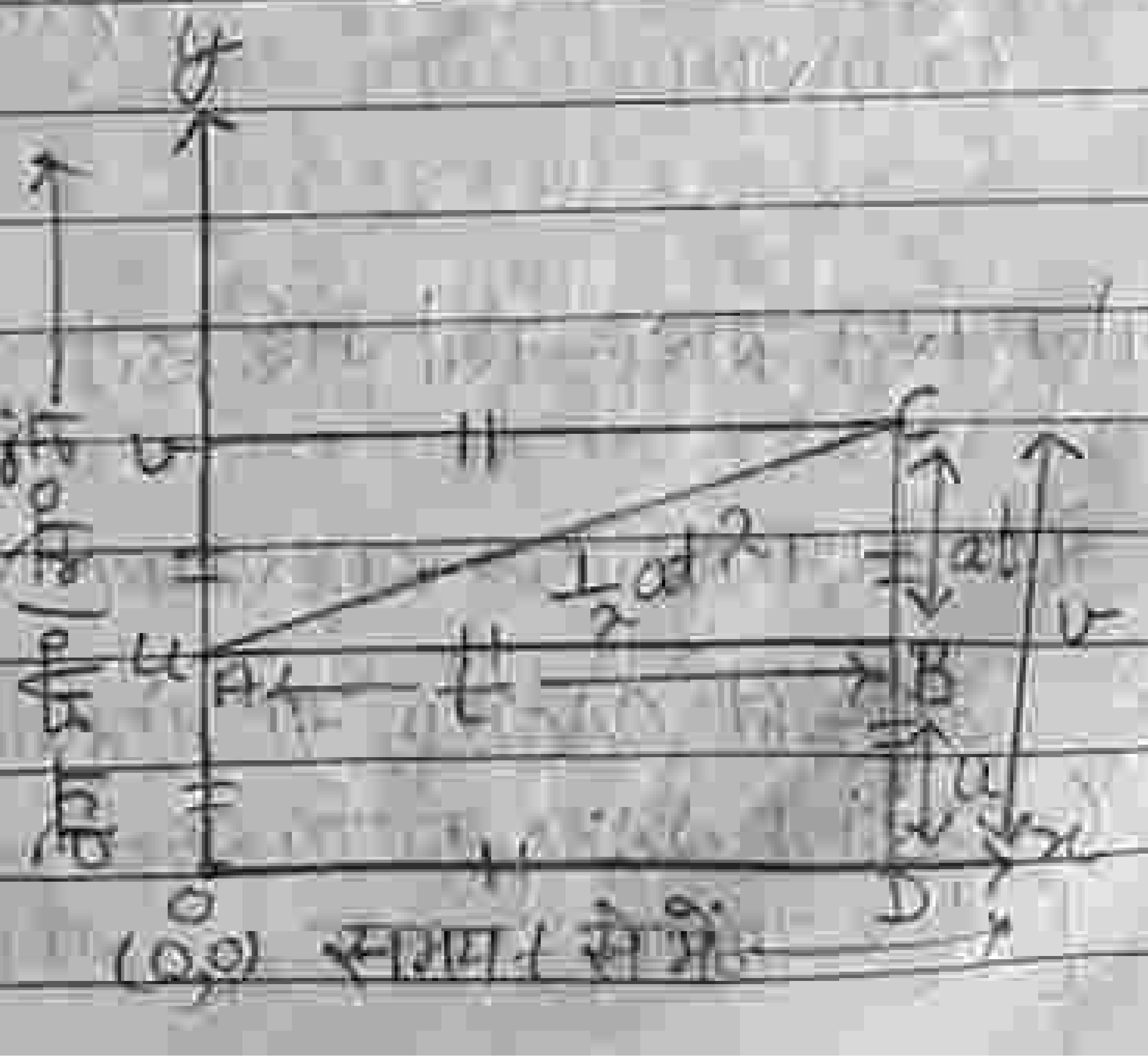
1. $v = u + at$
2. $s = ut + \frac{1}{2}at^2$
3. $v^2 = u^2 + 2as$

Imp ग्राफीय विधि से गति के समीकरणों का निगमन ⇒

1. गति का प्रथम समीकरण ⇒ (वेग-समय सम्बन्ध)

माना समय t=0 पर कण का वेग u तथा समयान्तराल t के बाद वेग v हो जाता है।

चित्र में वेग-समय ग्राफ प्रदर्शित है।



∵ हम जानते हैं।
वेग-समय की ढाल (प्रवणता m) वस्तु के त्वरण (a) को प्रदर्शित करती है।

∴ त्वरण a = सरल रेखा AC की ढाल

$$\therefore a = \tan\theta = \frac{CB}{AB}$$

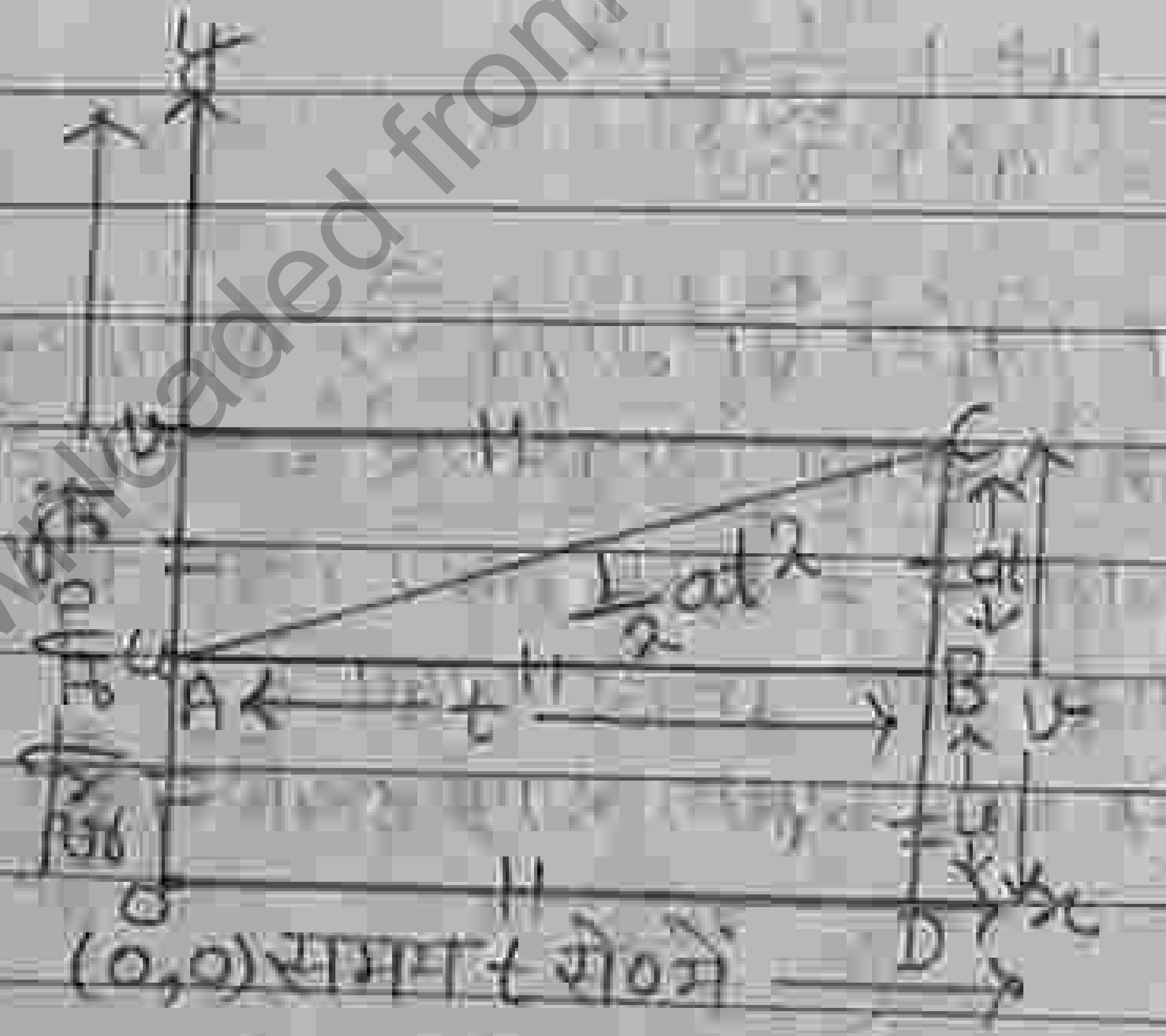
$$a = \frac{CD - BD}{AB}$$

$$a = \frac{v-u}{t}$$

$$at = v - u$$

$$\therefore \boxed{v = u + at}$$

2 गति का द्वितीय समीकरण ⇒ (स्थिति-समय सम्बन्ध)



चित्रानुसार
माना गतिशील वस्तु द्वारा चली गई दूरी S है। अतः

दूरी S = वेग-समय ग्राफ तथा समय अक्ष के बीच घिरा क्षेत्रफल

S = आकृति OACBD का क्षेत्रफल

S = (समकोण △ABC का क्षेत्रफल + आयत ABDO का क्षे॰

S = [$\frac{1}{2}$ × आधार × लम्ब + लम्बाई × चौड़ाई]

$$S = \left[\frac{1}{2} \times AB \times BC + AB \times BD\right]$$

चित्रानुसार.

$$AB = t$$
$$BC = at$$
$$BD = u$$

$$S = \frac{1}{2} \times (t \times at) + t \times u$$

$$S = \frac{1}{2} \times at^2 + ut$$

$$\boxed{S = ut + \frac{1}{2}at^2}$$

अथवा

$$S = \frac{1}{2}\left[\text{समान्तर भुजाओं का योग}\right] \times \text{उनके बीच की दूरी}$$

$$S = \frac{1}{2}\left[OA + CD\right] \times AB$$

$$S = \frac{1}{2}(u+v) \times t$$

$$S = \frac{1}{2}(u+u+at) \times t$$

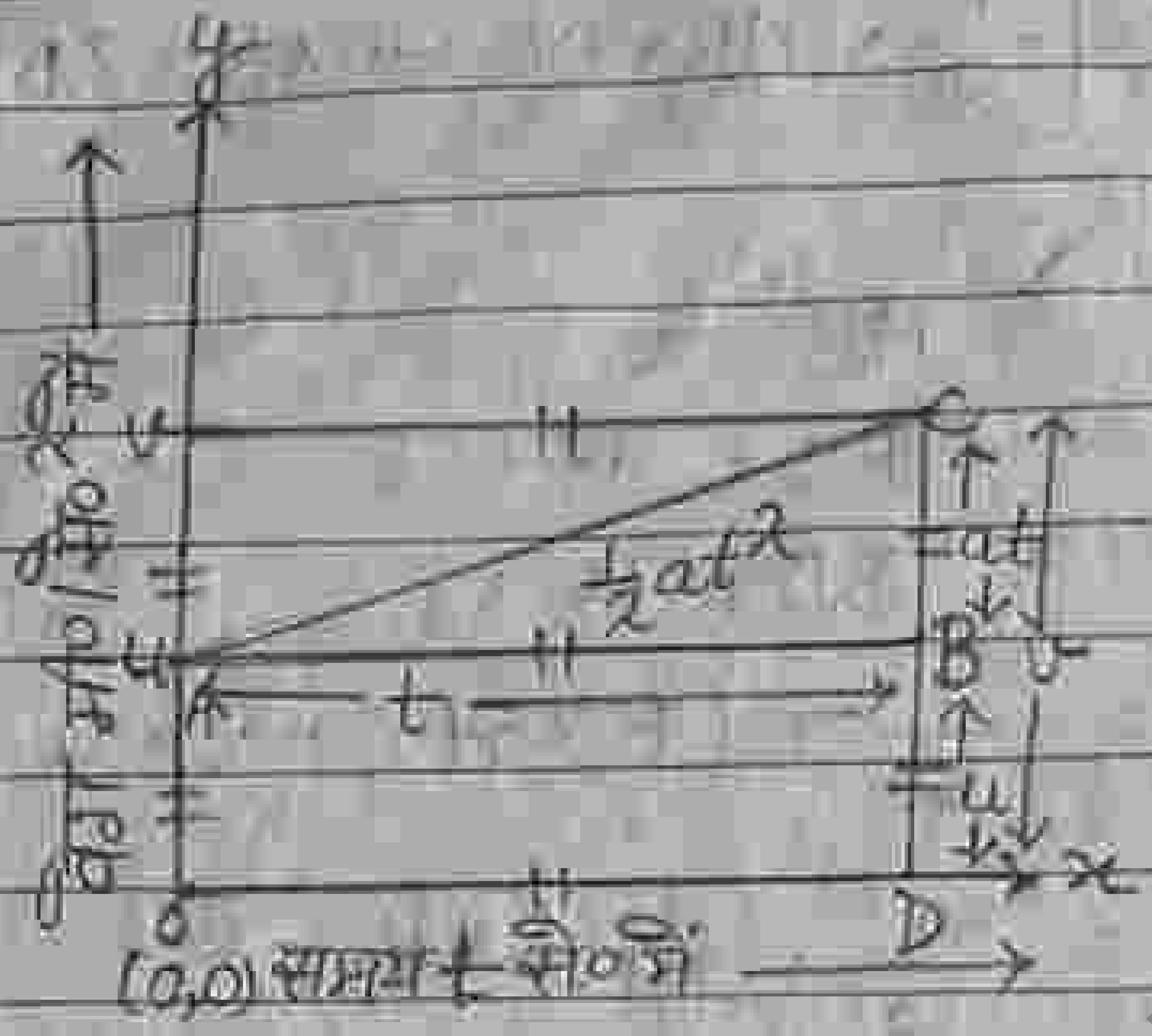
$$S = \frac{1}{2}(2u+at) \times t$$

$$S = \frac{1}{2}(2ut + at^2)$$

$$\boxed{S = ut + \frac{1}{2}at^2}$$

3. गति का तृतीय समीकरण → (स्थिति वेग सम्बन्ध)

माना किसी गतिशील वस्तु द्वारा समय t में चली गई दूरी s है।



चित्रानुसार

तय दूरी $S =$ आकृति ACDO का क्षेत्रफल

$S =$ समलम्ब चतुर्भुज ACDO का क्षेत्रफल

$S = \frac{1}{2}$ (समान्तर भुजाओं का योग) × उनके बीच की दूरी

$$S = \frac{1}{2} \times (AO + CD) \times AB$$

$$S = \frac{1}{2} \times (u+v) \times t$$

∵ गति के प्रथम समीकरण से -

$$v = u + at$$

$$at = v - u$$

$$t = \frac{v-u}{a}$$

समी० से -

$$S = \frac{1}{2} \times (u+v) \times \frac{v-u}{a}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}(u+v) \times \left(\frac{v-u}{a}\right)$$

$$S = \frac{1}{2}\,\frac{v^2-u^2}{a}$$

$$S = \frac{v^2-u^2}{2a}$$

13/06/18

Date
Page

$$\therefore \quad v^2 - u^2 = 2aS$$

$$u^2 + 2aS = v^2$$

$$\boxed{v^2 = u^2 + 2aS}$$

→ कलन विधि से गति के समीकरणों का निगमन ⇒

1. गति का प्रथम समीकरण ⇒ $(v = u + at)$

माना गतिशील वस्तु का त्वरण $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

कलन शास्त्र में -

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = a \cdot dt \quad \text{---} (1)$$

यह एक अवकलन समीकरण है।

उचित समीकरणों के अन्दर समाकलन करने पर -

$$\int_u^v dv = \int_{t=0}^{t} a\,dt$$

त्वरण a नियत है।

$$\int_u^v 1 \cdot dv = a\int_0^t 1 \cdot dt$$

$$\int_u^v v^0\, dv = a\int_0^t t^0\, dt$$

परन्तु सूत्रानुसार -

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

$$\therefore \quad \left[\frac{v^{0+1}}{0}\right]_u^v = a\left[\frac{t^{0+1}}{0+1}\right]_0^t$$

या

$$[v]_u^v = a[t]_0^t$$

निश्चित समाकलन से-

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

$$v - u = a(t - 0)$$
$$v - u = at$$

$$\therefore \quad \boxed{v = u + at}$$

२ गति का द्वितीय समीकरण ⇒ $\left(S = ut + \frac{1}{2}at^2\right)$

गतिशील वस्तु का वेग $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

कलन शास्त्र में-

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$\therefore ds = v \cdot dt \quad \text{———} \quad ②$$

परन्तु

$$v = u + at$$

$$\therefore ds = (u + at) \cdot dt \quad \text{———} \quad ①$$

- समीकरण ① में दोनों पक्षों का उचित समाकलन या सीमाओं के अन्दर समाकलन करने पर-

$t = 0$, पर वेग $= u$, दूरी $= S = 0$
$t = t$, पर वेग $= v$, दूरी $= S = S$

$$\int_0^S ds = \int (u + at) \cdot dt$$

$$\int_0^S dt = \int_u^v udt + \int_0^t atdt$$

त्वरण a नियत है।

$$\therefore \int_0^s 1\cdot ds = u\int_0^t 1\cdot dt + a\int_0^t t\,dt$$

$$\int_0^s s^0 ds = u\int_0^t t^0 dt + a\int_0^t t^1 dt$$

$$\therefore \left[\frac{s^{0+1}}{0+1}\right]_0^s = u\left[\frac{t^{0+1}}{0+1}\right]_0^t + a\left[\frac{t^{1+1}}{1+1}\right]_0^t$$

$$(s)^s = u(t)_0^t + a\left(\frac{t^2}{2}\right)_0^t$$

$$s-0 = u(t-0) + \frac{a}{2}(t^2-0)$$

$$\therefore \boxed{s = ut + \frac{1}{2}at^2}$$

3. <u>गति का तृतीय समीकरण</u> ⇒ $(v^2 = u^2 + 2as)$

<u>We know that</u>

$$\text{त्वरण } a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

कलन शास्त्र में-

$$a = \frac{dv}{dt} \times \frac{ds}{ds}$$

$$a = \frac{dv}{ds} \times v \qquad \because v = \frac{ds}{dt}$$

$$\therefore a = v\cdot\frac{dv}{ds}$$

$$\therefore v\,dv = a\,ds \quad \text{——— (1)}$$

समीकरण ① का उचित सीमाओं के अन्दर समाकलन करने पर -

$$\int_u^v v\,dv = \int_0^s a\,ds$$

$$\int_u^v v\,dv = a\int_0^s 1.ds$$

त्वरण a = नियत

$$\int_u^v v^1\,dv = a\int_0^s s^0\,ds$$

$$\therefore \left[\frac{v^{1+1}}{1+1}\right]_u^v = a\left[\frac{s^{0+1}}{0+1}\right]_0^s$$

$$\left(\frac{v^2}{2}\right)_u^v = a(s)_0^s$$

$$\frac{1}{2}(v^2)_u^v = a(s)_0^s$$

$$\frac{1}{2}(v^2-u^2) = a(s-0)$$

$$v^2-u^2 = 2as$$

$$\therefore \boxed{v^2 = u^2+2as}$$

Date 14/06/18

→ गुरुत्व के अधीन गति →

वह गति जिसमें कोई वस्तु पृथ्वी के गुरुत्व के अधीन रहकर गति करती है। ऐसी गति गुरुत्व के अधीन गति कहलाती है।

इस प्रकार की गति में वस्तु में उत्पन्न त्वरण को गुरुत्वी त्वरण (g) कहते हैं।

यदि गति दो प्रकार की होती है।

1. नीचे से ऊर्ध्वाधर ऊपर की दिशा में →

इस गति के लिए दूरी $S = h$ तथा त्वरण $a = -g$

अतः

गति समीकरणों का रूप इस प्रकार होगा।

1. $v = u - gt$ $\quad \because v = u + at$
2. $h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ $\quad \because S = ut + \frac{1}{2}at^2$
3. $v^2 = u^2 - 2gh$ $\quad \because v^2 = u^2 + 2as$

2. ऊपर से ऊर्ध्वाधर नीचे की दिशा में →

इस गति के लिए दूरी $S = h$ तथा त्वरण $a = g$

अतः

गति समीकरणों का रूप इस प्रकार होगा।

1. $v = u + gt$
2. $S = ut + \frac{1}{2}gt^2$
3. $v^2 = u^2 + 2gh$

वाहनों की अवरोधन दूरी → Stopping distance of Vehicles

वाहन के ब्रेक लगाने पर रुकने से पहले तय हो चुकी होती है। अवरोधन दूरी कहलाती है। इसे d_s से प्रदर्शित करते हैं।

Date
Page

माना किसी वाहन का ब्रेक लगाने से पहले वेग u है। वाहन d_s दूरी चलकर विराम मे आता है।
माना ब्रेक द्वारा उत्पन्न मंदन = a
गति के तृतीय समीकरण से-
जहाँ
$$v = 0$$
$$u = u$$
दूरी S = अवरोधन दूरी (d_s)
त्वरण $a = a$
$$\therefore \quad 0 = u^2 + 2ad_s \qquad \because v^2 = u^2 + 2as$$
या
$$u^2 + 2ad_s = 0$$
$$2ad_s = -u^2$$
$$\therefore \quad \boxed{d_s = \frac{-u^2}{2a}}$$

→ विशेष नोट →
1. वेग u को बढाने पर d_s का मान बढता है।
2. वस्तु मे उत्पन्न मंदन a के बढाने पर d_s का मान घट जाता है।

(for Num)
→ किसी विशेष दिये गये सेकण्ड मे चली गई दूरी ज्ञात करना:-
∵ हम जानते हैं,
किसी गतिशील वस्तु द्वारा t सेकण्ड मे चली गई दूरी S हो तो
$$S = ut + \frac{1}{2}at^2 \quad \text{—— (1)}$$
माना
वस्तु द्वारा n वें सेकण्ड मे तय दूरी $= S_n$
तथा (n-1) वे सेकण्ड मे तय दूरी $= S_{n-1}$
होतो
समी० (1) से-
$$S_n = u \cdot n + \frac{1}{2}a \cdot n^2 \quad \text{—— (2)}$$

15|06|18

इसी प्रकार -

$$S_{n-1} = u(n-1) + \frac{1}{2}a(n-1)^2 \quad \text{--- ③}$$

$$\therefore \Delta S = S_n - S_{n-1}$$

$$\Delta S = S_n - S_{n-1}$$

$$\Delta S = un + \frac{1}{2}an^2 - \left[u(n-1) + \frac{1}{2}a(n-1)^2\right]$$

$$\Delta S = un + \frac{1}{2}an^2 - \left[un - u + \frac{1}{2}a(n^2+1-2n)\right]$$

$$\Delta S = un + \frac{1}{2}an^2 - un + u - \frac{1}{2}an^2 - \frac{1}{2}a + an$$

$$\Delta S = \cancel{un} + \cancel{\frac{1}{2}an^2} - \cancel{un} + u - \cancel{\frac{1}{2}an^2} - \frac{1}{2}a + an$$

$$\Delta S = u - \frac{1}{2}a + an$$

$$\Delta S = u + an - \frac{1}{2}a$$

$$\Delta S = u + a\left[n - \frac{1}{2}\right]$$

$$\Delta S = u + a\left[\frac{2n-1}{2}\right]$$

$$\Delta S = u + \frac{1}{2}a(2n-1)$$

$$\boxed{\Delta S = u + \frac{1}{2}a(2n-1)}$$

→ वस्तुओं का मुक्त पतन → (free fall)

वायु द्वारा उत्पन्न प्रतिरोध की अनुपस्थिति में प्रत्येक वस्तु जिसका आकार, द्रव्यमान तथा रासायनिक संगठन भिन्न-भिन्न होने की स्थिति में भी पृथ्वी के निकट प्रत्येक वस्तु समान गुरुत्वी त्वरण से -

गति करती है। इसे वस्तुओं का मुक्त पतन कहते हैं।
- मुक्त पतन में वस्तु का प्रारम्भिक वेग $u = 0$ होता है।
तय दूरी $s = h$, त्वरण $a = g$, तथा $u = 0$
गति समीकरणों का रूप.

1. $v = u + at \rightarrow v = 0 + gt$

$$\therefore \underline{v = gt}$$

2. $S = ut + \frac{1}{2}at^2$

$$S = 0 \cdot t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore \underline{S = \frac{1}{2}gt^2}$$

3. $v^2 = u^2 + 2as$

$$v^2 = 0 + 2gh$$

$$\therefore \underline{v^2 = 2gh}$$

<u>जैसे</u> ⇒
वायु जनित (पिंड) प्रतिरोध की अनुपस्थिति में हाथी, चीटी, 100 ग्राम बाँट एक साथ समान ऊँचाई से गिराये जाने पर पृथ्वी पर एकसमान समय में करायेंगे।

→ <u>आपेक्षिक वेग</u> ⇒
माना दो वस्तुयें A तथा B एक ही दिशा में एक ही बिन्दु से नियत वेग से गतिशील हैं तो
"वस्तु A का वह आभासी वेग जो B द्वारा प्रेक्षित किया जाए वस्तु A का वस्तु B के सापेक्ष आपेक्षिक वेग कहलाता है। इसे $\vec{v}_{AB}$ से प्रदर्शित करते हैं।

Date 16/06/18

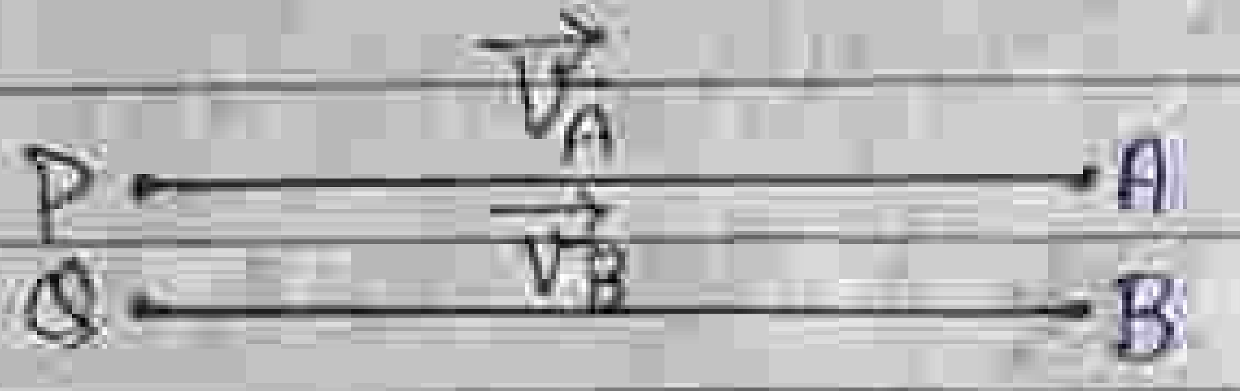
→ एकविमीय गति में आपेक्षिक वेग के मान की गणना →

माना दो वस्तुयें A तथा B दो समान्तर सरल रेखाओं में पथ PA तथा QB के अनुदिश गतिशील हैं।

वस्तु A का वेग = $\vec{v}_A$

वस्तु B का वेग = $\vec{v}_B$ है।

(a)



(b)

(c)

B• विराम अवस्था में

वस्तु B पर $-\vec{v}_B$ वेग आरोपित कर देते हैं। जिससे वस्तु B विराम अवस्था में आ जायेगी।

∴ वस्तु A का B के सापेक्ष आपेक्षिक वेग

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A + (-\vec{v}_B) = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

∴ A का B के सापेक्ष आपेक्षिक वेग

$\vec{v}_{AB}$ = A का वेग − B का वेग

→ विशेष नोट →

यदि वस्तुयें A तथा B विपरीत दिशा में गतिशील हों तो-

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A + \vec{v}_B$$

अर्थात उनके सापेक्ष वेग आपस में जुड़ जायेंगे।

Points to be noted :-

1. $d \neq f(t)$

2. $V = \frac{s}{t}$

3. $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$

4. $\vec{v}_{av} = \frac{\vec{\Delta s}}{\Delta t}$

5. $\vec{a} = \frac{\vec{u} - v}{\Delta t}$

6. $a = 0$

7. $v = u + at$

8. $s = ut + \frac{1}{2}at^2$

9. $v^2 = u^2 + 2as$

10. समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ लम्ब

11. आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई $\times$ चौड़ाई

12. समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ [समान्तर भुजाओं का योग $\times$ उनके बीच की दूरी

13. गतिशील वस्तु द्वारा तय पथ की लम्बाई को दूरी कहते हैं

Date

Page

14. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

15. $\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a)$

16. $v = \frac{ds}{dt}$

17. $\Delta S = u + \frac{1}{2} a (2n-1)$

18. $\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{t_2 - t_1}$

19. चाल एक अदिश राशि है।

20. कण का वेग = समय Δt में घिरे छायांकित भाग का क्षेत्रफल

द्वितीय अध्याय समाप्त

Page = 30