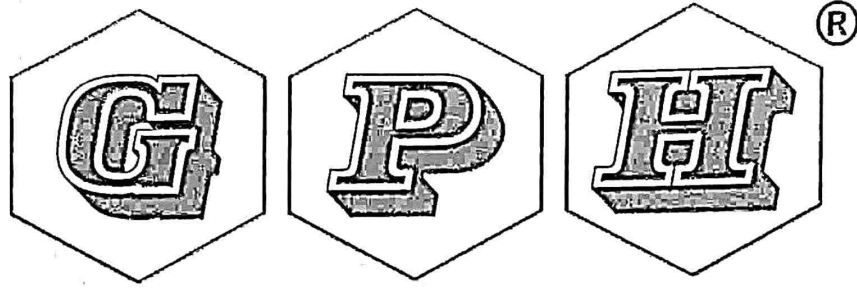




लोक शिक्षण संचालनालय, म.प्र. भोपाल
द्वारा वर्ष 2023 के लिए जारी प्रश्न बैंक



प्रश्न बैंक

(रेमेडियल माड्यूल के प्रश्न-उत्तर सहित)

उत्तर सहित

गणित

कक्षा
11

अम्ली प्रश्न बैंक
की पहचान

कच्हर एवं प्रत्येक पृष्ठ पर **GPH** देखकर ही खरीदें।

GUPTA PUBLISHING HOUSE, INDORE (M.P.)



प्रश्न बैंक

गणित : कक्षा-11वीं

समय : 3 घंटे]

प्रश्न-पत्र ब्लूप्रिन्ट (Blue Print of Question Paper)

[पूर्णांक : 80

क्र.	इकाई/अध्याय एवं विषय वस्तु	इकाई पर आवंटित अंक	वस्तुनिष्ठ प्रश्न	अंकवार प्रश्नों की संख्या					कुल प्रश्न
				1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	5 अंक	
1.	1. समुच्चय	6	3	-	1	-	-	-	1
2.	2. संबंध एवं फलन	5	3	1	-	-	-	-	1
3.	3. त्रिकोणमितीय फलन	10	4	1	-	1	-	-	2
4.	5. सम्मिश्र संख्याएँ और द्विघातीय समीकरण	9	3	1	-	1	-	-	2
5.	6. रैखिक असमिकाएँ	4	2	1	-	-	-	-	1
6.	7. क्रमचय और संचय	4	2	1	-	-	-	-	1
7.	8. द्विपद प्रमेय	4	2	1	-	-	-	-	1
8.	9. अनुक्रम तथा श्रेणी	8	1	-	1	1	-	-	2
9.	10. सरल रेखाएँ	6	2	-	-	1	-	-	1
10.	11. शंकु परिच्छेद	2	-	1	-	-	-	-	1
11.	12. त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय	5	3	1	-	-	-	-	1
12.	13. सीमा और अवकलज	8	3	1	1	-	-	-	2
13.	15. सांख्यिकी	5	2	-	1	-	-	-	1
14.	16. प्रायिकता	4	2	1	-	-	-	-	1
	कुल योग	80	32	20	12	16	-	-	18+5 = 23

प्रश्न पत्र निर्माण हेतु विशेष निर्देश-

- 40% वस्तुनिष्ठ प्रश्न, 40% विषयपरक प्रश्न, 20% विश्लेषणात्मक प्रश्न होंगे।
- 1. प्रश्न क्रमांक 1 से 5 तक 32 वस्तुनिष्ठ प्रश्न होंगे। सही विकल्प 06 अंक, रिक्त स्थान 07 अंक, सही जोड़ी 06 अंक, एक वाक्य में उत्तर 07 अंक, सत्य असत्य 06 अंक संबंधी प्रश्न होंगे। प्रत्येक प्रश्न पर 1 अंक निर्धारित है।
- 2. वस्तुनिष्ठ प्रश्नों को छोड़कर सभी प्रश्नों में आंतरिक विकल्प का प्रावधान होगा। यह विकल्प समान इकाई/उप इकाई से तथा समान कठिनाई स्तर वाले होंगे। इन प्रश्नों की उत्तर सीमा निम्नानुसार होगी-
 - अति लघुउत्तरीय प्रश्न 02 अंक लगभग 30 शब्द।
 - लघुउत्तरीय प्रश्न 03 अंक लगभग 75 शब्द।
 - विश्लेषणात्मक 04 अंक लगभग 120 शब्द।
- 3. कठिनाई स्तर- 40% सरल प्रश्न, 45% सामान्य प्रश्न, 15% कठिन प्रश्न।

MP BOARD OFFICIAL

MP BOARD OFFICIAL

पाठ्यक्रम में से हटाई गई विषयवस्तु

क्र.	इकाई	कम किये गये अध्याय/विषय वस्तु का नाम
1.	अध्याय-1. समुच्चय	1.7 घात समुच्चय
2.	अध्याय-3. त्रिकोणमितीय फलन	3.5 त्रिकोणमितीय समीकरण
3.	अध्याय-4. गणितीय आगमन का सिद्धान्त	• संपूर्ण अध्याय
4.	अध्याय-5. सम्मिश्र संख्याएँ और द्विघातीय समीकरण	5.5.1 एक सम्मिश्र संख्या का ध्रुवीय निरूपण
5.	अध्याय-6. रैखिक असमिकाएँ	6.4 दो चर राशियों के रैखिक असमिकाओं का आलेखीय हल 6.5 दो चर राशियों की असमिका निकाय का हल
6.	अध्याय-8. द्विपद प्रमेय	8.3 व्यापक एवं मध्य पद
7.	अध्याय-9. अनुक्रम तथा श्रेणी	9.7 विशेष अनुक्रमों के n पदों का योगफल
8.	अध्याय-12. त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय	12.5 विभाजन सूत्र
9.	अध्याय-14. गणितीय विवेचन	• संपूर्ण अध्याय
10.	अध्याय-15. सांख्यिकी	15.6 बारंबारता बंटनों का विश्लेषण

अध्याय-1

समुच्चय

वस्तुनिष्ठ प्रश्नों का

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिये-

- (1) किसी कक्षा में बुद्धिमान छात्रों का समुच्चय है:
(अ) रिक्त समुच्चय (ब) एकक समुच्चय
(स) परिमित समुच्चय (द) सुपरिभाषित संग्रह नहीं है
- (2) किसी अरिक्त समुच्चय A के लिए (A')' बराबर है:
(अ) A' (ब) A (स) ϕ (द) U
- (3) यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ और $B = \{3, 4, 5, 6\}$ तो $A \cap B$ का मान है:
(अ) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ब) $\{3, 4, 5, 6\}$
(स) $\{1, 2, 3, 4\}$ (द) $\{3, 4\}$
- (4) समुच्चय $\{\}$ के उपसमुच्चयों की संख्या होगी:
(अ) 1 (ब) 2 (स) 3 (द) 0
- (5) समुच्चय $\{1\}$ के उपसमुच्चयों की संख्या होगी:
(अ) 1 (ब) 2 (स) 3 (द) 4
- (6) समुच्चय $B \subset A$ तो $A \cap B$ बराबर होगा:
(अ) ϕ (ब) A (स) B (द) U
- (7) समुच्चय $B \subset A$ तो $A \cup B$ बराबर होगा:
(अ) ϕ (ब) A (स) B (द) U

(8) मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3\}$ तब इसके उपसमुच्चयों की संख्या होगी:

- (अ) 3 (ब) 8 (स) 9 (द) 16

(9) समीकरण $x^2 + x - 2 = 0$ का हल समुच्चय रोस्टर रूप (सारणीबद्ध रूप) में होगा:

- (अ) $\{1, -2\}$ (ब) $\{-1, -2\}$ (स) $\{1, 2\}$ (द) $\{-1, 2\}$

उत्तर- (1) (द), (2) (ब), (3) (द), (4) (अ), (5) (ब), (6) (स), (7) (ब), (8) (ब), (9) (अ)

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

- (1) यदि $X = \{1, 3, 5\}$ तथा $Y = \{1, 2, 3\}$ तब $X \cap Y = \dots\dots\dots$
- (2) एक समुच्चय जिसमें एक भी अवयव नहीं होता है, कहलाता है।
- (3) $A \cup A' = \dots\dots\dots$
- (4) $\phi' \cap A = \dots\dots\dots$
- (5) $A \cap A' = \dots\dots\dots$
- (6) $U' \cap A = \dots\dots\dots$
- (7) $A \cup \phi = \dots\dots\dots$
- (8) $A \cap \phi = \dots\dots\dots$
- (9) वह समुच्चय जिसमें अवयवों की संख्या निश्चित होती है, समुच्चय कहलाता है।

(10) यदि $A \times B = B \times A$ हो तब समुच्चय A और B

समुच्चय होंगे।

उत्तर- (1) $\{1, 3\}$, (2) रिक्त समुच्चय, (3) U, (4) A, (5) ϕ , (6) ϕ , (7) A, (8) ϕ , (9) परिमित, (10) समान,

प्रश्न 3. सही जोड़ी बनाइए-

स्तम्भ-(A)

स्तम्भ-(B)

(i) $(A)'$

(a) $U-A$

(ii) $(A \cap B)'$

(b) A

(iii) $A' \cap B'$

(c) $A' \cap B'$

(iv) $A \cap \phi$

(d) $(A \cup B)'$

(v) A'

(e) ϕ

उत्तर- (i) (b), (ii) (c), (iii) (d), (iv) (e), (v) (a)

प्रश्न 4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए-

(1) यदि समुच्चय A में n अवयव हों तो समुच्चय A के कितने उपसमुच्चय होंगे।

(2) यदि $A = \{2, 4, 6, 8\}$ और $B = \{6, 8, 10, 12\}$ तो $A \cap B$ ज्ञात कीजिए।

(3) यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ और $A = \{1, 3, 7, 9\}$ तो A का पूरक समुच्चय $(A)'$ लिखिए।

(4) समीकरण $x^2 + x - 2 = 0$ का हल समुच्चय रोस्टर रूप में लिखिए।

(5) यदि $A = \{b, h, o, p, a, l\}$ और $B = \{g, w, a, l, i, o, r\}$ तो $A \cap B$ ज्ञात कीजिए।

(6) यदि $n(A \cap B) = 18$, $n(A) = 8$, $n(B) = 15$ तब $n(A \cup B)$ का मान लिखिए।

(7) यदि $A = \{b, h, o, p, a, l\}$ और $B = \{g, w, a, l, i, o, r\}$ तो $A - B$ ज्ञात कीजिए।

(8) यदि A और B दो असंयुक्त समुच्चय हैं तो $A \cap B$ में कितने अवयव होंगे।

(9) यदि $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ और $A = \{a, d, f, h\}$ तो $(A)'$ लिखिए।

उत्तर- (1) $2n$, (2) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, (3) $\{2, 4, 5, 6, 8\}$, (4) $\{-2, 1\}$, (5) $\{0, a, l\}$, (6) 5, (7) $\{b, h, p\}$, (8) 0, (9) $\{a, d, f, h\}$.

प्रश्न 5. सत्य/असत्य लिखिए-

(1) यदि $A = \{a, b\}$ तथा $B = \{a, b, c\}$ तो $A \subset B$

(2) $\{\phi\}$ एक रिक्त समुच्चय है।

(3) परिमित समुच्चय में अवयवों की संख्या निश्चित होती है।

(4) अपरिमित समुच्चय में अवयवों की संख्या निश्चित होती है।

(5) $\phi \subset A$. सत्य है, जहाँ ϕ एक रिक्त समुच्चय एवं A कोई भी परिमित समुच्चय है।

उत्तर- (1) सत्य, (2) असत्य, (3) सत्य, (4) असत्य, (5) सत्य।

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 6. समुच्चय $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ को समुच्चय निर्माण के रूप में लिखिए।

हल- दिए हुए समुच्चय के अवयव सम प्राकृत संख्या हैं, अतः $D = \{x : x \text{ एक सम प्राकृत संख्या है}\}$

प्रश्न 7. समान समुच्चय को उदाहरण सहित लिखिए।

हल- दो समुच्चय A और B समान कहलाते हैं, यदि उनमें तथ्यतः समान अवयव हो और हम लिखते हैं $A = B$ उदाहरण के लिए: मान लें $A = \{1, 2, 3, 4\}$ और $B = \{3, 1, 4, 2\}$

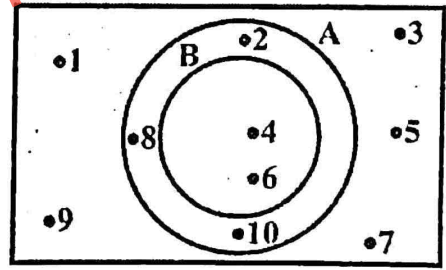
तो $A = B$

प्रश्न 8. अन्तराल $[6, 12]$ को समुच्चय निर्माण के रूप में लिखिए।

हल- $[6, 12] = \{x : x \in R, 6 < x \leq 12\}$ (चूँकि यह बाएँ से विवृत अन्तराल है तथा दाएँ से संवृत अंतराल है।)

प्रश्न 9. समुच्चय $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ एक सार्वत्रिक समुच्चय है, जिसके $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ और $B = \{4, 6\}$ उपसमुच्चय हैं। इन्हें वेन आरेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

हल-



प्रश्न 10. यदि $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ और $B = \{4, 6, 10\}$ तो $A \cap B$ और $A \cup B$ ज्ञात कीजिए।

हल- $A \cap B = \{4, 6, 10\}$

$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

प्रश्न 11. असंयुक्त समुच्चय किसे कहते हैं। उदाहरण सहित लिखिए।

हल- यदि A और B ऐसे दो समुच्चय हों कि $A \cap B = \phi$, तो A और B असंयुक्त समुच्चय कहलाते हैं। उदाहरण के लिए मान लीजिए कि $A = \{2, 4, 6, 8\}$ और $B = \{1, 3, 5, 7\}$, तो A और B असंयुक्त समुच्चय हैं।

प्रश्न 12. यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ तो $A - B$ और $B - A$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल- हम प्राप्त करते हैं कि, $A - B = \{1, 3, 5\}$, क्योंकि अवयव 1, 3, 5 समुच्चय A में हैं किंतु B में नहीं हैं तथा $B - A = \{8\}$, क्योंकि अवयव 8, B में है किंतु A में नहीं है। हम देखते हैं कि $A - B \neq B - A$

(10) यदि $A \times B = B \times A$ हो तब समुच्चय A और B

समुच्चय होंगे।

उत्तर- (1) $\{1, 3\}$, (2) रिक्त समुच्चय, (3) U, (4) A, (5) ϕ , (6) ϕ , (7) A, (8) ϕ , (9) परिमित, (10) समान,

प्रश्न 3. सही जोड़ी बनाइए-

स्तम्भ-(A)	स्तम्भ-(B)
(i) $(A)'$	(a) $U-A$
(ii) $(A \cap B)'$	(b) A
(iii) $A' \cap B'$	(c) $A' \cap B'$
(iv) $A \cap \phi$	(d) $(A \cup B)'$
(v) A'	(e) ϕ

उत्तर- (i) (b), (ii) (c), (iii) (d), (iv) (e), (v) (a)

प्रश्न 4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए-

- यदि समुच्चय A में n अवयव हों तो समुच्चय A के कितने उपसमुच्चय होंगे।
- यदि $A = \{2, 4, 6, 8\}$ और $B = \{6, 8, 10, 12\}$ तो $A \cap B$ ज्ञात कीजिए।
- यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ और $A = \{1, 3, 7, 9\}$ तो A का पूरक समुच्चय $(A)'$ लिखिए।
- समीकरण $x^2 + x - 2 = 0$ का हल समुच्चय रोस्टर रूप में लिखिए।

(5) यदि $A = \{b, h, o, p, a, l\}$ और $B = \{g, w, a, l, i, o, r\}$ तो $A \cap B$ ज्ञात कीजिए।

(6) यदि $n(A \cap B) = 18$, $n(A) = 8$, $n(B) = 15$ तब $n(A \cup B)$ का मान लिखिए।

(7) यदि $A = \{b, h, o, p, a, l\}$ और $B = \{g, w, a, l, i, o, r\}$ तो $A - B$ ज्ञात कीजिए।

(8) यदि A और B दो असंयुक्त समुच्चय हैं तो $A \cap B$ में कितने अवयव होंगे।

(9) यदि $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ और $A = \{a, d, f, h\}$ तो $(A)'$ लिखिए।

उत्तर- (1) $2n$, (2) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, (3) $\{2, 4, 5, 6, 8\}$, (4) $\{-2, 1\}$, (5) $\{0, a, 1\}$, (6) 5, (7) $\{b, h, p\}$, (8) 0, (9) $\{a, d, f, h\}$.

प्रश्न 5. सत्य/असत्य लिखिए-

- यदि $A = \{a, b\}$ तथा $B = \{a, b, c\}$ तो $A \subset B$
- $\{\phi\}$ एक रिक्त समुच्चय है।
- परिमित समुच्चय में अवयवों की संख्या निश्चित होती है।
- अपरिमित समुच्चय में अवयवों की संख्या निश्चित होती है।
- $\phi \subset A$. सत्य है, जहाँ ϕ एक रिक्त समुच्चय एवं A कोई भी परिमित समुच्चय है।

उत्तर- (1) सत्य, (2) असत्य, (3) सत्य, (4) असत्य, (5) सत्य।

प्रश्न 6. समुच्चय $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ को समुच्चय निर्माण के रूप में लिखिए।

हल- दिए हुए समुच्चय के अवयव सम प्राकृत संख्या हैं, अतः $D = \{x : x \text{ एक सम प्राकृत संख्या है}\}$

प्रश्न 7. समान समुच्चय को उदाहरण सहित लिखिए।

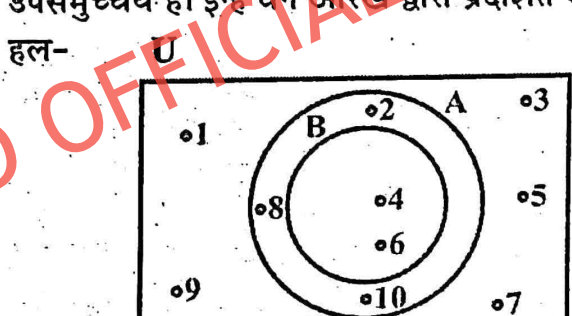
हल- दो समुच्चय A और B समान कहलाते हैं, यदि उनमें तथ्यतः समान अवयव हो और हम लिखते हैं $A = B$ उदाहरण के लिए: मान लें $A = \{1, 2, 3, 4\}$ और $B = \{3, 1, 4, 2\}$

तो $A = B$

प्रश्न 8. अन्तराल $[6, 12]$ को समुच्चय निर्माण के रूप में लिखिए।

हल- $[6, 12] = \{x : x \in R, 6 < x \leq 12\}$ (चूँकि यह बाएँ से विवृत अन्तराल है तथा दाएँ से संवृत अंतराल है।)

प्रश्न 9. समुच्चय $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ एक सार्वत्रिक समुच्चय है, जिसके $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ और $B = \{4, 6\}$ उपसमुच्चय हैं। इन्हें वेन आरेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए।



प्रश्न 10. यदि $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ और $B = \{4, 6, 10\}$ तो $A \cap B$ और $A \cup B$ ज्ञात कीजिए।

हल- $A \cap B = \{4, 6, 10\}$
 $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

प्रश्न 11. असंयुक्त समुच्चय किसे कहते हैं। उदाहरण सहित लिखिए।

हल- यदि A और B ऐसे दो समुच्चय हों कि $A \cap B = \phi$, तो A और B असंयुक्त समुच्चय कहलाते हैं। उदाहरण के लिए मान लीजिए कि $A = \{2, 4, 6, 8\}$ और $B = \{1, 3, 5, 7\}$, तो A और B असंयुक्त समुच्चय हैं।

प्रश्न 12. यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ तो $A - B$ और $B - A$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल- हम प्राप्त करते हैं कि, $A - B = \{1, 3, 5\}$, क्योंकि अवयव 1, 3, 5 समुच्चय A में हैं किंतु B में नहीं हैं तथा $B - A = \{8\}$, क्योंकि अवयव 8, B में है किंतु A में नहीं है। हम देखते हैं कि $A - B \neq B - A$

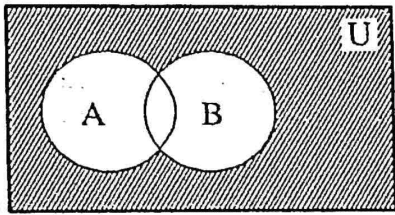
प्रश्न 13. समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ के सभी उपसमुच्चय लिखिए।

हल- $\{1, 2, 3\}$

उपसमुच्चय = $\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$

प्रश्न 14. $(A \cup B)'$ का वेन आरेख खींचिए।

हल- $(A \cup B)' = U - (A \cup B) =$ छायांकित क्षेत्र

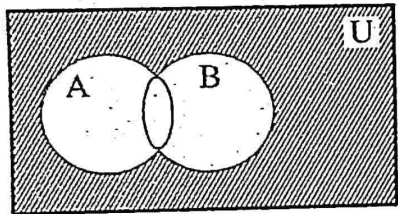


प्रश्न 15. $A' \cap B'$ का वेन आरेख खींचिए।

हल- $A' \cap B' = (A \cup B)'$ (डी-मॉर्गन नियम द्वारा) = जैसा 9.14 में दिखाया गया है।

प्रश्न 16. $(A \cap B)'$ का वेन आरेख खींचिए।

हल- $(A \cap B)' = U - (A \cap B) =$ छायांकित भाग



प्रश्न 17. $A' \cup B'$ का वेन आरेख खींचिए।

हल- $A' \cup B' = (A \cap B)'$ (डी-मॉर्गन नियम द्वारा) = जैसा प्रश्न 16. में दिखाया गया है।

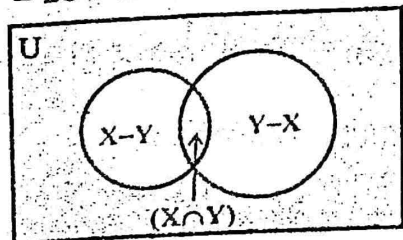
प्रश्न 18. यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि $X \cup Y$ में 50 अवयव हैं, X में 28 अवयव हैं और Y में 32 अवयव हैं, तो $X \cap Y$ में कितने अवयव हैं?

हल- दिया है कि $n(X \cup Y) = 50, n(X) = 28,$

$$n(Y) = 32, n(X \cap Y) = ?$$

सूत्र $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$ के प्रयोग द्वारा हम देखते हैं कि

$$n(X \cap Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cup Y) = 28 + 32 - 50 = 10$$



प्रश्न 19. यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि $n(X) = 17, n(Y) = 23$ तथा $n(X \cup Y) = 38$, हो तो $n(X \cap Y)$ ज्ञात कीजिए।

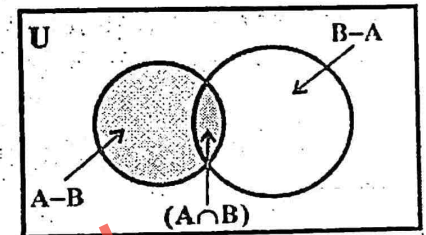
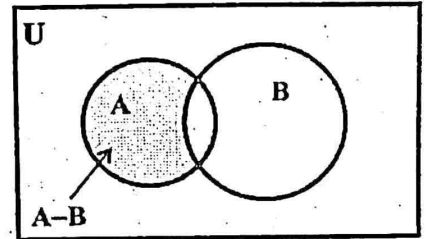
हल- दिया है, $n(X) = 17, n(Y) = 23, n(X \cup Y) = 38$

तदात्मक $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$ का प्रयोग करने पर,

$$\Rightarrow n(X \cap Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cup Y) = 17 + 23 - 38 = 40 - 38 = 2$$

प्रश्न 20. यदि A और B दो समुच्चय हों तो $A - B$ और $B - A$ को वेन आरेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

हल-



प्रश्न 21. समुच्चयों के गुणधर्मों का उपयोग करके सिद्ध कीजिए कि $A \cap (A \cap B) = A$.

हल- चूंकि $A \cap B \subset A$, अतएव $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ इसलिए,

$$A \cup (A \cap B) = \{x : x \in A \text{ या } x \in A \cap B\} \quad \{\cup \text{ की परिभाषा से}\}$$

$$= \{x : x \in A \text{ या } x \in A\}, \text{ क्योंकि } A \cap B \subset A$$

$$= \{x : x \in A\}$$

अतः, $A \cup (A \cap B) = A$, (A की परिभाषा से) इति सिद्धम्

प्रश्न 22. यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ तो $(A \cup B)'$ तथा $A - B$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल- $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$

$$(A \cup B)' = \{1\}$$

$$A - B = \{2, 3\}$$

प्रश्न 23. यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ और $B = \{2, 3, 5, 7\}$, तो सत्यापित कीजिए कि $(A \cup B)' = A' \cap B'$

हल- (i) $A \cup B = \{2, 4, 6, 8\} \cup \{2, 3, 5, 7\}$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\Rightarrow (A \cup B)' = U - (A \cup B)$$

= {वे अवयव जो U में हैं किंतु $(A \cup B)$ में नहीं हैं}

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$= \{1, 9\}$$

अब, A का पूरक $= A' = U - A$

$$= \{ \text{वे अवयव जो } U \text{ में हैं किंतु } A \text{ में नहीं हैं} \}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{2, 4, 6, 8\}$$

$$= \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

तथा B का पूरक $B' = U - B$

$$= \{ \text{वे अवयव जो } U \text{ में हैं किंतु } B \text{ में नहीं हैं} \}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{2, 3, 5, 7\}$$

$$= \{1, 4, 6, 8, 9\}$$

$$\Rightarrow A' \cap B' = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{1, 4, 6, 8, 9\}$$

$$= \{1, 9\} \quad \dots(ii)$$

समी (i) तथा (ii) से,

$$\Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$$

प्रश्न 24. यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ और $B = \{2, 3, 5, 7\}$ तो सत्यापित कीजिए कि $(A \cap B)' = A' \cup B'$

हल- $A \cap B = \{2, 4, 6, 8\} \cap \{2, 3, 5, 7\} = \{2\}$

$$(A \cap B)' = U - (A \cap B)$$

$$= \{ \text{वे अवयव जो } U \text{ में हैं किंतु } (A \cap B) \text{ में नहीं हैं} \}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{2\}$$

$$= \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad \dots(i)$$

A का पूरक $A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

और B का पूरक $B' = \{1, 4, 6, 8, 9\}$

$$\Rightarrow A' \cup B' = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad \dots(ii)$$

सभी (i) तथा (ii) से, $(A \cap B)' = A' \cup B'$

प्रश्न 25. एक विद्यालय में 20 अध्यापक हैं जो गणित या भौतिकी पढ़ाते हैं। इनमें से 12 गणित पढ़ाते हैं और 4 भौतिकी और गणित दोनों को पढ़ाते हैं। कितने अध्यापक भौतिकी पढ़ाते हैं?

हल- मान लीजिए कि M उन अध्यापकों का समुच्चय निरूपित करता है, जो गणित पढ़ाते हैं और P उन अध्यापकों का समुच्चय निरूपित करता है, जो भौतिकी पढ़ाते हैं। हमें प्रश्न के कथन में आने वाले शब्द 'या' से सम्मिलन तथा शब्द 'और' से सर्वनिष्ठ का संकेत मिलता है। इसलिए

$$n(M \cap P) = 20, n(M) = 12 \text{ और } n(M \cap P) = 4$$

हम $n(P)$ ज्ञात करना चाहते हैं।

परिणाम $n(M \cup P) = n(M) + n(P) - n(M \cap P)$, के प्रयोग द्वारा

$$20 = 12 + n(P) - 4$$

अतः $n(P) = 12$

अतएव 12 अध्यापक भौतिकी पढ़ाते हैं।

प्रश्न 26. 35 विद्यार्थियों की एक कक्षा में, 24 क्रिकेट खेलना पसंद करते हैं और 16 फुटबॉल खेलना पसंद करते हैं। इसके अतिरिक्त प्रत्येक विद्यार्थी कम से कम एक खेल अवश्य खेलना पसंद करता है। कितने विद्यार्थी क्रिकेट और फुटबॉल दोनों खेलना पसंद करते हैं?

हल- मान लो कि क्रिकेट खेलना पसंद करने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय X है। मान लीजिए कि फुटबॉल खेलना पसंद करने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय Y है। इस प्रकार $X \cup Y$ उन विद्यार्थियों का समुच्चय है, जो कम से कम एक खेल खेलना पसंद करते हैं और $X \cap Y$ उन विद्यार्थियों का समुच्चय है, जो दोनों ही खेल खेलना पसंद करते हैं।

दिया है कि $n(X) = 24, n(Y) = 16, n(X \cap Y) = 35$

$$n(X \cap Y) = ?$$

हम जानते हैं कि $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$

$$35 = 24 + 16 - n(X \cap Y)$$

अतः $n(X \cap Y) = 5$

अतः 5 विद्यार्थी दोनों खेल खेलना पसंद करते हैं। उत्तर

प्रश्न 27. 400 व्यक्तियों के समूह में, 250 हिंदी तथा 200 अंग्रेजी बोल सकते हैं। कितने व्यक्ति हिंदी तथा अंग्रेजी दोनों बोल सकते हैं?

हल- माना H तथा E क्रमशः हिंदी तथा अंग्रेजी बोलने वाले लोग हैं।

$$\therefore n(H) = 250$$

$$n(E) = 200$$

तथा $n(H \cap E) = 400$

तदात्म्य $n(H \cup E) = n(H) + n(E) - n(H \cap E)$ का प्रयोग करने पर,

$$400 = 250 + 200 - n(H \cap E)$$

$$\Rightarrow 400 = 450 - n(H \cap E)$$

$$\Rightarrow n(H \cap E) = 450 - 400 = 50$$

उत्तर

प्रश्न 28. 70 व्यक्तियों के समूह में, 37 कॉफी, 52 चाय पसंद करते हैं और प्रत्येक व्यक्ति दोनों में से कम से कम एक पेये पसंद करता है, तो कितने व्यक्ति कॉफी और चाय को पीना पसंद करते हैं?

हल- माना कॉफी तथा चाय पसंद करने वाले लोगों को क्रमशः o तथा p द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

तब, $n(O \cup P) = 70, n(O) = 37, n(P) = 52$

$$n(O \cap P) = ?$$

तदात्म्य $n(O \cup P) = n(O) + n(P) - n(O \cap P)$ का प्रयोग करने पर,

$$\therefore 70 = 37 + 52 - n(O \cap P)$$

$$\Rightarrow 70 = 89 - n(O \cap P)$$

$$\Rightarrow n(O \cap P) = 89 - 70 = 19 \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 29. एक कमेटी में, 50 व्यक्ति फ्रेंच, 20 व्यक्ति स्पेनिश और 10 व्यक्ति स्पेनिश और फ्रेंच दोनों ही भाषाओं को बोल सकते हैं। कितने व्यक्ति इन दोनों ही भाषाओं में से कम-से-कम एक भाषा बोल सकते हैं?

हल- फ्रेंच तथा स्पेनिश बोलने वाले व्यक्तियों को क्रमशः E तथा S द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

दिया है, $n(E) = 50$, $n(S) = 20$, $n(S \cap E) = 10$
तदात्म्य $n(S \cup E) = n(S) + n(E) - n(S \cap E)$ का प्रयोग करने पर,

$$\begin{aligned} n(S \cup E) &= 20 + 50 - 10 \\ &= 70 - 10 = 60 \end{aligned}$$

$$\therefore n(S \cup E) = 60 \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 30. किसी स्कूल के 400 विद्यार्थियों के सर्वेक्षण में 100 विद्यार्थी सेब का रस, 150 विद्यार्थी संतरे का रस और 75 विद्यार्थी सेब तथा संतरे दोनों का रस पीने वाले पाए जाते हैं। ज्ञात कीजिए कि कितने विद्यार्थी न तो सेब का रस पीते हैं और न संतरे का ही?

हल- मान लीजिए कि U सर्वेक्षण किए गए विद्यार्थियों के समुच्चय को निरूपित करता है। तथा A सेब का रस पीने वाले और B संतरे का रस पीने वाले विद्यार्थियों के समुच्चयों को निरूपित करते हैं। इस प्रकार $n(U) = 400$, $n(A) = 100$, $n(B) = 150$ और $n(A \cap B) = 75$ ।

$$\begin{aligned} \text{अब } n(A' \cap B') &= n(A \cup B)' \\ &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= n(U) - n(A) - n(B) + n(A \cap B) \\ &= 400 - 100 - 150 + 75 = 225 \end{aligned}$$

अतः 225 विद्यार्थी न तो सेब का रस और न संतरे का रस पीते हैं।

प्रश्न 31. 200 व्यक्ति किसी चर्म रोग से पीड़ित हैं, इनमें 120 व्यक्ति रसायन C_1 , 50 व्यक्ति रसायन C_2 , और 30 व्यक्ति रसायन C_1 और C_2 दोनों ही से प्रभावित हुए हैं, तो ऐसे व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए जो प्रभावित हुए हों:

- रसायन C_1 किंतु रसायन C_2 से नहीं,
- रसायन C_2 किंतु रसायन C_1 से नहीं,
- रसायन C_1 अथवा रसायन C_2 से प्रभावित हुए हैं।

हल- मान लीजिए कि U, चर्म रोग से पीड़ित व्यक्तियों के सार्वत्रिक समुच्चय को निरूपित करता है, A, रसायन C_1 से प्रभावित व्यक्तियों के समुच्चय को तथा B, रसायन C_2 से प्रभावित व्यक्तियों के समुच्चय को निरूपित करते हैं।

यहाँ पर $n(U) = 200$, $n(A) = 120$, $n(B) = 50$ तथा $n(A \cap B) = 30$

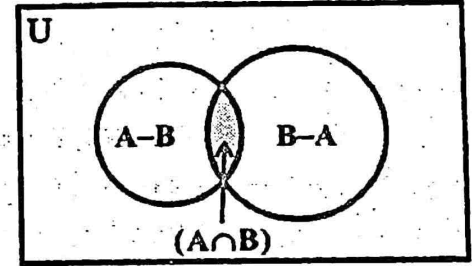
(i) दिए हुए वेन आरेख (आकृति 1.13) में हम देखते हैं कि $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ ।

$$\text{अतः } n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$$

(क्योंकि $A - B$ और $A \cap B$ असंयुक्त हैं)

$$\begin{aligned} \text{अथवा } n(A - B) &= n(A) - n(A \cap B) = \\ &= 120 - 30 = 90 \end{aligned}$$

अतः रसायन C_1 किंतु रसायन C_2 से नहीं प्रभावित व्यक्तियों की संख्या 90 है।



(ii) आकृति से $B = (B - A) \cup (A \cap B)$

$$\text{इसलिए } n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$$

(क्योंकि $A - B$ तथा $B - A$ असंयुक्त हैं)

$$\begin{aligned} \text{अथवा } n(B - A) &= n(B) - n(A \cap B) \\ &= 50 - 30 = 20 \end{aligned}$$

अतः रसायन C_2 किंतु रसायन C_1 से नहीं प्रभावित व्यक्तियों की संख्या 20 है।

(iii) रसायन C_1 अथवा रसायन C_2 से प्रभावित व्यक्तियों की संख्या अर्थात्

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 120 + 50 - 30 = 140 \end{aligned} \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 32. 65 व्यक्तियों के समूह में, 40 व्यक्ति क्रिकेट और 10 व्यक्ति क्रिकेट तथा टेनिस दोनों को पसंद करते हैं, तो कितने व्यक्ति केवल टेनिस को पसंद करते हैं किंतु क्रिकेट को नहीं? कितने व्यक्ति टेनिस को पसंद करते हैं?

हल- माना क्रिकेट तथा टेनिस पसंद करने वाले लोगों को क्रमशः O तथा P द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

तब, $n(O \cap P) = 65$, $n(O) = 40$, $n(O \cap P) = 10$
तदात्म्य $n(O \cap P) = n(O) + n(P) - n(O \cup P)$ का प्रयोग करने पर,

$$\therefore 65 = 40 + n(P) - 10$$

$$\Rightarrow 65 = 30 + n(P)$$

$$\Rightarrow 65 - 30 = n(P)$$

$$\Rightarrow n(P) = 35$$

अतः लोगों की संख्या, जो केवल टेनिस को पसंद करते हैं किंतु क्रिकेट को नहीं

$$= n(P \cap O')$$

$$= n(P) - n(O \cap P)$$

$$= 35 - 10 = 25$$

प्रश्न 33. किसी विद्यालय के 600 विद्यार्थियों के सर्वेक्षण से ज्ञात हुआ कि 150 विद्यार्थी चाय, 225 विद्यार्थी कॉफी तथा 100 विद्यार्थी चाय और कॉफी दोनों पीते हैं। ज्ञात कीजिए कि कितने विद्यार्थी न तो चाय पीते हैं और न कॉफी पीते हैं?

हल- माना C तथा T क्रमशः कॉफी तथा चाय पीने वाले विद्यार्थियों को प्रदर्शित करते हैं।

यहाँ, $n(T) = 150$, $n(C) = 225$, $n(C \cap T) = 100$.

सूत्र $n(C \cup T) = n(T) + n(C) - n(C \cap T)$ का प्रयोग करने पर,

$$n(C \cup T) = 150 + 225 - 100 = 375 - 100$$

$$\Rightarrow n(C \cap T) = 275$$

दिया है, कुल विद्यार्थियों की संख्या = $600 - n(U)$.

हमें ज्ञात करना है, विद्यार्थियों की संख्या, जो न तो चाय पीते हैं और न कॉफी पीते हैं-

अर्थात् $n(C \cup T)'$

$$\therefore n(C \cup T)' = n(U) - n(C \cup T) \\ = 600 - 275 = 325. \quad \square$$

अध्याय-2

संबंध एवं फलन

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए-

(1) फलन $f(x) = x$ कहलाता है:

- (अ) तत्समक फलन (ब) अचर फलन
(स) मापांक फलन (द) चिन्ह फलन

(2) फलन $f(x) = c$, जहाँ c एक अचर है, कहलाता है:

- (अ) तत्समक फलन (ब) अचर फलन
(स) मापांक फलन (द) चिन्ह फलन

(3) फलन $f(x) = |x|$ कहलाता है:

- (अ) तत्समक फलन (ब) अचर फलन
(स) मापांक फलन (द) चिन्ह फलन

(4) यदि $(a + 1, b - 2) = (3, 1)$ तो a व b के मान क्रमशः होंगे:

- (अ) 2, 3 (ब) -2, -3 (स) 2, -3 (द) -2, 3

(5) यदि $A = \{1, 2\}$ और $B = \{3, 4\}$ तब A से B पर संबंधों की संख्या होगी:

- (अ) 2 (ब) 4 (स) 8 (द) 16

(6) दो परिभाषित समुच्चय A तथा B इस प्रकार हैं कि

$n(A) = 2$, $n(B) = 3$ तब A से B में संबंधों की संख्या होगी:

- (अ) 64 (ब) 4 (स) 8 (द) 16

(7) यदि A तथा B दो समुच्चय हैं, तब $A \times B = B \times A$ यदि और केवल यदि।

- (अ) $A \subseteq B$ (ब) $B \subseteq A$ (स) $A = B$ (द) $A \supseteq B$

उत्तर- (1) (अ), (2) (ब), (3) (स), (4) (अ), (5) (द), (6) (अ), 7. (स)।

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

(1) $A \times \phi = \dots\dots\dots$

(2) A या B में से कोई अपरिमित समुच्चय है तो $A \times B \dots\dots\dots$ समुच्चय होता है।

(2) A या B में से कोई अपरिमित समुच्चय है तो $A \times B \dots\dots\dots$ समुच्चय होता है।

(3) किसी अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में संबंध (R), कार्तीय गुणन $A \times B$ का $\dots\dots\dots$ होता है।

(4) किसी अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में संबंध R के सभी क्रमित युग्मों के प्रथम घटकों के समुच्चय को संबंध R का $\dots\dots\dots$ कहते हैं।

उत्तर- (1) ϕ , (2) अपरिमित, (3) उपसमुच्चय, (4) प्रान्त।

प्रश्न 3. सही जोड़ी बनाइए-

स्तम्भ-(अ)

स्तम्भ-(ब)

(i) $f(x) = x, \forall x \in R$

(a) ϕ

(ii) $y = f(x) = |x|, \forall x \in R$

(b) तत्समक फलन

(iii) $y = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x > 0 \\ 0, & \text{if } x = 0, \\ 1, & \text{if } x < 0 \end{cases} \forall x \in R$ (c) मापांक फलन

(iv) $y = f(x) = [x], \forall x \in R$

(d) चिन्ह फलन

(v) $A \times \phi$

(e) महत्तम

पूर्णांक फलन

उत्तर- (1) (b), (2) (c), (3) (d), (4) (e), (5) (a)।

प्रश्न 4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए-

(1) यदि $A = \{1, 2\}$ और $B = \{3, 4\}$ तो समुच्चय $A \times B$ ज्ञात कीजिए।

(2) एक फलन $f(x) = 2x - 5$ द्वारा परिभाषित है तो $f(-3)$ का मान लिखिए।

(3) यदि $A = \{1, 2\}$ और $B = \{3, 4\}$ तो A से B में संबंधों की संख्या कितनी होगी।

(4) यदि $X = \{1, 2\}$ तथा $Y = \{4, 5, 6\}$ तो $X \times Y$ क्या होगा?

- 1) $A \times B = \{(1,3), (1, 4), (2,3), (2,4)\}$, (2) -11,
 (4) $X \times Y = \{(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6)\}$.
 सत्य/असत्य लिखिए-

$\times \phi = A$
 $\times \phi = \phi$

क्रमित गुण समान होते हैं। यदि और केवल यदि
 संत प्रथम घटक समान हों और संत द्वितीय घटक
 न हों।

$\times A \times A = \{(a, b, c) : a, b, c \in A\}$. यहाँ (a,
 एक क्रमित कहलाता है।

नवी संबंध R का परिसर (Range) उस संबंध के
 त (Co-domain) का उपसमुच्चय (Subset) होता
 है। परिसर (Range) \subseteq सह-प्रान्त (Co-domain)
 है। $n(A) = p$ तथा $n(B) = q$ तो $n(A \times B) = pq$ तथा
 3 में संबंधों की कुल संख्या = 2^{pq}

- (1) असत्य, (2) सत्य, (3) सत्य, (4) सत्य, (5)
 (6) सत्य।

यदि $f, g: R \rightarrow R$ क्रमशः $f(x) = x+1, g(x) =$
 1 द्वारा परिभाषित है। $f+g$ और $f-g$ ज्ञात कीजिए।

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
 $= x+1 + 2x - 3$
 $= 3x - 2$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
 $= x+1 - (2x-3)$
 $= x+1 - 2x+3$
 $= -x+4$
 $= 4-x$

1. यहाँ $f, g: R \rightarrow R$ क्रमशः $f(x) = x+1, g(x) =$
 3 द्वारा परिभाषित है, f, g और $\frac{f}{g}$ ज्ञात कीजिए।

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x-3$
 $= (x+1) + (2x-3)$
 $= 2x^2 - 3x + 2x - 3$
 $= 2x^2 - x - 3$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{2x-3}$

8. यदि $f(x) = x^2$ तथा $g(x) = 2x+1$ हो, तो $(f+g)$
 और $(f-g)(x)$ ज्ञात कीजिए।
 हल: $(f+g)(x) = x^2 + 2x + 1, (f-g) = x^2 - 2x - 1$

प्रश्न 9. यदि $f(x) = x^2$ तथा $g(x) = 2x+1$ हो, तो $(f+g)$
 (x) और $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ज्ञात कीजिए।

हल- स्पष्टतः $(f+g)(x) = x^2 + 2x + 1 = 2x^3 + x^2,$
 $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{2x+1}, x \neq -\frac{1}{2}$

प्रश्न 10. यदि $f(x) = \sqrt{x}$ तथा $g(x) = x$ शून्यतः
 वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित दो फलन हैं, तो
 $(f+g)(x), (f-g)(x)$ ज्ञात कीजिए।

हल- यहाँ हमें निम्नलिखित परिणाम मिलते हैं:
 $(f+g)(x) = \sqrt{x} + x, (f-g)(x) = \sqrt{x} - x.$

प्रश्न 11. यदि $f(x) = \sqrt{x}$ तथा $g(x) = x$ शून्यतः
 वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित दो फलन हैं तो
 $(f, g)(x)$ और $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ज्ञात कीजिए।

हल- स्पष्टतः $(fg)(x) = \sqrt{x}(x) = x^{\frac{3}{2}}$ और $\left(\frac{f}{g}\right)(x) =$
 $\frac{\sqrt{x}}{x} = x^{-\frac{1}{2}}, x \neq 0$

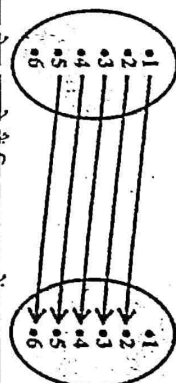
प्रश्न 12. यदि $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{5, 6\}$ तथा
 $D = \{5, 6, 7, 8\}$ सत्यापित कीजिए कि $A \times C, B \times D$ का
 एक उपसमुच्चय है।

हल- दिया है, $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$
 $C = \{5, 6\}, D = \{5, 6, 7, 8\}$
 $A \times C = \{1, 2\} \times \{5, 6\} =$
 $= \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}$
 $B \times D = \{1, 2, 3\} \times \{5, 6, 7, 8\}$
 $= \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{1, 7\}, \{1, 8\}, \{2, 5\}, \{2, 6\},$
 $\{2, 7\}, \{2, 8\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}, \{3, 8\}$

All the elements of $A \times C$ are in $B \times D$
 Therefore, $A \times C$ is the subset of $B \times D$,
 प्रश्न 13. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, R =$
 $\{(x, y) : y = x + 1\}$ द्वारा A से A में एक संबंध परिभाषित
 कीजिए।

(i) इस संबंध को एक तीर आरेख द्वारा दर्शाएं।
 (ii) R के प्रांत, सहप्रांत तथा परिसर लिखिए।

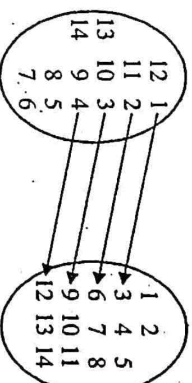
हल- (i) परिभाषा द्वारा
 $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$.
 संत तीर आरेख आकृति में प्रदर्शित है।



(ii) हम देख सकते हैं कि प्रथम घटकों का समुच्चय अर्थात्
 प्रांत = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ इसी प्रकार, द्वितीय घटकों का
 समुच्चय अर्थात् परिसर = $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ तथा सहप्रांत =
 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

प्रश्न 14. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, \dots, 14\}, R = \{(x, y) :$
 $3x - y = 0, \text{ जहाँ } x, y \in A\}$ द्वारा, A से A का एक संबंध R
 लिखिए। इसके प्रांत, सहप्रांत और परिसर लिखिए।

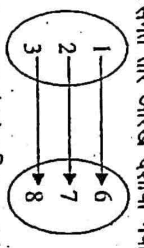
हल- (i) $R = \{(x, y) : 3x - y = 0, \text{ जहाँ } x, y \in A\} =$
 $\{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12)\}$



(i) प्रांत = $\{1, 2, 3, 4\}$
 (ii) सहप्रांत = $\{1, 2, 3, 4, \dots, 14\}$
 (iii) परिसर = $\{3, 6, 9, 12\}$

प्रश्न 15. प्राकृत संख्याओं के समुच्चय पर $R = \{(x, y) :$
 $y = x + 5, x$ संख्या 4 से कम, एक प्राकृत संख्या है,
 $x, y \in N\}$ द्वारा एक संबंध R परिभाषित कीजिए। इस
 संबंध का गैस्टर रूप में, इसके प्रांत और परिसर लिखिए।
 हल- दिया है, x संख्या 4 से कम एक प्राकृत संख्या है अर्थात्
 $x = 1, 2, 3$

(i) $R = \{(x, y) : y = x + 5, x$ एक प्राकृत संख्या है 4
 से कम, $x, y \in N\}$
 $= \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$



(ii) प्रांत = $\{1, 2, 3\}$ (iii) परिसर = $\{6, 7, 8\}$
 प्रश्न 16. मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, मान लीजिए
 कि R, A पर $\{(a, b) : a, b \in A, \text{ संख्या a संख्या b को}$
 यथावत विभाजित करती है} द्वारा परिभाषित एक संबंध है-

- (i) R को गैस्टर रूप में लिखिए।
 (ii) R का प्रांत ज्ञात कीजिए।
 (iii) R का परिसर ज्ञात कीजिए।

हल- दिया गया है, $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$
 (i) $R = \{(a, b) : a, b \in A, \text{ संख्या a संख्या b को यथावत}$
 विभाजित करती है}

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4),$
 $(2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (6, 6)\}$.

(ii) प्रांत = $\{1, 2, 3, 4, 6\}$.
 (iii) परिसर = $\{1, 2, 3, 4, 6\}$.

प्रश्न 17. $R = \{(x, x+5) : x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$ द्वारा
 परिभाषित संबंध R के प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए।
 हल- दिया है,
 $R = \{(x, x+5) : x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$
 $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर,
 \Rightarrow प्रांत = $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
 पुनः x का मान समी (i) में रखने पर हम पाते हैं,
 $y = x + 5 = 5, 6, 7, 8, 9, 10$
 \Rightarrow परिसर = $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

प्रश्न 18. मान लीजिए कि N प्राकृत संख्याओं का समुच्चय
 है और N पर परिभाषित एक संबंध R इस प्रकार है कि
 $R = \{(x, y) : y = 2x, x, y \in N\}$.

R के प्रांत, सहप्रांत तथा परिसर क्या हैं? क्या यह संबंध,
 एक फलन है?

हल- R का प्रांत, प्राकृत संख्याओं का समुच्चय N है। इसका
 सहप्रांत भी N है। इसका परिसर सम प्राकृत संख्याओं का
 समुच्चय है।

क्योंकि प्रत्येक प्राकृत संख्या n का एक और केवल एक ही
 प्रतिबिंब है, इसलिए यह संबंध एक फलन है।

प्रश्न 19. फलन $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ का प्रांत तथा परिसर
 ज्ञात कीजिए।

हल- दिया है, $f(x) = \sqrt{9-x^2}$
 $f(x)$ का मान वास्तविक होगा, यदि $f(x) \geq 0$.

$9 - x^2 \geq 0$
 $-(x^2 - 9) \geq 0$
 $\Rightarrow x^2 - 9 \leq 0$
 $\Rightarrow (x+3)(x-3) \leq 0$

अतः प्रांत = $[-3, 3]$
 प्रश्न 20. $f(x) = \sqrt{x-1}$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन
 f का प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

हल- दिया है, $f(x) = \sqrt{x-1}$
 $f(x)$ का मान वास्तविक होगा, यदि $f(x) \geq 0$.

$x - 1 \geq 0$
 $x \geq 1$
 $\Rightarrow (x+3)(x-3) \leq 0$

पी. एच. प्रश्न बैंक

जा है, $f(x) = \sqrt{x-1}$

परिभाषित करने के लिए वर्गमूल के अंदर का मान नकारक होना चाहिए।

$$x-1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

1. ∞ या $\{x : x \in R \text{ तथा } x \geq 1\}$

सर, $f(x) = \sqrt{x-1}$

$$y = \sqrt{x-1} \Rightarrow y^2 = x-1 \Rightarrow x = y^2 + 1$$

न सभी (i) में रखने पर,

$$y^2 + 1 - 1 \geq 0$$

$$-\infty < y < \infty$$

कभी भी ऋणात्मक नहीं हो सकता क्योंकि फलन

$\sqrt{x-1}$ कभी भी ऋणात्मक मान नहीं रखता है।

$$y^2 \geq 0$$

$$y \geq 0$$

परिसर = $[0, \infty)$ या $\{y : y \in R \text{ तथा } y \geq 0\}$

1. यदि $f(x) = x^2$ हो, तो $\frac{f(1.1) - f(1)}{(1.1) - 1}$ ज्ञात

$$f(x) = x^2$$

$$f(1.1) = (1.1)^2 = 1.21$$

$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$\frac{f(1.1) - f(1)}{(1.1) - 1} = \frac{1.21 - 1}{0.1} = \frac{0.21}{0.1} = 2.1$$

फलन $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 8x + 12}$ का प्रांत ज्ञात कीजिए।

या ज्ञात फलन,

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 8x + 12}$$

परिभाषित होगा जब,

$$x^2 - 8x + 12 \neq 0$$

$$x^2 - 6x - 2x + 12 \neq 0$$

$$x(x-6) - 2(x-6) \neq 0$$

$$(x-2)(x-6) \neq 0$$

$$x \neq 2 \text{ तथा } x \neq 6$$

न ज्ञात प्रांत = $R - \{2, 6\}$.

फलन $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 5x + 4}$ का प्रांत ज्ञात कीजिए।

जो कि $x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1)$, इसलिए फलन

4 और $x = 1$ के अतिरिक्त अन्य सभी वास्तविक

संख्या परिभाषित है। अतः f का प्रांत $R - \{1, 4\}$ है।

प्रश्न 24. यदि $f = \{(1,1), (2,3), (0,-1), (-1,-3)\}$, Z से Z में एक शिथिल फलन है, तो $f(x)$ ज्ञात कीजिए।

Z में एक शिथिल फलन है, इसलिए $f(x) = mx + c$. पुनः क्योंकि $(1,1), (0,-1) \in R$ है। इसलिए, $f(1) = m + c = 1$ तथा $f(0) = c = -1$. इससे हमें $m = 2$ मिलता है और इस प्रकार $f(x) = 2x - 1$.

प्रश्न 25. यदि $f(x) = x^2 + 2x - 3$ हो, तो $f(0), f(-1),$

$f\left(\frac{1}{3}\right)$ $f(\sin x)$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल- दिया है- $f(x) = x^2 + 2x - 3$

(i) $x = 0$ रखने पर,

$$f(0) = 0^2 + 2(0) - 3 = -3$$

(ii) $x = -1$ रखने पर,

$$f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

(iii) $x = \frac{1}{3}$ रखने पर,

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right) - 3 = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} - 3 = \frac{1+6-27}{9} = \frac{-20}{9}$$

(iv) $x = \sin x$ रखने पर,

$$f(\sin x) = \sin^2 x + 2 \sin x - 3$$

प्रश्न 26. फलन 'f' सेलसियस तापमान का फॉरेनहाइट तापमान में प्रतिचित्रण करता है, जो $f(c) = \frac{9c}{5} + 32$ द्वारा परिभाषित है, निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए-

(i) $f(0)$, (ii) $f(28)$, (iii) $f(-10)$, (iv) c का मान, जब $f(c) = 212$.

हल- दिया है, $f(c) = \frac{9c}{5} + 32$

(i) $c = 0$ रखने पर,

$$f(0) = \frac{9 \times 0}{5} + 32 = 32$$

(ii) $c = 28$ रखने पर,

$$f(28) = \frac{9 \times 28}{5} + 32 = \frac{252}{5} + 32 = \frac{252 + 160}{5} = \frac{412}{5}$$

(iii) सभी (i) में $C = 28$ रखने पर,

$$f(28) = \frac{9 \times 28}{5} + 32 = \frac{252}{5} + 32 = \frac{252 + 160}{5} = \frac{412}{5}$$

(iii) सभी (i) में $C = -10$ रखने पर,

$$f(-10) = \frac{9 \times (-10)}{5} + 32 = \frac{-9 \times 10}{5} + 32 = -9 \times 2 + 32 = 18 + 32 = 50$$

(iv) सभी (i) में $f(C) = 212$ रखने पर,

$$212 = \frac{9C}{5} + 32 \Rightarrow \frac{9C}{5} = 212 - 32 = 180 \Rightarrow C = \frac{5 \times 180}{9} = 100$$

अध्याय-3 त्रिकोणमितीय फलन

प्रश्न 1. सभी विकल्प चुनिये-

(1) 225° की रेखिय माप होती है-

- (a) $\frac{3\pi}{4}$ (b) $\frac{4\pi}{3}$ (c) $\frac{5\pi}{4}$ (d) $\frac{4\pi}{5}$

(2) $\frac{7\pi}{6}$ रेखिय माप की संगत डिग्री माप होती है-

- (a) 150° (b) 210° (c) 135° (d) 300°

(3) फलन $y = \cos x$ का परिसर (Range) होती है-

- (a) $[-1, 1]$ (b) $[-1, 1]$ (c) $(-\infty, \infty)$ (d) $[0, \pi]$

(4) $\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3}$ का मान होता है-

- (a) 1 (b) $1/2$ (c) $-1/2$ (d) 0

(5) $\sin 15^\circ$ का मान है-

- (a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (c) $\sqrt{3}-2$ (d) $2-\sqrt{3}$

(6) \cos एवं \sec फलन किन चतुर्थांशों में घातक होते हैं-

- (a) प्रथम एवं तृतीय (b) प्रथम एवं द्वितीय (c) प्रथम एवं चतुर्थ (d) सभी चतुर्थांशों में

उत्तर-1. (c), 2. (b), 3. (b), 4. (b), 5. (a), 6. (c).

(ii) $\operatorname{cosec} \frac{7\pi}{6}$ का मान होता है।

उत्तर- (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ii. -2

प्रश्न 3. सभी जोड़ी मिलान करें-

(1) $\operatorname{cosec}^2 x - 1$ स्तम्भ-A

(2) $\tan 2x$ स्तम्भ-B

(3) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ स्तम्भ-A

(4) रेखिय माप स्तम्भ-B

(5) $\sin(2\pi + x)$ स्तम्भ-A

उत्तर- (1) (c), (2) (c), (3) (a), (4) (b), (5) (d).

- (1) 180° (a) $\tan \theta$
 (2) $\cos \pi$ (b) $-\tan \theta$
 (3) $\tan(-\theta)$ (c) π^c
 (4) $\sec(90 - \theta)$ (d) -1
 (5) $\cot 30^\circ$ (e) 1
 (f) $\operatorname{cosec} \theta$ (g) $\sqrt{3}$

उत्तर- (1) (e), (2) (d), (3) (b), (4) (f), (5) (g).

- (1) $2 \sin A \cos A$ (a) $\sin 30$
 (2) $1 - 2 \sin^2 A$ (b) $\cos 30$
 (3) $\frac{1 - \tan^2 A}{2 \tan^2 A}$ (c) $\sin 2A$
 (4) $3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ (d) $\sin 2A$
 (5) $4 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta$ (e) $\tan 2A$

- उत्तर- (1) (c), (2) (d), (3) (e), (4) (a), (5) (b).
 (1) $\sin 15^\circ$ (a) $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$
 (2) $\sin 2x$ (b) $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$
 (3) $\tan 2x$ (c) $\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$
 (4) $\cos 2x$ (d) $\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$
 (5) $\cos 15^\circ$ (e) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

एक शाब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए-
 डेयन माप और डिग्री माप में संबंध लिखिए।
 क डिग्री में कितने मिनट होते हैं।
 गण को परिभाषित कीजिए।

(1) π रेडियन = 180 डिग्री, (2) 60, (3) एक कोण प है जो एक किरण के उसके प्राथमिक बिन्दु के घुमने पर बनता है।

सत्य/असत्य लिखिए-
 क कोण वह माप है जो एक किरण के उसके प्राथमिक क बिन्दु घुमने पर बनता है।
 क पूर्ण परिक्रमण का 180वां भाग एक डिग्री कहलाता है।
 नाई वृत्त के केंद्र पर एक इकाई लंबाई के चाप द्वारा लण को एक रेडियन कहते हैं।

डेयन माप = $\frac{180}{\pi}$ डिग्री माप
 एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या r है, चाप की लंबाई l तथा

अंकित कोण θ रेडियन है, तो $\theta = \frac{l}{r}$
 (1) सत्य, (2) असत्य, (3) सत्य, (4) सत्य, (5) सत्य।
 40° 20' को रेडियन माप में बदलिये।

मान लें कि $180^\circ = \pi$ रेडियन
 $40^\circ 20' = 40 \frac{1}{3}$ डिग्री = $\frac{\pi}{180} \times \frac{121}{3}$ रेडियन
 $= \frac{121\pi}{540}$ रेडियन

$40^\circ 20' = \frac{121\pi}{540}$ रेडियन
 $40^\circ 20' = \frac{121\pi}{540}$ रेडियन

6 रेडियन को डिग्री माप में बदलिये।
 मान लें कि π रेडियन = 180°

1. रेडियन = $\frac{180}{\pi} \times 6$ डिग्री = $\frac{1080 \times 6}{\pi}$ डिग्री
 $143 \frac{7}{11}$ डिग्री = $343^\circ + \frac{7 \times 60}{11}$ मिनिट
 [क्योंकि $10^\circ = 60'$]

$143^\circ + 38' + \frac{2}{11}$ मिनिट
 $143^\circ + 38' + 10.9'' = 343^\circ 38' 11''$ निकटतम
 6 रेडियन = $343^\circ 38' 11''$ निकटतम उत्तर
 25° को रेडियन माप में बदलिये।

$25^\circ \times \frac{\pi}{180}$ रेडियन = $\frac{5\pi}{36}$ रेडियन
 5π रेडियन $l = \frac{5\pi}{36} \times r$ रेडियन
 5π रेडियन $l = \frac{5\pi}{36} \times r$ रेडियन

प्रश्न 9. $\frac{11}{16}$ रेडियन को डिग्री माप में बदलिये।

हल- $\left(\frac{11}{16}\right)^\circ = \left(\frac{11 \times 180}{16 \times \pi}\right)^\circ = \left(\frac{11 \times 90 \times 7}{8 \times 22 \times \pi}\right)^\circ = \left(\frac{45 \times 7^\circ}{8 \pi}\right)^\circ$
 $\left[\because 1^\circ = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \right]$

$= \left(\frac{315}{8}\right)^\circ = 39^\circ + \left(\frac{3}{8}\right)^\circ = 39^\circ + \frac{3}{8} \times 60'$
 $= 39^\circ + \left(\frac{45}{2}\right)'$ $(\because 1^\circ = 60')$
 $= 39^\circ + 22' + \frac{1}{2}'$
 $= 39^\circ 22' + \frac{1 \times 60''}{2} = 39^\circ 22' 30''$ $(\because 1'' = 60'')$

प्रश्न 10. $\sin 15^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।
 हल- (a) $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$
 $= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$
 $= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$ उत्तर

प्रश्न 11. $\sin 75^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।
 हल- (1) $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$
 $= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$
 $= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$ उत्तर

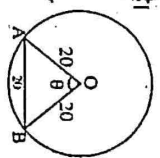
प्रश्न 12. $\tan 15^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।
 हल- $\tan 15^\circ = \tan(60^\circ - 45^\circ)$
 $= \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ}$
 $= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$
 $= \frac{(\sqrt{3} - 1)(1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{1 - 3 - \sqrt{3} + \sqrt{3}}{1 - 3} = \frac{-2}{-2} = 1$ उत्तर

प्रश्न 13. उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसमें 60° का केंद्रीय कोण परिधि पर 37.4 सेमी लंबाई का चाप काटता है ($\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग करें)।
 हल- यहाँ $l = 37.4$ सेमी तथा $\theta = 60^\circ = \frac{60\pi}{180}$ रेडियन = $\frac{\pi}{3}$

अतः $r = \frac{l}{\theta}$, से हम पाते हैं
 $r = \frac{37.4 \times 3}{\pi} = \frac{37.4 \times 3 \times 7}{22} = 35.7$ सेमी

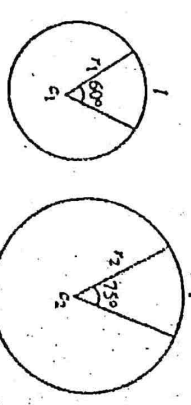
प्रश्न 14. एक घड़ी में मिनिट की सुई 1.5 सेमी लंबी है। इसकी नोक 40 मिनिट में कितनी दूर जा सकती है? ($\pi = 3.14$ का प्रयोग करें)।
 हल- 60 मिनिट में घड़ी की मिनिट वाली सुई एक परिक्रमण पूर्ण करती है, अतः 40 मिनिट में मिनिट की सुई एक परिक्रमण का $\frac{2}{3}$ भाग पूरा करती है। इसलिए
 $\theta = \frac{2}{3} \times 360^\circ$ या $\frac{4\pi}{3}$ रेडियन
 अतः तय की गई बाह्य त्रिज्या
 $l = r\theta = 1.5 \times \frac{4\pi}{3}$ सेमी = 2π सेमी
 $= 2 \times 3.14$ सेमी = 6.28 सेमी

प्रश्न 15. एक वृत्त, जिसका व्यास 40 सेमी है, की एक जीवा 20 सेमी लंबाई की है, तो इसके संगत छोटे चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए।
 हल- वृत्त की त्रिज्या = $OA = OB = \frac{40}{2} = 20$ सेमी, $AB = 20$ सेमी अतः OAB समबाहु त्रिभुज है।
 $\theta = \frac{l}{r}$
 $60^\circ = \frac{AB}{20}$
 $AB = 60^\circ \times 20 = 60 \times \frac{\pi}{180} \times 20$
 $= \frac{20\pi}{3}$ सेमी। उत्तर



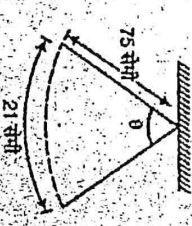
तथा $\theta_2 = 110^\circ = \frac{\pi}{180} \times 110 = \frac{22\pi}{36}$ रेडियन
 माना कि प्रत्येक चाप की लंबाई l है, तो $l = r\theta$, $\theta = r_1\theta_1$
 जिससे $\frac{13\pi}{36} \times r_1 = \frac{22\pi}{36} \times r_2$
 अर्थात् $\frac{r_1}{r_2} = \frac{22}{13}$ उत्तर

प्रश्न 18. यदि दो वृत्तों के समान लंबाई वाले चाप अपने केंद्रों पर क्रमशः 60° तथा 75° कोण बनाते हैं, उनकी त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।
 हल- $\theta = \frac{l}{r}$ सूत्र का प्रयोग करने पर,
 प्रथम वृत्त के लिए $60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{l}{r_1}$... (1)
 तथा द्वितीय वृत्त के लिए $75 \times \frac{\pi}{180} = \frac{l}{r_2}$... (2)



समी. (1) को समी. (2) से भाग करने पर,
 $\frac{60 \times \frac{\pi}{180}}{75 \times \frac{\pi}{180}} = \frac{l/r_1}{l/r_2}$
 $\frac{60}{75} = \frac{r_2}{r_1}$
 $\frac{4}{5} = \frac{r_2}{r_1}$ उत्तर

$r_1 : r_2 = 5 : 4$
 प्रश्न 19. 75 सेमी लंबाई वाले एक दोलायमान दोलक का एक सिरे से दूसरे सिरे तक दोलन करने से कोण बनता है, उसका माप रेडियन में ज्ञात कीजिए, जबकि उसके नोक द्वारा बनाए गए चाप की लंबाई 21 सेमी है।
 $\frac{21}{75} = \frac{l}{r}$ रेडियन
 $l = \frac{21}{75} \times r$ रेडियन



श्री. पी. एच. प्रश्न बैंक

20. सिद्ध कीजिए-

$$3 \sin \frac{\pi}{6} - \sec \frac{\pi}{3} = 4 \sin \frac{5\pi}{6} \cot \frac{\pi}{4} = 1$$

बायाँ पक्ष

$$3 \sin \frac{\pi}{6} - \sec \frac{\pi}{3} = 4 \sin \frac{5\pi}{6} \cot \frac{\pi}{6}$$

$$3 \times \frac{1}{2} \times 2 - 4 \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) \times 1 = 3 - 4 \sin \frac{\pi}{6}$$

$$3 - 4 \times \frac{1}{2} = 1 = \text{दायाँ पक्ष}$$

21. सिद्ध कीजिए-

$$\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3} - \tan^2 \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{सिद्ध करना है } \sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3} - \tan^2 \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{पक्ष} = \sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3} - \tan^2 \frac{\pi}{4}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 - (1)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1$$

$$= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} = \text{दायाँ पक्ष}$$

22. सिद्ध कीजिए कि-

$$\tan^2 \frac{\pi}{6} + \sec^2 \frac{7\pi}{6} - \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$$

$$\text{L.H.S.} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{6} + \sec^2 \frac{7\pi}{6} - \cos^2 \frac{\pi}{6}$$

$$2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \sec^2 \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) \times \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} + \sec^2 \left(\frac{\pi}{6} \right) \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{8}{16} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$$

23. $\tan \frac{13\pi}{12}$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\tan \frac{13\pi}{12} = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{12} \right) = \tan \frac{\pi}{12} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y}$$

प्रश्न 24. सिद्ध कीजिए-

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\sin x \cos y - \cos x \sin y}$$

बायाँ पक्ष = $\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}$

दायाँ पक्ष = $\frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\sin x \cos y - \cos x \sin y}$

अतः बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

प्रश्न 25. सिद्ध कीजिए कि-

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$

हल- L.H.S. = $\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan x}$

$$= \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$

R.H.S. = $\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

अतः बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

प्रश्न 26. सिद्ध कीजिए-

$$\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$$

हल- हम जानते हैं कि $3x = 2x + x$

$$\tan 3x = \tan(2x + x) = \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$$

$$\tan 3x - \tan 2x - \tan x = \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x} - \tan 2x - \tan x$$

$$= \frac{\tan 2x + \tan x - \tan 2x(1 - \tan 2x \tan x) - \tan x(1 - \tan 2x \tan x)}{1 - \tan 2x \tan x}$$

$$= \frac{\tan 2x + \tan x - \tan 2x + \tan 2x^2 \tan x - \tan x + \tan 2x \tan x^2}{1 - \tan 2x \tan x}$$

$$= \frac{\tan 2x^2 \tan x + \tan 2x \tan x^2}{1 - \tan 2x \tan x} = \tan 2x \tan x$$

प्रश्न 27. सिद्ध कीजिए $\frac{\cos 7x + \cos 5x}{\sin 7x - \sin 5x} = \cot x$

हल- सर्वसमिकाओं 20(i) तथा 20(iv) का उपयोग करते हुए, हम पाते हैं,

$$\frac{2 \cos \frac{7x+5x}{2} \cos \frac{7x-5x}{2}}{2 \cos \frac{7x+5x}{2} \sin \frac{7x-5x}{2}} = \frac{\cos 6x}{\sin x} = \cot x$$

बायाँ पक्ष = $\frac{2 \cos \frac{7x+5x}{2} \cos \frac{7x-5x}{2}}{2 \cos \frac{7x+5x}{2} \sin \frac{7x-5x}{2}}$

दायाँ पक्ष = $\frac{\cos 6x}{\sin x}$

अतः बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

प्रश्न 28. सिद्ध कीजिए कि-

$$\frac{\cos 9x - \cos 5x}{\sin 17x - \sin 3x} = \frac{\sin 2x}{\cos 10x}$$

हल- L.H.S. = $\frac{\cos 9x - \cos 5x}{\sin 17x - \sin 3x}$

$$= \frac{2 \sin \frac{9x+5x}{2} \sin \frac{9x-5x}{2}}{2 \cos \frac{17x+3x}{2} \sin \frac{17x-3x}{2}} = \frac{2 \sin 7x \sin 2x}{2 \cos 10x \sin 7x}$$

$$= \frac{\sin 2x}{\cos 10x} = \text{R.H.S.}$$

अतः बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

प्रश्न 29. सिद्ध कीजिए कि-

$$\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \tan 4x$$

हल- L.H.S. = $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x}$

$$= \frac{2 \sin \frac{5x+3x}{2} \cos \frac{5x-3x}{2}}{2 \cos \frac{5x+3x}{2} \cos \frac{5x-3x}{2}} = \frac{\sin 4x \cos 2x}{\cos 4x \cos 2x} = \tan 4x$$

R.H.S. = $\tan 4x$

अतः बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

प्रश्न 30. सिद्ध कीजिए $\frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan \frac{x-y}{2}$

हल- सिद्ध करना है

$$\frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan \frac{x-y}{2}$$

$$\frac{\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = \frac{\sin \frac{x-y}{2}}{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}$$

$$\frac{\sin \frac{x-y}{2}}{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = \frac{\sin \frac{x-y}{2}}{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}$$

$$\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x}$$

बायाँ पक्ष = $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x}$

दायाँ पक्ष = $\frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x}$

अतः बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

प्रश्न 32. यदि $\cos x = -\frac{3}{5}$ तो $\sin x$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल- क्योंकि $\cos x = -\frac{3}{5}$, हम पाते हैं कि $\sec x = -\frac{5}{3}$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{9}{25} \right) = \frac{16}{25}$$

$$\sin x = \pm \frac{4}{5}$$

चूँकि x द्वितीय चतुर्थांश में है, तो $\sin x$ का मान ऋणात्मक होगा। इसलिए

$$\sin x = -\frac{4}{5}$$

इससे यह भी प्राप्त होता है कि $\csc x = -\frac{5}{4}$

$$\tan x = -\frac{4}{3}$$

अतः, हम पाते हैं $\cot x = -\frac{3}{4}$

प्रश्न 33. $\cos x = -\frac{1}{2}$, x तीसरे चतुर्थांश में स्थित है, तो $\sin x$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल- $\cos x = -\frac{1}{2}$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4}$$

$$\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

चूँकि x तीसरे चतुर्थांश में स्थित है, अतः $\sin x < 0$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

अतः, हम पाते हैं कि $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4}$$

जी. पी. एच. प्रश्न बैंक

$$\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

तीव्र चतुर्थांश में $\sin x$ ऋणात्मक होता है, अतः हम यहाँ

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}, \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{-\sqrt{3}}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

34. $\sin x = \frac{3}{5}$, x दूसरे चतुर्थांश स्थित है, तो अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए।

$$\sin x = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\cos x = \pm \frac{4}{5}$$

तीव्र चतुर्थांश में $\cos x$ ऋणात्मक होता है, अतः हम यहाँ

$$\cos x = -\frac{4}{5} \Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{4}{3}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = -\frac{5}{4}, \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{5}{3}$$

35. यदि $\tan x = -\frac{5}{12}$ हो और x दूसरे चतुर्थांश में है, तो अन्य पाँच त्रिकोणमितीय फलनों को ज्ञात करें।

$$\tan x = -\frac{5}{12}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{12}{5}$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2 = \sec^2 x \Rightarrow 1 + \frac{25}{144} = \sec^2 x$$

$$\sec^2 x = \frac{144+25}{144} \Rightarrow \sec^2 x = \frac{169}{144}$$

$$\sec x = \pm \frac{13}{12}$$

$$\operatorname{cosec} x = \pm \frac{12}{13}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{\pm \frac{13}{12}} = \pm \frac{12}{13}$$

$$\sin x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1}{\pm \frac{12}{13}} = \pm \frac{13}{12}$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{169-144}{169}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{169}}} = \frac{5}{13}$$

$$\Rightarrow \sin x = \pm \frac{5}{13}$$

$$\therefore x \text{ द्वितीय चतुर्थांश में है इसलिए } \sin x \text{ धनात्मक होगा}$$

$$\therefore \sin x = \frac{5}{13}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{13}{5}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{\pm \frac{13}{12}} = \pm \frac{12}{13}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\pm \frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \pm \frac{12}{5}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{13}{5}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\pm \frac{12}{13}} = \pm \frac{13}{12}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\pm \frac{5}{13}}{\pm \frac{12}{13}} = \pm \frac{5}{12}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \pm \frac{12}{5}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\pm \frac{12}{13}} = \pm \frac{13}{12}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{13}{5}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{\pm \frac{13}{12}} = \pm \frac{12}{13}$$

$$\sin x = \frac{1}{\operatorname{cosec} x} = \frac{1}{\pm \frac{12}{13}} = \pm \frac{13}{12}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\pm \frac{13}{12}}{\pm \frac{12}{13}} = \pm \frac{169}{144}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \pm \frac{144}{169}$$

प्रश्न 38. सिद्ध कीजिए कि

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 4 \cos x \cos 2x \sin 4x$$

$$\text{हल- L.H.S.} = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$$

$$= \sin 7x + \sin x + \sin 5x + \sin 3x$$

$$= 2 \sin \frac{7x+x}{2} \cdot \cos \frac{7x-x}{2} + 2 \sin \frac{5x+3x}{2} \cdot \cos \frac{5x-3x}{2}$$

$$= 2 \sin 4x \cdot \cos 3x + 2 \sin 4x \cdot \cos x$$

$$= 2 \sin 4x [\cos 3x + \cos x]$$

$$= 2 \sin 4x \cdot 2 \cos \frac{3x+x}{2} \cdot \cos \frac{3x-x}{2}$$

$$= 4 \sin 4x \cos 2x \cos x$$

$$= 4 \cos x \cos 2x \sin 4x$$

$$= R.H.S.$$

प्रश्न 39. सिद्ध कीजिए कि $\cos 4x = 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x$

$$\text{हल- सिद्ध करना है } \cos 4x = 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2 (\sin 2x)^2 \text{ (सूत्र द्वारा)}$$

$$= 1 - 2 (2 \sin x \cos x)^2 = 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x = \text{दायाँ पक्ष}$$

$$\therefore \text{दायाँ पक्ष} = \text{दायाँ पक्ष}$$

$$\therefore \text{इति सिद्धम्}$$

प्रश्न 40. सिद्ध कीजिए-

$$\cos 2x \cos \frac{x}{2} - \cos 3x \cos \frac{9x}{2} = \sin 5x \sin \frac{5x}{2}$$

$$\text{हल- हम पाते हैं,}$$

$$\text{दायाँ पक्ष} = \frac{1}{2} [2 \cos 2x \cos \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{9x}{2} \cos 3x]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\cos \left(2x + \frac{x}{2} \right) + \cos \left(2x - \frac{x}{2} \right) - \cos \left(\frac{9x}{2} + 3x \right) - \cos \left(\frac{9x}{2} - 3x \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{15x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{15x}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[-2 \sin \left\{ \frac{5x + 15x}{2} \right\} \sin \left\{ \frac{5x - 15x}{2} \right\} \right]$$

$$= -\sin 5x \sin \left(-\frac{5x}{2} \right) = \sin 5x \sin \frac{5x}{2} = \text{दायाँ पक्ष}$$

$$\therefore \text{इति सिद्धम्}$$

BOARD OFFICIAL

अध्याय 5

सम्मिश्र संख्याएँ और द्विघात समीकरण

उत्तमिक प्रश्नावली

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिये-

(1) यदि $4x + i(3x - 7) = 3 + i(-6)$, जहाँ x और y वास्तविक संख्याएँ हैं, तब x और y के मान क्रमशः हैं:

(अ) $\frac{3}{4}$ और $\frac{33}{4}$ (ब) $\frac{-3}{4}$ और $\frac{-33}{4}$

(स) $\frac{-3}{4}$ और $\frac{33}{4}$ (द) $\frac{3}{4}$ और $\frac{-33}{4}$

(2) i^4 का मान होगा: (अ) 1 (ब) i

(स) $\sqrt{-1}$ (द) 0

(3) 3 - 4i का संयुग्मी है -

(अ) -3 + 4i (ब) 3 - 4i (स) -3 - 4i (द) 3 + 4i

(4) 2 - 3i का गुणात्मक प्रतिलोम है:

(अ) $\frac{2}{13} + \frac{2}{13}i$ (ब) $-\frac{2}{13} - \frac{2}{13}i$

(स) $\frac{2}{13} - \frac{2}{13}i$ (द) $-\frac{2}{13} + \frac{2}{13}i$

उत्तर- (1) (अ), (2) (ब), (3) (द), (4) (द).

प्रश्न 2. रिकत स्थानों को पूर्ण कीजिए-

(1) $-\sqrt{3} + i$ का मापांक होगा।

(2) $i^{4k} = \dots$

(3) $i^{4k+1} = \dots$

(4) सम्मिश्र संख्या $-2 - i$ का संयुग्मी होगा।

(5) $-i$ का गुणात्मक प्रतिलोम होगा।

उत्तर- (1) 2, (2) 1, (3) i , (4) $-2 + i$, (5) i .

जी. पी. एच. प्रश्न बैंक

न 3. सत्य/असत्य लिखिए-

- 1) $\sqrt{-1} = i$
- 2) $i^2 = -1$
- 3) $i = -i$
- 4) $i^4 = 1$

दो सम्मिश्र संख्याओं का योगफल एक सम्मिश्र संख्या है।

न- (1) सत्य, (2) सत्य, (3) सत्य, (4) सत्य, (5) सत्य,

न 4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए-

- 1) $z = -i$ का गुणात्मक प्रतिलोम क्या होगा?
- 2) $z = a + ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए।
- 3) $z = a + ib$ का संयुग्मी लिखिए।
- 4) $z = (1+i), (2) 0+i, (3) a-ib$.



न 5. (i) $(-\frac{1}{8})^3$ को $a + ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{र- (i)} \quad (-\frac{1}{8})^3 &= 2 \times \frac{1}{8 \times 8 \times 8} \times i^3 \\ &= \frac{1}{256} (i^3) i = \frac{1}{256} i \end{aligned}$$

न 6. $(-\sqrt{3} + \sqrt{-2})(2\sqrt{3} - i)$ को $a + ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{र- (i)} \quad & \text{प्रश्न 9. } \sqrt{5} + 3i \text{ का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।} \\ & \text{हल- मान } z = \sqrt{5} + 3i \\ & \text{इसका गुणात्मक प्रतिलोम है} \\ & \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{5} + 3i} = \frac{1}{\sqrt{5} + 3i} \times \frac{\sqrt{5} - 3i}{\sqrt{5} - 3i} \\ & = \frac{\sqrt{5} - 3i}{5 - 9i^2} = \frac{\sqrt{5} - 3i}{5 + 9} = \frac{\sqrt{5} - 3i}{14} \end{aligned}$$

न 10. $z = 4 - 3i$ का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल- मान } z = 4 - 3i \text{ का गुण प्रतिलोम } a + ib \text{ है, तब} \\ (4 - 3i) \times (a + ib) = 1 \\ a + ib = \frac{1}{4 - 3i} = \frac{4 + 3i}{(4 - 3i)(4 + 3i)} = \frac{4 + 3i}{16 + 9} \\ \Rightarrow a + ib = \frac{4 + 3i}{25} \end{aligned}$$

न 11. $-i$ का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल- मान } z = -i \\ \text{तब इसका गुणात्मक प्रतिलोम है} \\ \frac{1}{z} = \frac{1}{-i} = \frac{1 \times i}{-i \times i} = \frac{i}{-i^2} = \frac{i}{-(-1)} = -i \end{aligned}$$

उपर दिया गया सात हल निम्नलिखित ढंग से भी लिखा जा सकता है-

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{2 - 3i} = \frac{2 + 3i}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{2 + 3i}{2^2 - (3i)^2} \\ &= \frac{2 + 3i}{2^2 - 9(-1)} = \frac{2 + 3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i \end{aligned}$$

प्रश्न 9. $\sqrt{5} + 3i$ का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल- मान } z = \sqrt{5} + 3i \\ \text{इसका गुणात्मक प्रतिलोम है} \\ \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{5} + 3i} = \frac{1}{\sqrt{5} + 3i} \times \frac{\sqrt{5} - 3i}{\sqrt{5} - 3i} \\ = \frac{\sqrt{5} - 3i}{5 - 9i^2} = \frac{\sqrt{5} - 3i}{5 + 9} = \frac{\sqrt{5} - 3i}{14} \end{aligned}$$

प्रश्न 10. $z = 4 - 3i$ का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल- मान } z = 4 - 3i \text{ का गुण प्रतिलोम } a + ib \text{ है, तब} \\ (4 - 3i) \times (a + ib) = 1 \\ a + ib = \frac{1}{4 - 3i} = \frac{4 + 3i}{(4 - 3i)(4 + 3i)} = \frac{4 + 3i}{16 + 9} \\ \Rightarrow a + ib = \frac{4 + 3i}{25} \end{aligned}$$

प्रश्न 11. $-i$ का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल- मान } z = -i \\ \text{तब इसका गुणात्मक प्रतिलोम है} \\ \frac{1}{z} = \frac{1}{-i} = \frac{1 \times i}{-i \times i} = \frac{i}{-i^2} = \frac{i}{-(-1)} = -i \end{aligned}$$

प्रश्न 12. $\frac{1}{1+i}$ का मापक ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल-} \quad \frac{1}{1+i} &= \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1-i}{2} \\ \text{माप लीजिए } \frac{1}{2} &= r \cos \theta, -\frac{1}{2} = r \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{हल- मान } z &= \frac{1}{\sqrt{3} + i\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} + i\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} - i\sqrt{2}}{\sqrt{3} - i\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - i\sqrt{2}}{3 - (i\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{3} - i\sqrt{2}}{3 + 2} = \frac{\sqrt{3} - i\sqrt{2}}{5} \end{aligned}$$

माना (i) की तरह धम प्राप्त करते हैं,

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \theta = \frac{1}{2}, \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

प्रश्न 13. निम्नलिखित व्यंजक को $a + ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\frac{(3+i\sqrt{5})(3-i\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+i\sqrt{2})-(\sqrt{3}-i\sqrt{2})}$$

हल- मान $z = \frac{(3+i\sqrt{5})(3-i\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+i\sqrt{2})-(\sqrt{3}-i\sqrt{2})}$

$$\begin{aligned} &= \frac{(3)^2 - (i\sqrt{5})^2}{\sqrt{3} + i\sqrt{2} - \sqrt{3} + i\sqrt{2}} \\ &= \frac{9 - i^2 5}{2\sqrt{2}i} = \frac{9 + 5}{2\sqrt{2}i} = \frac{14}{2\sqrt{2}i} = \frac{7}{\sqrt{2}i} \times \frac{i}{i} = \frac{7i}{\sqrt{2}i^2} = \frac{7i}{\sqrt{2}(-1)} = -\frac{7i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{9 - i^2 5}{2\sqrt{2}i} &= \frac{9 + 5}{2\sqrt{2}i} = \frac{14}{2\sqrt{2}i} = \frac{7}{\sqrt{2}i} \times \frac{i}{i} = \frac{7i}{\sqrt{2}i^2} = \frac{7i}{\sqrt{2}(-1)} = -\frac{7i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\frac{5 + \sqrt{2}i}{1 - \sqrt{2}i} \text{ को } a + ib \text{ के रूप में व्यक्त कीजिए।}$$

प्रश्न 14. $\frac{5 + \sqrt{2}i}{1 - \sqrt{2}i}$ को $a + ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल- (i)} \quad \frac{5 + \sqrt{2}i}{1 - \sqrt{2}i} &= \frac{5 + \sqrt{2}i}{1 - \sqrt{2}i} \times \frac{1 + \sqrt{2}i}{1 + \sqrt{2}i} = \frac{5 + 5\sqrt{2}i + \sqrt{2}i - 2}{1 - (\sqrt{2}i)^2} \\ &= \frac{3 + 6\sqrt{2}i}{1 + 2} = \frac{3(1 + 2\sqrt{2}i)}{3} = 1 + 2\sqrt{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{हल-} \quad \left(\frac{1}{3} + 3i\right)^3 &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \times \frac{1}{3} \times 3i \left(\frac{1}{3} + 3i\right)^2 \\ &= \frac{1}{27} + 27i^3 + 3i \left(\frac{1}{3} + 3i\right) \\ &= \frac{1}{27} - 27i + 3i \times \frac{1}{3} + 3i \times 3i \\ &= \frac{1}{27} - 27i + i + 9i^2 \\ &= \frac{1}{27} - 27i + i - 9 = \frac{1 - 243 - 261i}{27} \end{aligned}$$

प्रश्न 15. $\left(\frac{1}{3} + 3i\right)^3$ को $a + ib$ रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल-} \quad \left(\frac{1}{3} + 3i\right)^3 &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \times \frac{1}{3} \times 3i \left(\frac{1}{3} + 3i\right)^2 \\ &= \frac{1}{27} + 27i^3 + 3i \left(\frac{1}{3} + 3i\right) \\ &= \frac{1}{27} - 27i + 3i \times \frac{1}{3} + 3i \times 3i \\ &= \frac{1}{27} - 27i + i + 9i^2 \\ &= \frac{1}{27} - 27i + i - 9 = \frac{1 - 243 - 261i}{27} \end{aligned}$$

प्रश्न 16. $(-2 - \frac{1}{3}i)^3$ को $a + ib$ रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल-} \quad (-2 - \frac{1}{3}i)^3 &= (-1)^3 \left(2 + \frac{1}{3}i\right)^3 \\ &= - \left[(2)^3 + \left(\frac{1}{3}i\right)^3 + 3 \times 2 \times \frac{1}{3}i \left(2 + \frac{1}{3}i\right)^2 \right] \\ &= - \left[8 + \frac{1}{27}i^3 + 2i \left(2 + \frac{1}{3}i\right)^2 \right] = - \left[8 - \frac{1}{27} + 4i + \frac{2}{3}i^2 \right] \end{aligned}$$

प्रश्न 17. $(5 - 3i)^2$ को $a + b i$ के रूप में व्यक्त करें।

$$\begin{aligned} \text{हल-} \quad (5 - 3i)^2 &= 5^2 - 3 \times 5^2 \times (3i) + 3 \times 5 (3i)^2 - (3i)^3 \\ &= 125 - 225i - 135 + 27i = -10 - 198i \end{aligned}$$

प्रश्न 18. $\left[i^{10} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25} \right]^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल-} \quad \left[i^{10} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25} \right]^3 &= \left[(i^2)^5 + \frac{1}{i^{25}} \right]^3 = \left[(i^2)^5 + \frac{1}{i^{24}} \right]^3 \\ &= \left[(-1)^5 + \frac{1}{i(i^{23})} \right]^3 = \left[-1 + \frac{1}{i^3} \right]^3 \\ &= \left[-1 + \frac{1}{-i} \right]^3 = \left[-1 - \frac{1}{i} \right]^3 \end{aligned}$$

$$\frac{1+i-2+8i}{(1-2)+i(1+8)} \times \frac{3-4i}{5+i}$$

$$\frac{1+i-2+8i}{-1+i} \times \frac{3-4i}{5+i}$$

$$\frac{1+i-2+8i}{-1+i} \times \frac{3-4i}{5+i}$$

$$\frac{-1+9i}{5-3i} \times \frac{3-4i}{5+i} = \frac{-3+4i+27i-36i^2}{25+5i-15i-3i^2}$$

$$\frac{-3+31i+36}{25-10i+3} = \frac{33+31i}{28+10i}$$

$$\frac{924+330i+868i+310i^2}{784-100i^2}$$

$$\frac{924+(330+868)i-310}{784-100}$$

$$\frac{614-1198i}{784-100} = \frac{307+i599}{684}$$

$$\frac{1+i}{1-i} \times \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{(1-i)(1+i)}$$

$$\frac{1+i-1-i}{1-i-1-i} = \frac{1+i^2-1-i^2}{1-i^2}$$

$$\frac{0}{1-i^2} = \frac{0}{1-(-1)} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\frac{1+i}{1-i} \times \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{(1-i)(1+i)}$$

$$\frac{1+i-1-i}{1-i-1-i} = \frac{1+i^2-1-i^2}{1-i^2}$$

$$\frac{0}{1-i^2} = \frac{0}{1-(-1)} = \frac{0}{2} = 0$$

$$2i = 0 + 2i \quad \therefore (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$[यदि (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab]$$

$$1 = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

1. समीकरण $x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ को हल कीजिए।

हल- दिया है, $x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

उपर्युक्त समीकरण को तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = 1, c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{4}{\sqrt{2}} < 0$$

$$\therefore \sqrt{-1} = i$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 2\sqrt{2}}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$$

$$\frac{1+i-2+8i}{(1-2)+i(1+8)} \times \frac{3-4i}{5+i}$$

$$\frac{1+i-2+8i}{-1+i} \times \frac{3-4i}{5+i}$$

$$\frac{1+i-2+8i}{-1+i} \times \frac{3-4i}{5+i}$$

प्रश्न 22. समीकरण $x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$ को हल कीजिए।

हल- दिया है, $x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$

उपर्युक्त समीकरण से दोनों पक्षों में $\sqrt{2}$ से गुणा करने पर,

$$\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$$

समीकरण को तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = \sqrt{2}, b = 1, c = \sqrt{2}$$

$$D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1 - 4 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0$$

$$\therefore \sqrt{-1} = i$$

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$$

प्रश्न 23. समीकरण $3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$ को हल कीजिए।

हल- दिया है, $3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$

उपर्युक्त समीकरण को तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 3, b = -4, c = \frac{20}{3}$$

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 3 \times \frac{20}{3} = 16 - 80 = -64 < 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{64 - 4 \times 3 \times \frac{20}{3}}}{2 \times 3} = \frac{4 \pm 8i}{2 \times 3} = \frac{2(2 \pm 4i)}{2 \times 3} = \frac{2 \pm 4i}{3}$$

प्रश्न 24. समीकरण $x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$ को हल कीजिए।

हल- दिया है, $x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$

उपर्युक्त समीकरण को तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = -2, c = \frac{3}{2}$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times \frac{3}{2} = 4 - 6 = -2 < 0$$

$$\therefore \sqrt{-1} = i$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 - 2 \times 2 \times \frac{3}{2}}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm i\sqrt{2}}{2} = \frac{2 \pm i\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm i\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$$

प्रश्न 25. समीकरण $27x^2 - 10x + 1 = 0$ को हल कीजिए।

हल- दिया है, $27x^2 - 10x + 1 = 0$

उपर्युक्त समीकरण को तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 27, b = -10, c = 1$$

$$D = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 27 \times 1 = 100 - 108 = -8 < 0$$

$$\therefore \sqrt{-1} = i$$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{100 - 108}}{2 \times 27} = \frac{10 \pm 2\sqrt{2}i}{2 \times 27} = \frac{5 \pm \sqrt{2}i}{27}$$

प्रश्न 26. समीकरण $21x^2 - 28x + 10 = 0$ को हल कीजिए।

हल- दिया है, $21x^2 - 28x + 10 = 0$

उपर्युक्त समीकरण को तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 21, b = -28, c = 10$$

$$D = b^2 - 4ac = (-28)^2 - 4 \times 21 \times 10 = 784 - 840 = -56 < 0$$

$$x = \frac{-(-28) \pm \sqrt{784 - 840}}{2 \times 21} = \frac{28 \pm \sqrt{14} \times 4i}{2 \times 21}$$

$$= \frac{28 \pm 2\sqrt{14}i}{2 \times 21} = \frac{2\sqrt{14}i}{21}$$

प्रश्न 27. समीकरण $x^2 + x + 1 = 0$ को हल कीजिए।

हल- यहां $b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$

इसलिए, इसके हल $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ हैं।

प्रश्न 28. समीकरण $2x^2 + x + 1 = 0$ को हल कीजिए।

हल- दिया है, $2x^2 + x + 1 = 0$

उपर्युक्त समीकरण को तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 2, b = 1, c = 1$$

$$D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 - 8 = -7 < 0$$

$$\therefore \sqrt{-1} = i$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2 \times 2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$$

प्रश्न 29. समीकरण $x^2 + 3x + 9 = 0$ को हल कीजिए।

हल- दिया है, $x^2 + 3x + 9 = 0$

उपर्युक्त समीकरण को तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = 3, c = 9$$

$$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 9 = 9 - 36 = -27 < 0$$

$$\therefore \sqrt{-1} = i$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 36}}{2 \times 1} = \frac{-3 \pm i\sqrt{27}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm i\sqrt{9 \times 3}}{2} = \frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm i\sqrt{27}}{2} = \frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}$$

प्रश्न 30. समीकरण $-x^2 + x - 2 = 0$ को हल कीजिए।

हल- दिया है, $-x^2 + x - 2 = 0$

उपर्युक्त समीकरण को तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = -1, b = 1, c = -2$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)(-2)}}{2 \times (-1)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{-2}$$

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{-2}$$

प्रश्न 31. समीकरण $\sqrt{5}x^2 + x + \sqrt{5} = 0$ को हल कीजिए।

हल- समीकरण $\sqrt{5}x^2 + x + \sqrt{5} = 0$ को तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = \sqrt{5}, b = 1, c = \sqrt{5}$$

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 1 - 4 \times 5 = 1 - 20 = -19 < 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2 \times \sqrt{5}}$$

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{19}}{2\sqrt{5}}$$

प्रश्न 32. समीकरण $x^2 + 3x + 5 = 0$ को हल कीजिए।

हल- दिया है, $x^2 + 3x + 5 = 0$

उपर्युक्त समीकरण को तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करने पर,

$$a = 1, b = 3, c = 5$$

$$D = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 9 - 20 = -11 < 0$$

$$\therefore \sqrt{-1} = i$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 20}}{2 \times 1} = \frac{-3 \pm i\sqrt{11}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm i\sqrt{11}}{2}$$

प्रश्न 33. समीकरण $x^2 - x + 2 = 0$ को हल कीजिए।

हल- दिया है, $x^2 - x + 2 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

समीकरण को तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करते पर,

$$a = 1, b = -1, c = 2$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

$$\left\{ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} [\because \sqrt{-1} = i] \text{ तब}$$

34. समीकरण $\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$ को हल कीजिए

$$\text{दिया है, } \sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$$

समीकरण को तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करते पर,

$$a = \sqrt{2}, b = 1, c = \sqrt{2}$$

$$D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$$

$$= 1 - 4 \times 2 = 1 - 8 = -7 < 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2 \times \sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \quad (\because \sqrt{-1} = i)$$

35. समीकरण $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$ को हल कीजिए

$$\text{दिया है, } \sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$$

समीकरण को तुलना $ax^2 + bx + c = 0$ से करते पर,

$$a = \sqrt{3}, b = -\sqrt{2}, c = 3\sqrt{3}$$

$$D = b^2 - 4ac = (-\sqrt{2})^2 - 4 \times (\sqrt{3}) \times 3\sqrt{3}$$

$$= 2 - 4 \times 3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 2 - 12 \times 3$$

$$= 2 - 36 = -34 < 0$$

$$x = \frac{-(-\sqrt{2}) \pm \sqrt{-34}}{2 \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{34}}{2\sqrt{3}} \quad (\because \sqrt{-1} = i)$$

36. $(3-2i)(2+3i)$ का संयुग्मी ज्ञात कीजिए

$$\text{दिया है, } (3-2i)(2+3i) = 6+9i-4i+6$$

$$= \frac{12+5i}{4+3i} \times \frac{4-3i}{4-3i}$$

$$= \frac{48-36i+20i+15}{16+9} = \frac{63-16i}{25} = \frac{63}{25} - \frac{16}{25}i$$

संयुग्मी $(\frac{63}{25} - \frac{16}{25}i)$ का संयुग्मी, $\frac{63}{25} + \frac{16}{25}i$ है।

प्रश्न 37. यदि $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$, तो m का न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक मान ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल- } \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}\right)^m = 1 \Rightarrow \left(\frac{(1+i)^2}{1-i^2}\right)^m = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+i^2+2i}{1+1}\right)^m = 1,$$

$$[\because (a+bi)^2 = a^2 + b^2 + 2abi] \Rightarrow -1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1-1+2i}{2}\right)^m = 1 \Rightarrow 1^m = 1$$

$$\Rightarrow (\sqrt{-1})^m = 1, \quad [\because i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}]$$

$$\Rightarrow (-1)^{\frac{m}{2}} = (-1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2} = 2$$

$$\Rightarrow m = 4$$

अतः m का न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक मान 4 है।

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\text{हल- हमें प्राप्त है, } x + iy = \frac{a+ib}{a-ib} \quad \text{है तो, सिद्ध कीजिए कि}$$

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2}i$$

$$= \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2}i$$

$$\text{इस प्रकार } x - iy = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \frac{2ab}{a^2+b^2}i$$

$$\text{इस प्रकार}$$

$$x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = \frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} = 1$$

प्रश्न 39. यदि α और β भिन्न सम्मिश्र संख्याएँ हैं, जहाँ

$$|\beta| = 1, \text{ तब } \left| \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha\beta} \right| \text{ का मान ज्ञात कीजिए।}$$

$$\text{हल- } \left| \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha\beta} \right| = \left| \frac{(\beta-\alpha)\beta}{(1-\alpha\beta)\beta} \right| = \left| \frac{\beta-\alpha\beta}{\beta-\alpha\beta\beta} \right|$$

(क्यों कि β से गुणा करने पर)

$$= \left| \frac{(\beta-\alpha)\beta}{\beta-\alpha} \right| \quad (\because \beta\beta = |\beta|^2 = 1)$$

$$= \left| \frac{(\beta-\alpha)\beta}{\beta-\alpha} \right| = \left| \frac{\beta-\alpha}{1} \right| = |\beta-\alpha|$$

$$= \left| \frac{\beta-\alpha}{1} \right| = |\beta-\alpha|$$

$$= \left| \frac{\beta-\alpha}{1} \right| = |\beta-\alpha|$$

$$= \left| \frac{\beta-\alpha}{1} \right| = |\beta-\alpha|$$

$$= \left| \frac{\beta-\alpha}{1} \right| = |\beta-\alpha|$$

$$= \left| \frac{\beta-\alpha}{1} \right| = |\beta-\alpha|$$

$$= \left| \frac{\beta-\alpha}{1} \right| = |\beta-\alpha|$$

$$= \left| \frac{\beta-\alpha}{1} \right| = |\beta-\alpha|$$

$$= \left| \frac{\beta-\alpha}{1} \right| = |\beta-\alpha|$$

$$= \left| \frac{\beta-\alpha}{1} \right| = |\beta-\alpha|$$

$$= \left| \frac{\beta-\alpha}{1} \right| = |\beta-\alpha|$$

$$= \left| \frac{\beta-\alpha}{1} \right| = |\beta-\alpha|$$

$$= \left| \frac{\beta-\alpha}{1} \right| = |\beta-\alpha|$$

$$= \left| \frac{\beta-\alpha}{1} \right| = |\beta-\alpha|$$

$$= \left| \frac{\beta-\alpha}{1} \right| = |\beta-\alpha|$$

$$= \left| \frac{\beta-\alpha}{1} \right| = |\beta-\alpha|$$

$$= \left| \frac{\beta-\alpha}{1} \right| = |\beta-\alpha|$$

$$= \left| \frac{\beta-\alpha}{1} \right| = |\beta-\alpha|$$

$$= \left| \frac{\beta-\alpha}{1} \right| = |\beta-\alpha|$$

$$= \left| \frac{\beta-\alpha}{1} \right| = |\beta-\alpha|$$

$$= \left| \frac{\beta-\alpha}{1} \right| = |\beta-\alpha|$$

प्रश्न 45. सम्मिश्र संख्या $\frac{1+i}{1-i}$ का मापांक ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल- } \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1-1+2i}{1+1} = \frac{2i}{2} = i = 0+i$$

$$\text{अतः, } 0 = r \cos \theta, 1 = r \sin \theta$$

$$\text{दोनों ओर वर्ग करके जोड़ने हुए, हमें प्राप्त होता है, } r^2 = 1$$

$$\text{अर्थात्, } r = 1 \text{ तथा } \cos \theta = 0, \sin \theta = 1$$

$$\text{इसलिए, } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{अतः, } \frac{1+i}{1-i} \text{ का मापांक 1 है।}$$

प्रश्न 46. सम्मिश्र संख्या $\frac{1}{1+i}$ का मापांक ज्ञात कीजिए।

हल- देखें प्रश्न क्रमांक 12 का हल।

प्रश्न 47. θ का वास्तविक मान बताइए, जहाँ कि

$$\frac{3+2i \sin \theta}{1-2i \sin \theta} = \frac{(3+2i \sin \theta)(1+2i \sin \theta)}{(1-2i \sin \theta)(1+2i \sin \theta)}$$

$$= \frac{3+6i \sin \theta + 2i \sin \theta - 4 \sin^2 \theta}{1+4 \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{3-4 \sin^2 \theta + 8i \sin \theta}{1+4 \sin^2 \theta}$$

$$\text{इसलिए, } \frac{8 \sin \theta}{1+4 \sin^2 \theta} = 0 \text{ अर्थात्, } \sin \theta = 0$$

$$\text{अतः, } 0 = n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

प्रश्न 48. किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 और z_2 के लिए सिद्ध कीजिए-

$$\text{हल- माना } z_1 = a + ib \text{ और } z_2 = c + id$$

$$\Rightarrow \text{Re}(z_1 z_2) = \text{Re}(z_1) \text{Re}(z_2) - \text{Im}(z_1) \text{Im}(z_2)$$

$$\Rightarrow \text{Re}(z_1 z_2) = ac - bd$$

$$\Rightarrow \text{Re}(z_1 z_2) = ac - bd$$

$$\Rightarrow \text{Re}(z_1 z_2) = ac - bd$$

$$\Rightarrow \text{Re}(z_1 z_2) = ac - bd$$

1/ जी. पी. एच. प्रश्न बैंक

Re वास्तविक भाग तथा Im काल्पनिक भाग को निरूपित तो है।

न 49. यदि $x - iy = \sqrt{\frac{a-ib}{c-id}}$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$a^2 + b^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$$

$$x - iy = \sqrt{\frac{a-ib}{c-id}} = x + i(-y) = \sqrt{\frac{a-ib}{c-id}}$$

नो पक्षों का मापांक लेते पर,

$$|x + i(-y)| = \left| \sqrt{\frac{a-ib}{c-id}} \right|^2$$

$$\sqrt{x^2 + (-y)^2} = \left| \frac{a-ib}{c-id} \right|^2 \left(\because |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \left| \frac{a-ib}{c-id} \right|^2$$

नो पक्षों का वर्ग करते पर,

$$x^2 + y^2 = \left| \frac{a-ib}{c-id} \right|^2$$

$$x^2 + y^2 = \frac{|a-ib|^2}{|c-id|^2} \left(\because \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \right)$$

$$(x^2 + y^2) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} \left(\because |x - iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

$$(a^2 + b^2)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$$

$$\text{न 50. यदि } z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + i, \text{ तब } \left| \frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + 1} \right|$$

र मान ज्ञात कीजिए।

$$\left| \frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + 1} \right| = \left| \frac{2 - i + 1 + i + 1}{2 - i - (1 + i) + 1} \right|$$

$$\left(\because z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + i \right)$$

$$\left| \frac{4}{2 - i - 1 - i + 1} \right|$$

$$\left| \frac{4}{2 - 2i} \right| = \left| \frac{2}{1 - i} \right|$$

$$\frac{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} \left(\because |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(x+1)² तो सिद्ध कीजिए कि

$$a^2 + b^2 = \frac{(x+1)^2}{2x^2 + 1}$$

$$\text{हल- दिया है, } a + ib = \frac{(x+1)^2}{2x^2 + 1}$$

दोनों ओर मापांक लेते पर,

$$|a + ib| = \left| \frac{(x+1)^2}{2x^2 + 1} \right|$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|(x+1)^2|}{|2x^2 + 1|} = \frac{|x+1|^2}{2x^2 + 1}$$

$$\left[\because \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, |z_0| = |z|^n \text{ तथा } \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z) \right]$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2}{2x^2 + 1}$$

दोनों ओर वर्ग करते पर,

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{(x^2 + 1)^2}{(2x^2 + 1)^2}$$

प्रश्न 52. यदि $z_1 = 2 - i, z_2 = -2 + i, \operatorname{Re} \left(\frac{z_1 z_2}{z_1} \right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल- } \frac{z_1 z_2}{z_1} = \frac{(2 - i)(-2 + i)}{(2 - i)} = \frac{-(2 - i)(2 - i)}{(2 - i)}$$

$$\left(\because z_1 = 2 - i, z_2 = -2 + i \right)$$

$$\frac{-(2 - i)^2}{2 + i} = \frac{-(4 + i^2 - 4i)}{2 + i} = \frac{-(4 - 1 - 4i)}{2 + i}$$

$$\left(\because i^2 = -1 \right)$$

$$\frac{-(3 - 4i) \cdot 2 - i}{2 + i}$$

$$\frac{-(6 - 11i - 4i^2)}{(2 + i)^2} \left[\because (a + b)(a - b) = (a^2 - b^2) \right]$$

$$\frac{-(-6 - 11i - 4)}{4 - i^2}$$

$$\frac{-(-2 - 11i)}{4 + 1} \left(\because i^2 = -1 \right)$$

$$\frac{-\left(\frac{2 + 11i}{5} \right)}{5} = -\frac{2 + 11i}{5}$$

$$\therefore \operatorname{Re} \left(\frac{z_1 z_2}{z_1} \right) = -\frac{2}{5}$$

प्रश्न 53. यदि $z = z - i \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z\bar{z}} \right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल- } \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z\bar{z}} \right)$$

$$z\bar{z} = |z|^2 \Rightarrow z\bar{z} = |z|^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z\bar{z}} = \frac{1}{|z|^2} = \frac{1}{(\sqrt{4+1})^2} = \frac{1}{5} + 0i$$

$$\therefore \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z\bar{z}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow z - i \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z\bar{z}} \right) = z - i \cdot 0 = z$$

प्रश्न 54. यदि $(x - iy)(3 + 5i) = (-6 - 24i)$ की संयुग्मी है, तो वास्तविक संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए।

वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को तुलना करके, हम x तथा y के मान ज्ञात करेंगे।

$$\text{हल- } (x - iy)(3 + 5i) = 3x + 5xi - 3yi - 5y^2$$

$$= (3x + 5y) + i(5x - 3y) \quad \left(\because i^2 = -1 \right)$$

$$\Rightarrow (3x + 5y) + i(5x - 3y) = (-6 - 24i)$$

अब, दोनों पक्षों में वास्तविक व काल्पनिक भागों को तुलना करने पर, $3x + 5y = -6$

तथा $5x - 3y = 24$

अब, प्रतिस्थापन या विलोपन विधि के द्वारा उपरोक्त समीकरणों को हल करेंगे।

प्रश्न 55. यदि $(x + iy)^3 = u + iv$, तो दर्शाइए कि-

$$\text{हल- } (x + iy)^3 = u + iv \Rightarrow x^3 + (iy)^3 + 3x^2iy + 3xy^2i^2 + 3xy^2i^2 = u + iv$$

$$\Rightarrow x^3 - iy^3 + 3ix^2y - 3xy^2 = u + iv \left(\because i^3 = -i, i^2 = -1 \right)$$

$$\Rightarrow (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) = u + iv$$

अब, वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को तुलना करने पर,

$$x^3 - 3xy^2 = u \text{ तथा } 3x^2y - y^3 = v$$

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} = \frac{x^3 - 3xy^2}{x} + \frac{3x^2y - y^3}{y} = x^2 - 3y^2 + 3x^2 - 4y^2 = 4(x^2 - y^2)$$

इति सिद्धम्

प्रश्न 56. समीकरण $|1 - i|^x = 2^x$ के सन्ध्येतर पूर्णांक मूलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल- दिया है, } |1 - i|^x = 2^x$$

$$\Rightarrow (\sqrt{1^2 + (-1)^2})^x = 2^x \left(\because |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} \right)$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2})^x = 2^x \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2^x$$

दोनों पक्षों में 2 को घात की तुलना करने पर,

$$\frac{x}{2} = x \Rightarrow x = 2x \Rightarrow 2x - x = 0$$

परंतु हमें अशून्य हल की आवश्यकता है। अतः हलों की संख्या शून्य है।

अध्याय-6 शिखक असमिकाएँ



प्रश्न 1. रिकत स्थानों को पूर्ति कीजिए-

(1) x के उन मानों को जो दिए गए असमिका को एक सत्य कथन बनाते हैं, उन्हें असमिका का कहते हैं।

उत्तर- (1) हल, (2) असमिका।

प्रश्न 2. सत्य/असत्य लिखिए-

(1) $ax + by \leq c$ एक रैखक असमिका है।

(2) $ax + by < c$ एक सुनिश्चित असमिका है।

उत्तर- (1) सत्य, (2) सत्य।

प्रश्न 3. $30x < 200$, को हल ज्ञात कीजिए जब-

(i) x एक प्राकृत संख्या है।

(ii) x एक पूर्णांक है।

हल- ज्ञात है कि $30x < 200$

अथवा $\frac{30x}{30} < \frac{200}{30}$ (नियम 2)

अथवा $x < \frac{20}{3}$

(i) जब x एक प्राकृत संख्या है।
स्पष्टतः इस स्थिति में x के निम्नलिखित मान कथन को सत्य करते हैं।
 $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
असमिका का हल समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ है।
(ii) जब x एक पूर्णांक है।
स्पष्टतः इस स्थिति में दिए गए असमिका के हल हैं:

जी. पी. एच. प्रश्न बैंक

..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
जहाँ का हल समुच्चय {... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

5. 6) है
4. हल कीजिए $24x < 100$, जब एक प्राकृत संख्या है।

x एक पूर्णांक है।
दिया है, $24x < 100$
पक्षों में 24 से भाग करने पर,
 $\frac{24x}{24} < \frac{100}{24}$ (विषय 2 से)

$$x < \frac{100}{24} \Rightarrow x < \frac{25}{6}$$

(अर्थात् $x, 4 \frac{1}{6}$ से छोटा है)

जब x एक प्राकृतिक संख्या (केवल धनात्मक पूर्णांक) है स्थिति में, असमिका का हल समुच्चय $\{1, 2, 3, 4\}$ है। जब x एक पूर्णांक है, तब दो हुई असमिका का हल क्षेत्र $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ है।

5. हल कीजिए: $5x - 3 < 3x + 1$, जब x एक पूर्णांक है। (ii) एक वास्तविक संख्या है।

दिया है, कि $5x - 3 < 3x + 1$
अर्थात् $5x - 3 + 3 < 3x + 1 + 3$ (विषय 1)

अथवा $5x < 3x + 4$ (विषय 1)

अर्थात् $2x < 4$ (विषय 1)

अर्थात् $x < 2$ (विषय 2)

जहाँ एक पूर्णांक है। इस स्थिति में दिए गए असमिका का हल $\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1$

हल समुच्चय $\{\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$

जब x एक वास्तविक संख्या है। इस स्थिति में असमिका का हल $x < 2$ से व्यक्त है। इसका अर्थ है कि 2 से छोटी वास्तविक संख्याएँ असमिका को हल हैं। अतः असमिका का हल समुच्चय $(-\infty, 2)$ है।

असमिकाओं के हल प्राकृत संख्याओं, पूर्णाकों तथा वास्तविक संख्याओं के समुच्चयों पर विचार करके ज्ञात किए गए। जब तक अभ्यास वर्णित न हो, हम इस अभ्यास में संकेतों का हल वास्तविक संख्याओं से समुच्चय में ही करेंगे।

6. हल कीजिए $-12x > 30$, जब x एक प्राकृत संख्या है।

हल- दिया है, $12x > 30$, दोनों पक्षों में -12 से भाग करने पर,

$$\frac{-12x}{-12} < \frac{30}{-12}$$

$$x < -\frac{5}{2}$$

(i) जब x एक प्राकृतिक संख्या है, तब दो हुई असमिका का कोई हल नहीं है। चूँकि प्राकृतिक संख्याएँ धनात्मक संख्याएँ होती हैं तथा यहाँ पर कोई भी धनात्मक संख्या नहीं है, जो कि ऋणात्मक संख्या से छोटी है।

(ii) जब x एक पूर्णांक है, तब दो हुई असमिका का हल समुच्चय $\{\dots -4, -3\}$ है, यहाँ पर $-\frac{5}{2}$ से छोटी अनंत संख्याएँ हैं।

प्रश्न 7. हल कीजिए $3x + 8 < 2$, जब x एक वास्तविक संख्या है। (i) x एक पूर्णांक है। (ii) x एक वास्तविक संख्या है।

हल- दिया है, $3x + 8 < 2$
दोनों पक्षों में -8 जोड़ने पर,
 $3x + 8 - 8 < 2 - 8$
 $3x > -6$
 $x > -2$ (विषय 1 से)

दोनों पक्षों में 3 से भाग करने पर,
 $\frac{3x}{3} > \frac{-6}{3}$
 $x > -2$ (विषय 2 से)

(i) जब x एक पूर्णांक है, तब दो हुई असमिका का हल समुच्चय $\{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ है।

(ii) जब x एक वास्तविक संख्या है, तब दो हुई असमिका का हल समुच्चय $(-\infty, 2)$ है अर्थात् सभी संख्याएँ $-\infty$ तथा 2 के मध्य विचलन वाली हैं। परंतु ∞ तथा 2 (स्वयं) के मध्य की संख्याएँ सम्मिलित नहीं हैं, अतः हल $x < 2$ है।

प्रश्न 8. हल कीजिए $-4x + 3 < 5x + 7$

हल- दिया है, $-4x + 3 < 5x + 7$
दोनों पक्षों में 4x जोड़ने पर,
 $-4x + 3 + 4x < 5x + 7 + 4x$
 $3 < 9x + 7$
 $3 - 7 < 9x + 7 - 7$
 $-4 < 9x$
 $-\frac{4}{9} < x$

अतः हल $x > -\frac{4}{9}$ है।

अतः हल $x > -\frac{4}{9}$ है।

अतः हल $x > -\frac{4}{9}$ है।

अतः हल $x > -\frac{4}{9}$ है।

अतः हल $x > -\frac{4}{9}$ है।

प्रश्न 9. हल कीजिए $-3x - 7 > 5x - 1$

हल- दिया है, $-3x - 7 > 5x - 1$
दोनों पक्षों में 3x जोड़ने पर,
 $-3x - 7 + 3x > 5x - 1 + 3x$
 $-7 > 8x - 1$
 $-7 + 1 > 8x - 1 + 1$
 $-6 > 8x$
 $-\frac{6}{8} > x$
 $-\frac{3}{4} > x$

अतः हल $x < -\frac{3}{4}$ है।

अतः हल $x < -\frac{3}{4}$ है।

अतः हल $x < -\frac{3}{4}$ है।

अतः हल $x < -\frac{3}{4}$ है।

अतः हल $x < -\frac{3}{4}$ है।

अतः हल $x < -\frac{3}{4}$ है।

अतः हल $x < -\frac{3}{4}$ है।

अतः हल $x < -\frac{3}{4}$ है।

अतः हल $x < -\frac{3}{4}$ है।

अतः हल $x < -\frac{3}{4}$ है।

अतः हल $x < -\frac{3}{4}$ है।

अतः हल $x < -\frac{3}{4}$ है।

अतः हल $x < -\frac{3}{4}$ है।

अतः हल $x < -\frac{3}{4}$ है।

अतः हल $x < -\frac{3}{4}$ है।

अतः हल $x < -\frac{3}{4}$ है।

अतः हल $x < -\frac{3}{4}$ है।

28/ जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

हमें ज्ञात कि $-8 \leq 5x - 3 < 7$
 $-5 \leq 5x + 10$ या $-1 \leq x < 2$

प्रश्न 16. हल कीजिए- $\frac{5-2x}{3} \leq \frac{x}{6} - 5$

हल- $\frac{5-2x}{3} \leq \frac{x}{6} - 5$
 $\Rightarrow 2(5-2x) \leq x-30$
 $\Rightarrow 10-4x \leq x-30$
 $\Rightarrow -5x \leq -40, i.e., x \geq 8$

इस प्रकार, सभी वास्तविक संख्याएँ जो 8 से अधिक हैं या बराबर हैं, दो गई असमिका का हल हैं, अर्थात् $x \in [8, \infty)$

प्रश्न 17. वास्तविक संख्या x के लिए हल कीजिए:
 $\frac{x}{4} < \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$

हल- दिया है, $\frac{x}{4} > \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$

$\Rightarrow \frac{x}{4} < \frac{5(5x-2) - 3(7x-3)}{15}$

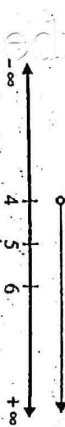
$\Rightarrow 15x < 4 [(25x - 10) - (21x - 9)]$

$\Rightarrow 15x < 4 (25x - 10 - 21x + 9)$

$\Rightarrow 15x < 16x - 4$

पर, $16x$ को बाईं ओर स्थानांतरित करने पर,
 $15x - 16x < -4$
 $-x < -4$

दोनों पक्षों में (-1) से गुणा करने पर,
 $x > 4$



∴ हल समुच्चय = $(4, \infty)$

प्रश्न 18. हल कीजिए $\frac{3x-4}{2} \geq \frac{x+1}{4} - 1$ तथा इस हल को संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए।

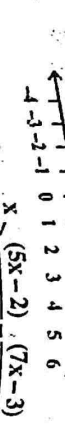
हल- $\frac{3x-4}{2} \geq \frac{x+1}{4} - 1$

या $\frac{3x-4}{2} \geq \frac{x-3}{4}$

या $2(3x-4) \geq (x-3)$

या $6x-8 \geq x-3$
 $5x \geq 5$ or $x \geq 1$

संख्या रेखा पर इन्हें हम निम्नलिखित प्रकार से प्रदर्शित कर सकते हैं (आकृति):



प्रश्न 19. हल कीजिए- $\frac{x}{2} \geq \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$ तथा इस हल को संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए।

हल- दिया है, $\frac{x}{2} \geq \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$

दोनों पक्षों में लघुगुण लेने पर,
 $\frac{x}{2} \geq \frac{5(5x-2) - 3(7x-3)}{15}$

$\Rightarrow \frac{x}{2} \geq \frac{(25x-10) - (21x-9)}{15}$

$\Rightarrow \frac{x}{2} \geq \frac{2(4x-1)}{15}$

पर $8x$ को बाईं ओर स्थानांतरित करने पर,
 $15x - 8x \geq -2 \Rightarrow 7x \geq -2$

$\Rightarrow \frac{7x}{7} \geq \frac{-2}{7}$

$\Rightarrow x \geq -\frac{2}{7}$



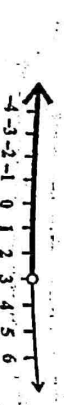
∴ समुच्चय हल = $[-\frac{2}{7}, \infty)$

प्रश्न 20. हल कीजिए $7x+3 < 5x+9$ तथा इस हल को संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए।

हल- हमें ज्ञात है $7x+3 < 5x+9$

या $2x < 6$ या $x < 3$

संख्या रेखा पर इन्हें हम निम्नलिखित प्रकार से प्रदर्शित कर सकते हैं (आकृति):



प्रश्न 21. कक्षा XI के प्रथम सत्र व द्वितीय सत्र की परीक्षाओं में एक छात्र के प्राप्तांक 62 और 48 हैं। वह न्यूनतम अंक प्राप्त करके सुनिश्चित करने चाहता है कि उसके प्रदर्शन में सुधार हो सके।

हल- मान लीजिए कि छात्र वार्षिक परीक्षा में x अंक प्राप्त करता है।

तब $\frac{62+48+x}{3} \geq 60$

या $110+x \geq 180$ या $x \geq 70$

इस प्रकार उस छात्र को वार्षिक परीक्षा में न्यूनतम 70 अंक प्राप्त करने चाहिए।

प्रश्न 22. रवि ने पहली दो एकक परीक्षा में 70 और 75 अंक प्राप्त किए हैं। वह न्यूनतम अंक प्राप्त कीजिए, जिसे वह तीसरी एकक परीक्षा में पाकर 60 अंक का न्यूनतम औसत प्राप्त कर सके।

हल- मान लीजिए रवि तीसरी एकक परीक्षा में x अंक प्राप्त करता है।

∴ रवि द्वारा प्राप्त औसत अंक

$= \frac{\text{सभी परीक्षाओं में अंकों का योग}}{\text{परीक्षाओं की संख्या}}$

$= \frac{70+75+x}{3} = \frac{145+x}{3}$

अब, यह दिया है कि वह कम-से-कम 60 अंकों का औसत प्राप्त करना चाहता है। कम-से-कम 60 अंकों का अर्थ है कि

अंक $\frac{145+x}{3} \geq 60$

$\Rightarrow 145+x \geq 60 \times 3$

$\Rightarrow 145+x \geq 180$

अब, पर 145 को दाईं ओर स्थानांतरित करने पर,
 $x \geq 180 - 145 \Rightarrow x \geq 35$

अर्थात् रवि को तीसरी एकक परीक्षा में कम-से-कम 60 अंकों का औसत प्राप्त करने के लिए 35 के बराबर या उससे बड़े अंक प्राप्त करने चाहिए।

प्रश्न 23. किसी पाठ्यक्रम में ग्रेड 'A' पाने के लिए एक व्यक्ति को सभी पाँच परीक्षाओं (प्रत्येक 100 में से) में 90 अंक या अधिक अंक का औसत प्राप्त करना चाहिए। यदि

सुनीता के प्रथम चार परीक्षाओं के प्राप्तांक 87, 92, 94 और 95 हैं, तो वह न्यूनतम अंक प्राप्त कीजिए जिसे पाँचवीं परीक्षा में प्राप्त करके सुनीता उस पाठ्यक्रम में ग्रेड 'A' पाएगी।

हल- मान लीजिए सुनीता पाँचवीं परीक्षा में x अंक प्राप्त करती है।

∴ सुनीता द्वारा प्राप्त औसत अंक

$= \frac{\text{सभी परीक्षाओं में अंकों का योग}}{\text{परीक्षाओं की संख्या}}$

$= \frac{87+92+94+95+x}{5} = \frac{368+x}{5}$

अब, यह दिया है कि सुनीता ग्रेड 'A' प्राप्त करना चाहती है

जिसके लिए उसके औसत अंक 90 से अधिक या बराबर होने चाहिए।

अर्थात् $\frac{368+x}{5} \geq 90 \Rightarrow 368+x \geq 450$

पर 368 को दाईं पक्ष में स्थानांतरित करने पर,
 $x \geq 450 - 368$
 $x \geq 82$

अर्थात् सुनीता को ग्रेड 'A' प्राप्त करने के लिए पाँचवीं में 82 अंक से अधिक या बराबर अंक प्राप्त करने चाहिए।

प्रश्न 24. क्रमागत विषम संख्याओं के ऐसे युग्म ज्ञात कीजिए, जिनमें दोनों संख्याएँ 10 से बड़ी हों, और उनका योगफल 40 से कम हों।

हल- मान लिया कि दो क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं में छोटी विषम संख्या x है। इस प्रकार दूसरी विषम संख्या x+2 है।

प्रश्नानुसार, $x > 10$

तथा $x + (x+2) < 40$

(2) को हल करने पर,
 $2x+2 < 40$
 $x < 19$

या (1) और (3) से निकलते हैं कि $10 < x < 19$

इस प्रकार विषम संख्या x के अभीष्ट मान 10 और 19 के बीच हैं। इसलिए सभी संभव अभीष्ट जोड़े (11,13), (13,15), (15,17), (17,19) होंगे।

प्रश्न 25. 10 से कम क्रमागत विषम संख्याओं के ऐसे युग्म ज्ञात कीजिए जिनके योगफल 11 से अधिक हों।

हल- मान लीजिए संख्याएँ 2x+1 तथा 2x+3 हैं। तब प्रश्नानुसार,

$2x+1 < 10$ तथा $2x+3 < 10$

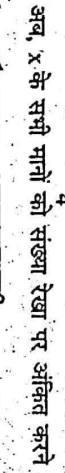
$\Rightarrow 2x < 9$ तथा $2x < 7$

$\Rightarrow x < \frac{9}{2}$ तथा $2x < \frac{7}{2}$

और $2x+3+2x+1 > 11$

$\Rightarrow 4x+4 > 11$
 $4x > 11-4$
 $x > \frac{7}{4}$

अब, x के सभी मानों को संख्या रेखा पर अंकित करने पर,



फ से, यह स्पष्ट है कि $x \in \left(\frac{7}{4}, \frac{7}{2}\right)$ जिसमें पूर्णांक मान

= 2 तथा 3 है।

व $x = 3$, तब संख्याएँ $(2 \times 3 + 1, 2 \times 3 + 3) = (7, 9)$

तब $x = 2$, तब संख्याएँ $(2 \times 2 + 1, 2 \times 2 + 3) = (5, 7)$

आवश्यक युग्म $(5, 7)$ तथा $(7, 9)$ है।
 ल 26. क्रमागत सम संख्याओं के ऐसे युग्म ज्ञात कीजिए, जिनमें से प्रत्येक 5 से बड़े हों तथा उनका योगफल 23 से कम हो।

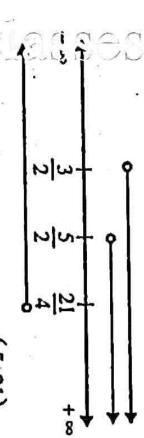
न-मान लीजिए संख्याएँ $2x$ तथा $2x + 2$ हैं।
 प्रश्नानुसार,

$x > 5 \Rightarrow x > \frac{5}{2}$ तथा $2x + 2 > 5 \Rightarrow 2x > 5 - 2$

$2x > 3 \Rightarrow x > 3/2$
 $2x + 2x + 2 < 23 \Rightarrow 4x < 23 - 2$

$4x < 21 \Rightarrow x < \frac{21}{4}$

इ, सभी मानों को संख्या रेखा पर अंकित करेंगे।



लेकर ग्राफ से, यह स्पष्ट है कि $x \in \left(\frac{5}{2}, \frac{21}{4}\right)$, जिसमें

तीकें यान $x = 3, 4, 5$ हैं।

$1 \times 3 = 3$, तब युग्म $(2 \times 3, 2 \times 3 + 2) = (6, 8)$ है।

$1 \times 4 = 4$, तब युग्म $(2 \times 4, 2 \times 4 + 2) = (8, 10)$ है।

$1 \times 5 = 5$, तब युग्म $(2 \times 5, 2 \times 5 + 2) = (10, 12)$ है।

अतः आवश्यक युग्म $(6, 8)$, $(8, 10)$ $(10, 12)$ हैं।

ल 27. एक विलयन को 68°F तथा 77°F के मध्य रखना सौलस्यवस पैमाने पर विलयन के तापमान का परिमर तः कीजिए, जहाँ सौलस्यवस फारेनहाइट परिवर्तन सूत्र $F = \frac{9}{5}C + 32$ है।

$F = 68^\circ$ है, $68^\circ < F < 77^\circ$
 $F = \frac{9}{5}C + 32$ रखने पर,
 $68 < \frac{9}{5}C + 32 < 77$

क 4द से- 32 जोड़ने पर,
 $68^\circ - 32 < \frac{9}{5}C + 32 - 32 < 77^\circ - 32$ (नियम 1 से)

$36^\circ < \frac{9}{5}C < 45^\circ$

प्रत्येक पद में $\left(\frac{5}{9}\right)$ से गुणा करने पर,

$36^\circ \times \frac{5}{9} < \frac{9}{5}C \times \frac{5}{9} < 45^\circ \times \frac{5}{9}$ (नियम 2 से)

$40^\circ \times 5 < C < 5^\circ \times 5$
 $20^\circ < C < 25^\circ$

अर्थात् $C \in (20, 25)$

अतः शिमी सौलस्यवस से तापमान 20°C तथा 25°C के छोड़कर, 20°C तथा 25°C के मध्य विचरण करता है।

प्रश्न 28. एक व्यक्ति के बौद्धिक-संख्या (IQ) मान का सूत्र निम्नलिखित है

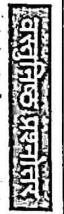
$IQ = \frac{MA}{CA} \times 100$

जहाँ MA मानसिक आयु और CA कालानुक्रमी आयु है। यदि 12 वर्ष की आयु के बच्चों के एक समूह की IQ अंशिका $80 \leq IQ \leq 140$ द्वारा व्यक्त हो, तो उस समूह के बच्चों की मानसिक आयु का परिमर ज्ञात कीजिए।

हल- दिया है कि, $80 \leq IQ \leq 140$
 सभी (i) में $IQ = \frac{MA}{CA} \times 100$ रखने पर,
 $80 \leq \frac{MA}{CA} \times 100 \leq 140$
 $80 \leq \frac{MA}{CA} \times 100 \leq 140$
 $80 \leq \frac{MA}{12} \times 100 \leq 140$
 $80 \times 12 \leq MA \times 100 \leq 140 \times 12$
 $960 \leq MA \times 100 \leq 1680$
 प्रत्येक पद में 100 द्वारा भाग करने पर,
 $9.6 \leq MA \leq 16.8 \Rightarrow MA \in [9.6, 16.8]$
 अतः मानसिक आयु 9.6 से अधिक तथा बराबर पर्यंत से कम होनी चाहिए।

अध्याय-7

क्रमचय एवं संवय



प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिये-

- (1) ${}^{12}P_2$ का मान होगा- (स) 12 (द) 1880
- (अ) 132 (ब) 1320
- (2) nP_0 का मान होगा- (स) 2 (द) n
- (अ) 0 (ब) 1
- (3) nP_n का मान होगा- (स) 2 (द) n!
- (अ) 0 (ब) 1
- (4) 0! का मान होगा- (स) 2 (द) n
- (अ) 0 (ब) 1
- (5) nC_0 का मान होगा- (स) 2 (द) n
- (अ) 0 (ब) 1
- (6) nC_n का मान होगा- (स) 2 (द) n
- (अ) 0 (ब) 1
- (7) अंकों 1, 2, 3, 4, 5 से किन्तनी 2 अंकीय संख्याएँ बना सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति की जा सकती है। (स) 16 (द) 20
- (अ) 25 (ब) 10
- (8) 5! का मान होगा- (स) 16 (द) 20
- (अ) 5 (ब) 120
- (9) यदि ${}^5P_r = 65$ है तो r का मान होगा- (स) 4 (द) 5
- (अ) 3 (ब) 8
- (10) nP_r का मान है- (ब) $\frac{(n-r)!}{r!n!}$ (द) इनमें से कोई नहीं
- (स) $\frac{n!}{r!(n-r)!}$
- (11) ${}^{10}C_r = {}^{10}C_{r+4}$ तो r का मान होगा- (स) 4 (द) 5
- (अ) 3 (ब) 8
- (12) यदि $(n+2)P_1 = 20n!$ है तो n का मान होगा- (स) 6 (द) 5
- (अ) -6 (ब) 2
- (13) ${}^nC_r + {}^nC_{r-1}$ का मान होगा (स) ${}^{n+1}C_r$ (द) ${}^{n+1}C_{r+1}$
- (अ) ${}^nC_{r-1}$ (स) ${}^{n+1}C_r$ (स) nC_r (द) ${}^{n+1}C_{r+1}$
- उत्तर- 1.(अ), 2.(ब), 3.(द), 4.(ब), 5.(ब), 6.(ब), 7.(अ), 8.(ब), 9.(अ), 10.(स), 11.(अ), 12.(ब), 13.(ब)।

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

- (1) यदि ${}^nC_{12} = {}^nC_8$ तो $n = \dots$
- (2) $0! = \dots$
- (3) $\frac{7!}{5!} = \dots$

(4) n विन्न वस्तुओं में सभी वस्तुओं को लेकर बनाये गए क्रमचयों की संख्या होगा।

(5) n विन्न वस्तुओं में से कोई भी वस्तु न लेकर बने क्रमचयों की संख्या है।

(6) n विन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को लेकर बनाए गए क्रमचयों की संख्या से प्रदर्शित की जाती है।

(7) n विन्न वस्तुओं में से एक समय में r वस्तुओं को लेकर बने क्रमचयों की संख्या, जबकि वस्तुओं के पुनरावृत्ति की अनुमति हो, होती है।

(8) ${}^nC_9 = {}^nC_8$ है तो nC_r का मान होगा।

(9) n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r वस्तुओं को लेकर बने वाले संचयों की संख्या को से प्रकट करते हैं।

(10) 5P_2 का मान है।

(11) ${}^{n+1}C_2 = 2 {}^nC_2$ हो, तो n का मान होगा।

(12) $(71 - 51)$ का मान है।

उत्तर- 1. 20, 2. 1, 3. 42, 4. $n!$, 5. 1, 6. $n!$, 7. $n!$, 8. 1, 9. n , 10. 120, 11. 5, 12. 4920.

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए-

- (1) 0! का मान 0 होता है।
- (2) 5C_2 का मान 20 होता है।
- (3) क्रमचय एक निश्चित क्रम में बना विन्यास है, जिसकी दो हुई वस्तुओं में से एक समय में कुछ या सभी को लेकर बनाया गया है।
- (4) n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r वस्तुओं को लेकर बनाये क्रमचयों की संख्या को प्रतीक nP_r से निरूपित करते हैं।
- (5) $3! + 4!$ का मान 71 होगा।
- (6) 71 का मान 4050 है।
- (7) n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r वस्तुओं को लेकर बने क्रमचयों की संख्या जबकि वस्तुओं की पुनरावृत्ति की अनुमति हो, n^r होती है।
- (8) ${}^nP_n = n!$ होता है।
- (9) ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ होता है।
- (10) यदि ${}^nC_9 = {}^nC_8$ हो, तो nC_r का मान 10 होगा।
- उत्तर- (1) असत्य, (2) असत्य, (3) सत्य, (4) सत्य, (5) असत्य, (6) असत्य, (7) सत्य, (8) सत्य, (9) सत्य, (10) असत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए-

- (1) 5! का मान लिखिए।
- (2) 7! का मान लिखिए।
- (3) $4! - 3!$ का मान लिखिए।
- (4) 5C_2 का मान लिखिए।

17 जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

-) 9P_3 का मान लिखिए।
-) क्रमचय की परिभाषा लिखिए।
-) संचय की परिभाषा लिखिए।
-) क्रमचय तथा संचय के बीच क्या सम्बन्ध है।
-) $\frac{n!}{(n-r)!}$ का मान निकालिये जब $n = 9, r = 5$
-) 0) MATHEMATICS शब्द के अक्षरों से बने क्रमचयों 1 संख्या कितनी है।
- 1) RWA शब्द के अक्षरों से बने वाले क्रमचयों की संख्या त कौनसे।

तर- (1) $5! = 120, (2) 7! = 5040, (3) 4! - 3! = 1, (4) {}^3C_2 = 10, (5) {}^9P_3 = 504, (6)$ क्रमचय एक विचित्र क्रम विन्यास है, जिसको दो हुई वस्तुओं में से एक मय से कुछ या सभी को लेकर बनाया गया है। अक्षरों A, C से बने वाले विचित्र क्रमचय, जबकि दो अक्षर एक साथ ए जाएं, AB, BA, BC, CB, AC, CA होंगे। (7) कुछ सभी वस्तुओं को लेकर प्राप्त किया गया चयन संचय हलाता है। अक्षरों A, B, C से बने वाले विचित्र संचय, फंकि दो अक्षर एक साथ लिए जाएं AB, BC, AC होंगे। ${}^n P_r = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1, 0 < r \leq n. (9) 15120, (10) 85000, (11) 24$

नं. सही जोड़ी मिलाइए-

- | | |
|--------------|----------------|
| रूप- (अ) | सम्ब- (ब) |
| 1) $5!$ | (अ) $n!(n-1)!$ |
| 2) 3C_2 | (ब) 1 |
| 3) 4P_3 | (स) 18 |
| 4) $4! - 3!$ | (द) 10 |
| 5) $n!$ | (इ) 120 |
- तर- 1. (इ), (2) (द), (3) (ब), (4) (स), (5) (अ)
 नं. यदि ${}^n C_4 = {}^n C_2$, तो ${}^n C_2$ ज्ञात कीजिए
 नं- दिया है, ${}^n C_4 = {}^n C_2 \Rightarrow n = 8 + 2 = 10$
 ब, ${}^n C_2 = {}^{10}C_2 = \frac{10 \times 9}{2} = 5 \times 9 = 45$

नं. यदि ${}^{10}P_r = 5040$, तो r का मान ज्ञात कीजिए
 नं- दिया है: ${}^{10}P_r = 5040$

$$\frac{10!}{10-r!} = 5040$$

$$\frac{10!}{10-r!} = \frac{5040}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}$$

$$\frac{10!}{10-r!} = \frac{5040}{5040}$$

$$\frac{10-r!}{10-4=6} = 1$$

$\Rightarrow r=4$
 प्रश्न 8. ${}^{18}C_4 = {}^{18}C_{r+2}$ हो, तो ${}^r C_5$ का मान ज्ञात कीजिए।
 $\therefore {}^{18}C_4 = {}^{18}C_{r+2} \therefore 18C_4 = 18C_{18-4}$
 $\therefore {}^{18}C_4 = {}^{18}C_{14}$
 $\therefore 18C_{18-4} = 18C_{r+2}$
 $18-r = r+2$
 $2r = 16 \Rightarrow r = 8$

$${}^r C_5 = {}^8 C_5 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 4}{5 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1344}{30} = 44.8$$

प्रश्न 9. यदि $\frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{x}{18}$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।
 हल- दिया गया है- $\frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{x}{18}$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{x}{18}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{x}{8 \times 7 \times \frac{18}{8 \times 7}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{x}{8 \times 7 \times \frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{x}{8 \times 7 \times \frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow \frac{7+1}{7} = \frac{x}{8 \times 7} \Rightarrow x = 8 \times 8 = 64$$

प्रश्न 10. ELEPHANT शब्द के अक्षरों से बने वाले क्रमचयों की संख्या लिखिए।
 हल- यहाँ पर 8 अक्षर हैं, जिनमें E, दो बार आया है तथा शेष विभिन्न प्रकार के हैं। अतएव विन्यासों की अभीष्ट संख्या

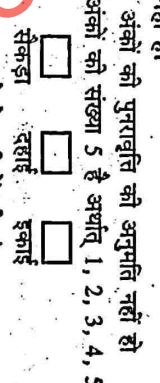
$$= \frac{8!}{2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 20,160$$

प्रश्न 11. शब्द ROSE, के अक्षरों से बने वाले 4 अक्षरों वाले अर्थपूर्ण या अर्थहीन, शब्दों की संख्या ज्ञात कीजिए। जबकि अक्षरों के पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है।
 हल- रचित शब्दों की संख्या, 4 रिक्त स्थानों $\square \square \square \square$ को 4 अक्षरों से उतरोतर भरने के तरीकों की संख्या के बराबर है, जबकि इस बात का ध्यान रखा जाए कि पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है। पहले स्थान को, 4 अक्षर R, O, S, और

E में से किसी एक द्वारा 4 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता है। इसके बाद, दूसरे स्थान को शेष तीन अक्षरों में से किसी एक द्वारा 3 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता है इसके उपरान्त तीसरे स्थान को 2 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता है और अंत में चौथे स्थान को केवल 1 तरीके से भरा जा सकता है इस प्रकार गुणन सिद्धांत द्वारा चारों स्थानों को भरने के तरीकों की संख्या $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ है। अतः शब्दों की अभीष्ट संख्या 24 है।

प्रश्न 12. भिन्न-भिन्न रंगों के लिए हुए 4 झंडों से, किन्तु भिन्न-भिन्न संकेत उत्पन्न किए जा सकते हैं, यदि एक संकेत के लिए, एक दूसरे के नीचे, 2 झंडों की आवश्यकता पड़ती है? हल- उत्पादित संकेतों की संख्या 2 रिक्त स्थानों $\square \square$ को भिन्न-भिन्न रंगों के 4 झंडों से उतरोतर भरने के तरीकों की संख्या के बराबर है। ऊपर के रिक्त स्थान को 4 झंडों में से किसी एक द्वारा 4 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता है। इसके बाद, नीचे के रिक्त स्थान को शेष 3 झंडों में से किसी एक द्वारा 3 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता है। अतः गुणन सिद्धांत द्वारा संकेतों की अभीष्ट संख्या $= 4 \times 3 = 12$ ।

प्रश्न 13. अंकों 1, 2, 3, 4 और 5 से कितनी 3 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति अनुमति नहीं है।
 हल- जब अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं हो तब 9 अंकों की संख्या 5 है अर्थात् 1, 2, 3, 4, 5



\therefore कार्ड स्थान भरने के तरीकों की संख्या $= 5$
 दशहैं स्थान भरने के तरीकों की संख्या $= 4$
 तथा सैकड़ा स्थान भरने के तरीकों की संख्या $= 3$
 अतः गणना के आधार पर सिद्धांत से, कुल तरीकों की संख्या $= 5 \times 4 \times 3 = 60$

प्रश्न 14. 1 से 9 क अंकों का प्रयोग करके कितनी 4 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है?
 हल: यहाँ पर अंकों का क्रम महत्वपूर्ण है, उदाहरण के लिए 1234 तथा 1324 दो भिन्न-भिन्न संख्याएँ हैं। अतः 4-अंकीय संख्याओं की संख्या 9 विभिन्न अंकों में से एक समय में 4 अंकों को लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या के बराबर है। इस प्रकार 4-अंकीय संख्याओं की अभीष्ट संख्या

$$= {}^9 P_4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024.$$

प्रश्न 15. मान निकालिए $\frac{n!}{(n-r)!}$ जहाँ $n = 5, r = 2$
 हल- हमें निम्नलिखित का मान निकालना है

$$\frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = 10$$

प्रश्न 16. यदि $\frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = \frac{x}{10!}$, तो x ज्ञात कीजिए।
 हल- यहाँ पर $\frac{1}{8!} + \frac{1}{9 \times 8!} = \frac{x}{10 \times 9 \times 8!}$

$$\Rightarrow \frac{1}{8!} + \frac{1}{9 \times 8!} = \frac{x}{10 \times 9 \times 8!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8!} + \frac{1}{9 \times 8!} = \frac{x}{10 \times 9 \times 8!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8!} + \frac{1}{9 \times 8!} = \frac{x}{10 \times 9 \times 8!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8!} + \frac{1}{9 \times 8!} = \frac{x}{10 \times 9 \times 8!}$$

प्रश्न 17. ALLAHABAD शब्द के अक्षरों से बने वाले क्रमचयों की संख्या ज्ञात कीजिए।
 हल- यहाँ पर 9 अक्षर हैं, जिनमें A, 4 बार आया है, 2 बार L आया है तथा शेष विभिन्न प्रकार के हैं। अतएव विन्यासों की अभीष्ट संख्या

$$= \frac{9!}{4!2!} = \frac{5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 2} = 7560$$

प्रश्न 18. यदि ${}^n P_5 = 42 \cdot {}^n P_3$ हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।
 हल- ${}^n P_5 = 42 \cdot {}^n P_3$
 $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 42n(n-1)(n-2)$

$$\Rightarrow (n-3)(n-4) = 42$$

$$\Rightarrow n^2 - 7n - 30 = 0$$

$$\Rightarrow n^2 - 10n + 3n - 30 = 0$$

$$\Rightarrow (n-10)(n+3) = 0$$

$$\Rightarrow n = 10, n \neq -3.$$

प्रश्न 19. यदि ${}^n C_4 = {}^n C_6$, तो ${}^n C_7$ ज्ञात कीजिए।
 हल- हम जानते हैं कि ${}^n C_4 = {}^n C_6$

$$\Rightarrow \frac{n!}{4!(n-4)!} = \frac{n!}{6!(n-6)!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{n-8} \text{ या } n-8 = 9 \text{ या } n = 17$$

प्रश्न 20. किसी वृत्त पर स्थित 21 बिन्दुओं से लेकर बने वाली कितनी अभीष्ट वर्गों जा सकती हैं?
 हल- किसी वृत्त पर स्थित 21 बिन्दुओं से लेकर बने वाली कितनी अभीष्ट वर्गों जा सकती हैं?

11. पी. एच. प्रथम बैंक से विस्तृतों को मिलाने से 1 जीवा प्राप्त होगी। जीवों की संख्या = $2^1 C_2$

$$= \frac{2! \times 2!}{2 \times 1} = 2! \times 2! = 2! \times 2! = 2 \times 2 = 4$$

1. सिद्ध कीजिए कि ${}^n C_r + {}^n C_{r-1} = {}^{n+1} C_r$

$$r + {}^n C_{r-1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1} \right]$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \times \frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \times \frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \times \frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)}$$

2. DAUGHTER शब्द के अक्षरों से 8 अक्षर वाले दो अक्षरों संख्या ज्ञात कीजिए यदि

1) DAUGHTER शब्द में 8 विभिन्न अक्षर हैं, जिनमें वर है, अर्थात् A, U तथा E व्यतीक सभी स्थानों को एक

होगा है इसलिए हम कुछ समय के लिए उनको नग्न रूप से एक वस्तु (AUBE) मान लेते हैं। पर अकेली

वस्तु (अक्षरों) के साथ मिलकर 6 वस्तुएं हो

होंगी, हम 6 वस्तुओं में से एक समय में सभी को

बनाने वाले क्रमचयों की संख्या की गणना करते हैं। यह

$6P_6 = 6!$ है। इनमें से प्रत्येक क्रमचय के संगत हमें

दो A, U, E में से सभी को एक समय में लेकर 3!

संख्या है। अतएव गुणन सिद्धांत से क्रमचयों की

$$\text{संख्या} = 6! \times 3! = 4320 \times 6 = 25920$$

प्रश्न 23. यदि ${}^{2n} C_3 : {}^n C_3 = 11 : 1$ हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

$$\frac{{}^{2n} C_3}{{}^n C_3} = \frac{11}{1}$$

$$\frac{(2n)(2n-1)(2n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\frac{2 \times n \times (2n-1) \times 2(n-1)}{n(n-1)(n-2)} = \frac{11}{1}$$

$$\frac{4(2n-1)}{n-2} = 11$$

$$\frac{8n-4}{n-2} = 11n-22$$

$$11n-8n = 22-4$$

$$3n = 18$$

$$n = 6$$

प्रश्न 24. INDEPENDENCE के अक्षरों को कितनी विधियों से व्यवस्थित किया जा सकता है यदि शब्द P से आरम्भ है।

हल- यहाँ पर 12 अक्षर हैं, जिनमें N तीन बार, E चार बार, D दो बार आता है शेष अक्षरों में सभी भिन्न-भिन्न हैं।

$$\frac{12!}{3! 4! 2!} = 1663200$$

$$= \frac{314121}{3! 4! 2!} = 1663200$$

$$= \frac{11!}{3! 2! 4!} = 138600$$

प्रश्न 25. EQUATION शब्द के अक्षरों में से प्रत्येक को तब तक एक बार प्रयोग करके कितने अर्थपूर्ण वाक्य बना सकते हैं?

हल- EQUATION शब्द में 8 अक्षर हैं।

$$\frac{8!}{1! 1! 1! 1! 1! 1! 1! 1!} = 8! = 40320$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 40320$$

प्रश्न 26. 8 व्यक्तियों की समिति में, हम कितने प्रकार से एक अध्यक्ष और एक उपाध्यक्ष चुन सकते हैं, यह मानते हुए कि एक व्यक्ति एक से अधिक पद पर नहीं रह सकता है?

हल- 8 व्यक्तियों की समिति में, एक व्यक्ति अध्यक्ष पद के लिए 8 तरीकों से चुना जा सकता है। चूंकि एक व्यक्ति एक से अधिक पद पर नहीं रह सकता अर्थात् बचे हुए 7 व्यक्तियों में से एक व्यक्ति उपाध्यक्ष पद के लिए 7 तरीकों से चुना जा सकता है।

अतः गणना के आधार पर सिद्धांत से,

$$\text{कुल तरीकों की संख्या} = 8 \times 7 = 56$$

प्रश्न 27. अंग्रेजी वर्णमाला के प्रथम 10 अक्षरों से कितने 4 अक्षर के कोड बनाए जा सकते हैं, यदि किसी भी अक्षर की पुनरावृत्ति नहीं की जा सकती है?

हल- प्रथम स्थान भरने के तरीकों की संख्या = 10

$$\text{दूसरे स्थान को भरने के तरीकों की संख्या} = 9$$

$$\text{तीसरे स्थान को भरने के तरीकों की संख्या} = 8$$

$$\text{चौथे स्थान को भरने के तरीकों की संख्या} = 7$$

$$= 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

प्रश्न 28. 0 से 9 तक के अंकों का प्रयोग करके कितने 5 अंकीय टेलीफोन नंबर बनाए जा सकते हैं, यदि प्रत्येक नंबर 67 से प्रारम्भ होता है और कोई अंक बार से अधिक नहीं आता है?

हल- यहाँ प्रश्न दो अंक निश्चित हैं। अतः केवल अंतिम तीन अंकों का चयन पर ध्यान में रखते हुए करना है कि पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है।

$$\text{तीसरे स्थान को भरने के तरीकों की संख्या} = 8$$

$$\text{चौथे स्थान को भरने के तरीकों की संख्या} = 7$$

$$\text{पाँचवें स्थान को भरने के तरीकों की संख्या} = 6$$

$$\text{अतः गणना के आधार पर सिद्धांत से, कुल तरीकों की संख्या} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

प्रश्न 29. अंक 1, 2, 3, 4, 5 के प्रयोग द्वारा कितनी 4 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि कोई भी अंक दोहराया नहीं गया है? इनमें से कितनी सम संख्याएँ होंगी?

$$\text{हल- दिए गए अंकों की कुल संख्या} = 5$$

दहाई स्थान भरने के तरीकों की संख्या = 4

$$\text{सैकड़ों स्थान भरने के तरीकों की संख्या} = 3$$

$$\text{तथा हजारवाँ स्थान भरने के तरीकों की संख्या} = 2$$

$$\text{अतः गणना के आधार पर सिद्धांत से, कुल तरीकों की संख्या} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

$$\text{दहाई स्थान भरने के तरीकों की संख्या} = 4$$

$$\text{सैकड़ों स्थान भरने के तरीकों की संख्या} = 3$$

$$\text{तथा हजारवाँ स्थान भरने के तरीकों की संख्या} = 2$$

$$\text{अतः गणना के आधार पर सिद्धांत से, कुल तरीकों की संख्या} = 2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$$

$$\text{अतः 120 संख्याओं में से 48 संख्याएँ सम संख्याएँ होंगी।}$$

प्रश्न 30. किसी भी अंक को दोहराए बिना कितनी 4 अंकीय संख्याएँ होती हैं?

हल- यहाँ पहला स्थान 9 तरीकों से भरा जा सकता है।

दूसरा स्थान भी 9 तरीकों से भरा जा सकता है।

तीसरा स्थान 8 तरीकों से भरा जा सकता है।

चौथा स्थान 7 तरीकों से भरा जा सकता है।

$$\text{अतः गणना के आधार पर सिद्धांत से, कुल तरीकों की संख्या} = 9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$$

प्रश्न 31. 100 से 1000 के बीच स्थित कितनी संख्याएँ हैं, जिनमें अंक 0, 1, 2, 3, 4, 5 से बनाया जा सकता है, यदि अंकों के पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है।

हल- 100 से 1000 के बीच स्थित प्रत्येक संख्या एक 3 अंकीय संख्या है। प्रथम हस 6 अंकों में से एक समय में 3 अंकों को लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या की गणना करते हैं। यह संख्या $6P_3$ है परंतु इन क्रमचयों में वे जो सम्मिलित हैं, जिनमें 0, सैकड़ों के स्थान पर है। उदाहरण के लिए 092, 042... इत्यादि और ये ऐसी संख्याएँ हैं जो वास्तव में 2 अंकीय हैं। अतः अभीष्ट संख्या को ज्ञात करने के लिए, इस प्रकार की 2 अंकीय संख्याओं के $6P_2$ में से घटाना पड़ेगा। अतः इन 2-अंकीय संख्याओं की संख्या ज्ञात करने के लिए, हम 0 को सैकड़ों के स्थान पर स्थिर कर देते हैं और शेष 5 अंकों से एक समय में दो अंकों को लेकर बनने वाले पुनर्विन्यासों की संख्या ज्ञात करते हैं। यह संख्या $5P_2$ है अतः

रखा $= 6P_3 - 3P_2 = \frac{6!}{3!} - \frac{3!}{1}$

$= 4 \times 5 \times 6 - 4 \times 5 = 100$

अंकों 1, 2, 3, 4 और 5 से कितनी 3 अंकीय बनाई जा सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति की हो?

व अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति हो जो की संख्या 5 है इसलिए प्रत्येक जगती स्थान भरने में की संख्या 5 होगी।

- I
- II
- III

जा के आधारभूत सिद्धांत से, कुल तरीकों की संख्या $5 \times 5 = 125$

अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 6 से कितनी 3 अंकीय सम बनाई जा सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति की ली है?

म जानते हैं कि कोई संख्या सम होगी यदि इसके म और पर सम संख्या हो। सर्वप्रथम हम इसकी स्थान सम संख्या चुनते हैं और इसके बाद शेष दो स्थानों संख्याओं का चुनाव किया जाता है।

संख्याओं में से सम संख्याएँ = 2, 4, 6
इसलिए भरने के तरीकों की संख्या = 3
यान भरने के तरीकों की संख्या = 6

- I
- II
- III

कुछ स्थान भरने के तरीकों की संख्या = 6
गण के आधारभूत सिद्धांत से, कुल तरीकों की संख्या $6 \times 6 = 108$

4. 4 साल, 3 पानी तथा 2 हरी डिस्क की एक किताबों प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है, कौन सी किताबों में कोई अंतर नहीं है?

इसकी कुल संख्या $4 + 3 + 2 = 9$ है। इन 9 डिस्क में एक प्रकार की (साल), 3 डिस्क दूसरे प्रकार की तथा 2 डिस्क तीसरे प्रकार की (हरी) है।

16 डिस्क की व्यवस्थित करने की संख्या $\frac{9!}{4!3!2!}$

$\frac{9!}{4!3!2!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(4 \times 3 \times 2 \times 1)(3 \times 2 \times 1)(2 \times 1)}$

$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} = 105$

$\frac{n-1}{n-1-3} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{n-4}{n} = \frac{1}{9}$
 $\frac{n-4}{n} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{n-1}{n} = \frac{1}{9}$
 $\frac{1}{n} = \frac{1}{9} \Rightarrow n = 9$

उत्तर $n = 9$

प्रश्न 36. r का मान ज्ञात कीजिए यदि $5^4 P_r = 6^3 P_{r-1}$
हल- $5^4 P_r = 6^3 P_{r-1}$
 $\frac{5 \times 4!}{(4-r)!} = \frac{6 \times (5-r+1)!}{6 \times 5!}$

या $(4-r)! = (5-r+1)(5-r)(5-r-1)!$
या $(6-r)(5-r) = 6$
या $r^2 - 11r + 24 = 0$
या $r^2 - 8r - 3r + 24 = 0$
या $(r-8)(r-3) = 0$
या $r = 80n r = 3$
अतः $r = 8, 3$

प्रश्न 37. यदि ${}^{2n}C_3 : {}^n C_2 = 12 : 1$ हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।
हल- दिया गया है - $\frac{{}^{2n}C_3}{{}^n C_2} = \frac{12}{1}$

$\frac{\frac{2n!}{(2n-3)!3!}}{\frac{n!}{(n-2)!2!}} = \frac{12}{1}$
 $\frac{2n!}{(n-2)!2!} = \frac{12}{1}$
 $\frac{2n \times (2n-1)(2n-2)}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{2!}{n(n-1)} = \frac{12}{1}$

$\frac{2 \times n \times (2n-1) \times 2(n-1)}{3 \times n(n-1)} = \frac{12}{1}$
 $\frac{4(2n-1)}{3} = 12$
 $4(2n-1) = 36$
 $2n-1 = 9$
 $2n = 10$
 $n = 5$

$\frac{12 \times 3}{2n-1} = 9$
 $\frac{12 \times 3}{2n-1} = 9$
 $2n-1 = 10$
 $n = 5$

प्रश्न 38. 2 पुरुषों और 3 महिलाओं के एक समूह से 3 व्यक्तियों की एक समिति बनानी है। यह कितने प्रकार से किया जा सकता है? इनमें से कितनी समितियाँ ऐसी हैं, जिनमें 1 पुरुष तथा 2 महिलाएँ हैं?

हल- यहाँ क्रम का महत्व नहीं है। अतः हमें संघों की गणना करनी है। यहाँ पर समितियों की संख्या उतनी ही है, जितनी 5 विभिन्न व्यक्तियों से से एक समय में 3 को लेकर बनने वाले संघों की संख्या है। इसलिए समिति बनाने के तरीकों की अभीष्ट संख्या $= {}^5 C_3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{4 \times 5}{2} = 10$

पुरु: 2 पुरुषों में से 1 को चुनने के ${}^2 C_1$ तरीके हैं तथा 3 महिलाओं में से 2 चुनने के ${}^3 C_2$ तरीके हैं। इसलिए, इस प्रकार की समितियों की अभीष्ट संख्या $= {}^2 C_1 \times {}^3 C_2 = \frac{2!}{1!1!} \times \frac{3!}{2!1!} = 6$

प्रश्न 39. 5 लड़के और 4 लड़कियों में से 3 लड़के और 3 लड़कियों की टीम बनाने के लिए कितने तरीके हैं?
हल- 5 लड़कों और 4 लड़कियों में से 3 लड़के और 3 लड़कियों की टीम की संख्या $= {}^5 C_3 \times {}^4 C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 10 \times 4 = 40$

प्रश्न 40. 6 लाल रंग की, 5 सफेद रंग की और 5 नीले रंग की गेंदों में से 9 गेंद चुनने के तरीकों की संख्या ज्ञात कीजिए, यदि प्रत्येक संग्रह में प्रत्येक रंग की 3 गेंदें हैं।
हल- 6 लाल गेंदों में से 3 लाल गेंदें ${}^6 C_3$ तरीके से चुनी जा सकती हैं। 5 सफेद गेंदों में से 3 सफेद गेंदें ${}^5 C_3$ तरीके से चुनी जा सकती हैं तथा 5 नीली गेंदों में से 3 नीली गेंदें ${}^5 C_3$ तरीके से चुनी जा सकती हैं। अतः गणना के आधारभूत सिद्धांत से, 9 गेंदों के चुनने के तरीकों की संख्या जब प्रत्येक संग्रह में प्रत्येक रंग की 3 गेंदें हैं,

$= {}^6 C_3 \times {}^5 C_3 \times {}^5 C_3$
 $= {}^6 C_3 \times {}^5 C_2 \times {}^5 C_2$
 $= \frac{6 \times 5 \times 4}{6} \times \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{5 \times 4}{2}$
 $= 20 \times 10 \times 10 = 2000$

प्रश्न 41. 52 पत्तों की एक गजु में से 5 पत्तों को लेकर बने संघों की संख्या निर्धारित कीजिए, यदि प्रत्येक संघ में तब्यतः एक इक्का है।
हल- 52 पत्तों की एक गजु में चार इक्के होते हैं अर्थात् एक इक्का चार पत्तों में से चुना जा सकता है और शेष चार पत्ते बचे हुए 48 पत्तों (अर्थात् $52 - 4 = 48$) में से चुने जाते हैं। चार इक्कों में से एक इक्का चुनने के तरीकों की संख्या $= {}^4 C_1$ 48 पत्तों में से 4 पत्ते चुनने के तरीकों की संख्या $= {}^{48} C_4$

अतः गणना के आधारभूत सिद्धांत से,
 52 पत्तों में से 5 पत्तों को लेकर बनने वाले वाले संघों की संख्या यदि प्रत्येक संघ में तब्यतः एक इक्का हो $= {}^4 C_1 \times {}^{48} C_4$
 $= 4 \times \frac{48 \times 47 \times 46 \times 45}{24}$
 $[\because {}^n C_1 = n \text{ तथा } {}^n C_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}]$
 $= \frac{48 \times 47 \times 46 \times 45}{6} = 8 \times 47 \times 46 \times 45 = 778320$

प्रश्न 42. एक शैले में 5 काली तथा 6 लाल गेंदें हैं। 2 काली तथा 3 लाल गेंदों के चयन के तरीकों की संख्या निर्धारित कीजिए।
हल- 5 काली तथा 6 लाल गेंदें हैं।
5 काली गेंदों में 2 काली गेंदें चुने जाने के तरीके $= {}^5 C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$
6 लाल गेंदों में से 3 लाल गेंदें चुने जाने की तरीके $= {}^6 C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$

\therefore कुल तरीकों की संख्या $= 10 \times 20 = 200$
उत्तर
प्रश्न 43. शब्द PERMUTATIONS के अक्षरों को कितने तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है, यदि
(i) चयनित शब्द का प्रारंभ P से तथा अंत S से होता है?
(ii) चयनित शब्द में सभी स्वर एक साथ हैं?
(iii) चयनित शब्द में P और S के मध्य सर्वद्व 4 अक्षर हों?
हल- शब्द PERMUTATIONS में अक्षर निम्न प्रकार आते हुए हैं

P	-	1	बार
E	-	1	बार
R	-	1	बार
M	-	1	बार

जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

U	1 बार
T	2 बार
A	1 बार
I	1 बार
O	1 बार
N	1 बार
S	1 बार

व्द दिनका प्रारंभ P से तथा अंत S से हो अर्थात्

$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$10! = 3628800$

$720 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$

1814400

दि 44th MONDAY शब्द के अक्षरों से कितने अर्थपूर्ण शब्द बन सकते हैं, यह मानते हुए कि शिवाजी वा अर्थहीन, शब्द बन सकते हैं, यह मानते हुए कि शिवाजी वा अक्षरों का पुनरावृत्ति नहीं की जा सकती है, यदि

(i) एक समय में 4 अक्षर लिए जाते हैं?

(ii) एक समय में सभी अक्षर लिए जाते हैं?

(iii) सभी अक्षरों का प्रयोग किया जाता है, किंतु प्रथम अक्षर एक स्वर है?

हल- MONDAY शब्द के सात अक्षर विभिन्न हैं।

(i) 6 विभिन्न अक्षरों में से 4 अक्षर 6P_4 तरीके से चुने जा सकते हैं।

∴ अर्थात् शब्दों की संख्या = 6P_4

$= \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 360$

(ii) 6 विभिन्न अक्षरों में से एक साथ सभी अक्षर लेकर शब्द बनाने के तरीकों की संख्या = 6P_6

$= \frac{6!}{(6-6)!} = \frac{6!}{0!} = \frac{6!}{1} = 720$

(iii) सर्वप्रथम, हम स्वर को निश्चित करेंगे। शब्द MONDAY में स्वरो की संख्या दो है अर्थात् O तथा A संस्कार हैं।

अतः पहले अक्षर को दो तरीकों से चुना जा सकता है। बचे हुए पाँच अक्षरों में से 5 विभिन्न अक्षर लेकर शब्द बनाने के तरीकों की संख्या

$= {}^5P_5 = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 120$
अतः गणना के आधार पर सिद्धांत से, अर्थात् शब्दों की कुल संख्या = $2 \times 120 = 240$

बचे हुए 10 अक्षर (जिनमें T दो बार आया है) भरे जाने के

तरीकों की संख्या = $\frac{10!}{10!}$

अतः गणना के आधार पर सिद्धांत से,

कुल तरीकों की संख्या = $14 \times \frac{10!}{10!}$

$= \frac{14 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2}$

$= \frac{14 \times 3628800}{2} = 25401600$

प्रश्न 44. MONDAY शब्द के अक्षरों से कितने अर्थपूर्ण शब्द बन सकते हैं, यह मानते हुए कि शिवाजी वा अर्थहीन, शब्द बन सकते हैं, यह मानते हुए कि शिवाजी वा अक्षरों का पुनरावृत्ति नहीं की जा सकती है, यदि

(i) एक समय में 4 अक्षर लिए जाते हैं?

(ii) एक समय में सभी अक्षर लिए जाते हैं?

(iii) सभी अक्षरों का प्रयोग किया जाता है, किंतु प्रथम अक्षर एक स्वर है?

हल- MONDAY शब्द के सात अक्षर विभिन्न हैं।

(i) 6 विभिन्न अक्षरों में से 4 अक्षर 6P_4 तरीके से चुने जा सकते हैं।

∴ अर्थात् शब्दों की संख्या = 6P_4

$= \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 360$

(ii) 6 विभिन्न अक्षरों में से एक साथ सभी अक्षर लेकर शब्द बनाने के तरीकों की संख्या = 6P_6

$= \frac{6!}{(6-6)!} = \frac{6!}{0!} = \frac{6!}{1} = 720$

(iii) सर्वप्रथम, हम स्वर को निश्चित करेंगे। शब्द MONDAY में स्वरो की संख्या दो है अर्थात् O तथा A संस्कार हैं।

अतः पहले अक्षर को दो तरीकों से चुना जा सकता है। बचे हुए पाँच अक्षरों में से 5 विभिन्न अक्षर लेकर शब्द बनाने के तरीकों की संख्या

$= {}^5P_5 = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 120$
अतः गणना के आधार पर सिद्धांत से, अर्थात् शब्दों की कुल संख्या = $2 \times 120 = 240$

प्रश्न 45. 52 तारों की एक गहरी से 4 पत्तों को चुनने के तरीकों की संख्या क्या है? इन तरीकों में से कितनों में

(i) चार पत्ते एक ही प्रकार (suit) के हैं?

(ii) दो पत्ते लाल रंग के और दो काले रंग के हैं?

हल- 52 पत्तों में से 4 पत्तों को चुनने के उतने ही तरीके हैं, जितने 52 विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में 4 वस्तुओं को लेकर बनने वाले संभव हैं। इसलिए, तरीकों की अभीष्ट संख्या

$= {}^{52}C_4 = \frac{52!}{2 \times 3 \times 4} = \frac{49 \times 50 \times 51 \times 52}{2 \times 3 \times 4} = 270725$

(i) गड्डी में पत्ते चार प्रकार के हैं इंट, चिड्डी, ड्रुम, पाण और प्रत्येक के 13 पत्ते हैं। इसलिए 4 इंट के पत्ते चुनने के ${}^{13}C_4$ तथा 4 पाण के पत्ते चुनने के ${}^{13}C_4$ तरीके हैं। इसलिए तरीकों की अभीष्ट संख्या = ${}^{13}C_4 + {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4 + {}^{13}C_4$

$= 4 \times \frac{13!}{2!2!} = 2860$

(ii) गड्डी में 26 लाल रंग के और 26 काले रंग के पत्ते हैं। अतः तरीकों की अभीष्ट संख्या

$= {}^{26}C_2 \times {}^{26}C_2$
 $= \left(\frac{26!}{2!24!}\right)^2 = (325)^2$
 $= 105625$

प्रश्न 46. 1, 2, 0, 2, 4, 2, 4 अंकों के प्रयोग द्वारा 1000000 से बड़ी लेकिन संख्याएँ बन सकती हैं?

हल- क्योंकि 1000000 एक 7 अंकीय संख्या है और प्रयोग किए जाने वाले अंकों की भी संख्या 7 है, इसलिए केवल 7 अंकीय संख्याएँ ही गणना उत्तर में का जाएगी। इसके अतिरिक्त क्योंकि लाल संख्याओं को 1000000 से बड़ा होना चाहिए, अतः उन संख्याओं को 1, 2 या 4 से प्रारंभ होना चाहिए।

1. से प्रारंभ होने वाली संख्याओं की संख्या = $\frac{6!}{2} = \frac{4 \times 5 \times 6}{2} = 60$, क्योंकि जब 1 को सबसे बाएँ स्थान पर स्थापित कर देते हैं, तो फिर शेष अंक 0, 2, 2, 2, 4, 4, को पुनर्विचारित करते हैं, जिनमें 2, तीन बार तथा 4, दो बार आते हैं।

2 से प्रारंभ होने वाली संख्याओं की कुल संख्या

$= \frac{6!}{2!} = \frac{3 \times 4 \times 5 \times 6}{2} = 180$

4 से प्रारंभ होने वाली संख्याओं की कुल संख्या

$= \frac{6!}{3!} = 4 \times 5 \times 6 = 120$
अतः रचित संख्याओं की अभीष्ट संख्या = $60 + 180 + 120 = 360$

प्रश्न 47. 5 लड़कियों और 3 लड़कों को एक पंक्ति में कितने प्रकार से बैठा सकते हैं, जब कि कोई दो भी दो लड़के एक साथ नहीं बैठते हैं?

हल- हम पहले 5 लड़कियों को बैठा देते हैं। इसे 5! प्रकार से कर सकते हैं। इस प्रकार के प्रत्येक विन्यास में, तीन लड़कों को केवल गुण के विहित स्थानों पर बैठना जाता है।

$\times G \times G \times G \times G \times G$

गुण से विहित 6 स्थानों पर 3 लड़कों को 6P_3 तरीकों से बैठना जा सकता है। अतः गुण सिद्धान्त से, इन तरीकों की कुल संख्या

$= 5! \times {}^6P_3 = 5! \times \frac{6!}{3!}$
 $= 4 \times 5 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$
 $= 14400$

प्रश्न 48. ASSASSINATION शब्द के अक्षरों के कितने विन्यास बनाए जा सकते हैं, जबकि सभी 'S' एकसाथ रहें? हल- दिए हुए शब्द ASSASSINATION में जिन अक्षर हैं-

A	→	3 बार
S	→	4 बार
I	→	2 बार
T	→	1 बार
O	→	1 बार
N	→	2 बार

यदि सभी S को एकसाथ ले, तब इसे हम अक्षर मानेंगे और बचे हुए 9 अक्षर तथा 1S (4S को सम्मिलित करते हुए) मिलकर 10 अक्षर बनेंगे।

अतः कुल तरीकों की संख्या = $\frac{10!}{3!2!2!}$

$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1}$
 $= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151200$

प्रश्न 49. अंशुबी वर्षापालता में 5 स्वर तथा 21 व्यंजन हैं। इस वर्षापालता से 2 भिन्न स्वरो और 2 भिन्न व्यंजनों वाले कितने शब्दों की रचना की जा सकती है?

हल-



ही.पी.एल. प्रश्न बैंक

में से 2 स्तर 3C_2 तरीके से चुने जा सकते हैं।
 जब में से 2 बजाने 2C_1 तरीके से चुने जा सकते हैं।
 4 वर्षों (2 स्तर तथा 2 बजाने) 4! तरीकों से
 कर किए जा सकते हैं।
 गणना के आधार पर सिद्धांत से,
 तरीकों की संख्या = ${}^3C_2 \times {}^2C_1 \times 4!$

$$= \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{2! \times 2!}{2} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$= 10 \times 2! \times 2! \times 24 = 240 \times 2! \times 2! = 50400$$

10. 9 उपलब्ध पाठ्यक्रमों में से एक विद्यार्थी 5
 क्रमों का चयन करने प्रकार से कर सकता है? यदि
 विद्यार्थी के लिए 2 विशिष्ट पाठ्यक्रम अनिवार्य हैं।
 उपलब्ध पाठ्यक्रम 9 हैं।
 क्रमों का चयन करना है।
 10 पाठ्यक्रम अनिवार्य हैं।
 शेष चयन के तरीकों की कुल संख्या = ${}^{9-2}C_{5-2} = {}^7C_3$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

11. 12 खिलाड़ियों में से जिनमें केवल 5 खिलाड़ी
 ही फील्डर हैं। एक क्रिकेट टीम के 11 खिलाड़ियों
 पर जिनमें प्रकार से किया जा सकता है? यदि प्रत्येक
 फील्डर 4 गेंदबाज हैं।
 गणना 12 बल्लेबाज हैं।
 गणना में से 4 गेंदबाज चयन करने के तरीके

$$= {}^5C_4 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5$$

ल्लेखों में से 7 बल्लेबाज चयन करने के तरीके
 $= {}^{12}C_7$

$$= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 11 \times 9 \times 8 = 792$$

विद्यार्थियों के चयन करने के तरीके
 $= 5 \times 792 = 3960$ उत्तर

गण-8

वस्तुनिष्ठ प्रश्नों का

1. जहाँ विकल्प चुनिये-
 n में प्रसार में कुल पदों की संख्या होगी-
 (अ) n+1 (ब) n-1 (स) n+2

द्विपद प्रमेय

2. $(x + 2y)^9$ के प्रसार में x^4y^5 का गुणांक होगा-
 (अ) 276
 (क) 672
 (स) 726
 उत्तर- 1. (अ), 2. (क)

प्रश्न 2. बिना स्थानों की पूर्ति कीजिए-
 (1) $(a+n)^n$ के प्रसार में, यदि n सम संख्या है, तो मध्य पद
 पद होगा है।
 (2) ${}^n C_0 + {}^n C_1 + {}^n C_2 + \dots + {}^n C_n = \dots$
 (3) ${}^n C_0 - {}^n C_1 + {}^n C_2 - \dots + (-1)^n {}^n C_n = \dots$

उत्तर- (1) $\frac{n}{2} + 1$, (2) 2^n , (3) 0.
 प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए-
 (1) $(a+b)^n$ के प्रसार में प्रत्येक पद में a तथा b की घातोंकी
 का योग n है।
 (2) द्विपद प्रमेय में अने बाने गुणांक ${}^n C_r$ को द्विपद गुणांक
 कहते हैं।
 (3) $(a+b)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या $(n+1)$ है अर्थात्
 घातोंक से 1 अधिक है।
 उत्तर- (1) सत्य, (2) सत्य, (3) सत्य,

प्रश्न 4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए-
 (1) द्विपद प्रमेय से $(a+b)^n$ का प्रसार लिखिए।
 (2) द्विपद प्रमेय से $(a-b)^n$ का प्रसार लिखिए।
 उत्तर- (1) $(a+b)^n = {}^n C_0 a^n b^0 + {}^n C_1 a^{n-1} b^1 + {}^n C_2 a^{n-2} b^2 + \dots +$
 $+ {}^n C_n a^0 b^n$

(2) $(a-b)^n = {}^n C_0 a^n b^0 - {}^n C_1 a^{n-1} b^1 + {}^n C_2 a^{n-2} b^2 + \dots +$
 $- {}^n C_n a^0 b^n$
 प्रश्न 5. $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4$, $x \neq 0$ का प्रसार ज्ञात कीजिए-
 हल- द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके हमें प्राप्त होगा है,
 $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4 = {}^4 C_0 (x^2)^4 + {}^4 C_1 (x^2)^3 \left(\frac{3}{x}\right) + {}^4 C_2 (x^2)^2$
 $\left(\frac{3}{x}\right)^2 + {}^4 C_3 (x^2) \left(\frac{3}{x}\right)^3 + {}^4 C_4 \left(\frac{3}{x}\right)^4$

$= x^8 + 4x^6 + \frac{3}{x} + 6x^4 + \frac{9}{x^2} + 4x^2 + \frac{27}{x^3} + \frac{81}{x^4}$
 $= x^8 + 12x^5 + 54x^2 + \frac{108}{x} + \frac{81}{x^4}$
 प्रश्न 6. $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right)^5$ का विस्तार कीजिए।
 हल- दिया है-

$\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right)^5 = {}^5 C_0 \left(\frac{x}{3}\right)^5 + {}^5 C_1 \left(\frac{x}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{x}\right) + {}^5 C_2 \left(\frac{x}{3}\right)^3$
 $\left(\frac{1}{x}\right)^2 + {}^5 C_3 \left(\frac{x}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{x}\right)^3 + {}^5 C_4 \left(\frac{x}{3}\right) \left(\frac{1}{x}\right)^4 + {}^5 C_5 \left(\frac{1}{x}\right)^5$

$= {}^5 C_0 \frac{x^5}{243} + {}^5 C_1 \frac{x^4}{81} \times \frac{1}{x} + {}^5 C_2 \times \frac{x^3}{27} \times \frac{1}{x^2} + {}^5 C_3 \frac{x^2}{9}$
 $\times \frac{1}{x} + {}^5 C_4 \frac{x}{3} \times \frac{1}{x^4} + {}^5 C_5 \frac{1}{x^5}$, $[\because {}^n C_r = {}^n C_{n-r}]$

$= \frac{x^5}{243} + \frac{5}{81} x^3 + \frac{5 \times 4}{27} \times \frac{1}{x} + \frac{5 \times 4 \times 3}{2} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{x}$
 $+ 5 \times \frac{x}{3} \times \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}$

$= \frac{x^5}{243} + \frac{5x^3}{81} + \frac{10x}{27} + \frac{10}{9x} + \frac{5}{3x^3} + \frac{1}{x^5}$
 उत्तर

प्रश्न 7. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ का विस्तार कीजिए।
 हल- हम जानते हैं कि-
 $(x+y)^n = x^n + {}^n C_1 x^{n-1} y + {}^n C_2 x^{n-2} y^2 + \dots + y^n$
 यहाँ $x = x$, $y = \frac{1}{x}$, $n = 6$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 = x^6 + {}^6 C_1 x^5 \left(\frac{1}{x}\right) + {}^6 C_2 x^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + {}^6 C_3 x^3 \left(\frac{1}{x}\right)^3$
 $+ {}^6 C_4 x^2 \left(\frac{1}{x}\right)^4 + {}^6 C_5 x \left(\frac{1}{x}\right)^5 + \frac{1}{x^6}$

$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^6 = x^6 + 6x^4 + \frac{6 \times 5}{2 \cdot 1} x^2 + \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} x^0 + \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} x^{-2} + \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} x^{-4} + \frac{1}{x^6}$
 $= x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + \frac{15}{x^2} + \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$
 उत्तर

प्रश्न 8. $(1 - 2x)^5$ का प्रसार ज्ञात कीजिए।
 हल- $(1 - 2x)^5 = {}^5 C_0 (1)^5 - {}^5 C_1 (1)^4 (2x) + {}^5 C_2 (1)^3$
 $(2x)^2 - {}^5 C_3 (1)^2 (2x)^3 + {}^5 C_4 (1) (2x)^4 - {}^5 C_5 (2x)^5$
 $= {}^5 C_0 - {}^5 C_1 (2x) + {}^5 C_2 (4x^2) - {}^5 C_3 (8x^3) + {}^5 C_4 (16x^4) -$
 $= {}^5 C_0 (100)^5 + {}^5 C_1 (100)^4 (2) + {}^5 C_2 (100)^3 (2)^2$
 $+ {}^5 C_3 (100)^2 + {}^5 C_4 (100) (2)^4 + {}^5 C_5 (2)^5$

$= {}^5 C_0 (10)^{10} + {}^5 C_1 (10)^9 + {}^5 C_2 (10)^8 + {}^5 C_3 (10)^7 + {}^5 C_4 (10)^6 + {}^5 C_5 (10)^5$
 $\times 8 + {}^5 C_4 (10)^2 \times 16 + {}^5 C_5 \times 32$, $[\because n C r = {}^n C_{n-r}]$
 $= 1 \times 10^{10} + 5 \times 10^9 \times 2 + \frac{5 \times 4}{2} \times 10^8 \times 4 + \frac{5 \times 4 \times 3}{6} \times 10^7 \times 8 + 5 \times 10^6 \times 16 + 32$
 $= 10000000000 + 10000000000 + 100000000 + 8000000 + 800000 + 32$
 $= 11040808032$

प्रश्न 9. $\left(\frac{2-x}{x}\right)^{10}$ का प्रसार ज्ञात कीजिए।
 हल- हम जानते हैं कि $(x-y)^n = x^n - {}^n C_1 x^{n-1} y + {}^n C_2 x^{n-2} y^2 - \dots + (-1)^n y^n$
 यहाँ $x = \frac{2}{x}$ तथा $y = \frac{x}{2}$, $n = 10$ रखने पर,
 $\left(\frac{2-x}{x}\right)^{10} = \left(\frac{2}{x}\right)^{10} - {}^10 C_1 \left(\frac{2}{x}\right)^9 \left(\frac{x}{2}\right) + {}^10 C_2 \left(\frac{2}{x}\right)^8$
 $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - {}^10 C_3 \left(\frac{2}{x}\right)^7 \left(\frac{x}{2}\right)^3 + {}^10 C_4 \left(\frac{2}{x}\right)^6 \left(\frac{x}{2}\right)^4 - {}^10 C_5 \left(\frac{2}{x}\right)^5$

$\left(\frac{x}{2}\right)^2 - {}^10 C_5 \left(\frac{2}{x}\right)^4 \left(\frac{x}{2}\right)^5 + {}^10 C_6 \left(\frac{2}{x}\right)^3 \left(\frac{x}{2}\right)^6 - {}^10 C_7 \left(\frac{2}{x}\right)^2 \left(\frac{x}{2}\right)^7 + {}^10 C_8 \left(\frac{2}{x}\right)^1 \left(\frac{x}{2}\right)^8$
 $- {}^10 C_9 \left(\frac{2}{x}\right)^0 \left(\frac{x}{2}\right)^9 + \left(\frac{x}{2}\right)^{10}$
 $= \frac{2^{10}}{x^{10}} - \frac{2^9}{x^9} \times \frac{x}{2} + \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{2 \times 2 \times 1} \times \frac{2^8}{x^8} - \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{2^7}{x^7} + \frac{2^6}{x^6}$
 $-\frac{2^5}{x^5} + \frac{2^4}{x^4} \times \frac{x}{2} + \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{2 \times 2 \times 1} \times \frac{2^3}{x^3} - \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{2^2}{x^2} + \frac{2^1}{x} + \frac{2^{10}}{x^{10}}$
 $= \frac{32}{x^{10}} - \frac{40}{x^9} + \frac{20}{x^8} - \frac{5x}{x^7} + \frac{5x^3}{8} - \frac{x^4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{x^5}{16} - \frac{x^6}{25}$
 $+\frac{x^7}{8} + \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{2}{x} + \frac{x^8}{16} - \frac{x^9}{25}$
 उत्तर

प्रश्न 10. $(2x-3)^6$ का विस्तार कीजिए।
 हल- $(2x-3)^6 = {}^6 C_0 (2x)^6 - {}^6 C_1 (2x)^5 \times 3 + {}^6 C_2 (2x)^4$
 $(3)^2 - {}^6 C_3 (2x)^3 (3)^3 + {}^6 C_4 (2x)^2 (3)^4 - {}^6 C_5 (2x) (3)^5 + {}^6 C_6 (3)^6$
 $= {}^6 C_0 64x^6 - {}^6 C_1 32x^5 \times 3 + {}^6 C_2 16x^4 \times 9 - {}^6 C_3 8x^3$
 $\times 27 + {}^6 C_4 4x^2 \times 81 - {}^6 C_5 2x \times 243 + {}^6 C_6 729$, $[\because n C r = {}^n C_{n-r}]$

$= 64x^6 - 6 \times 32 \times 3 \times x^5 + \frac{6 \times 5}{2} \times 16x^4 \times 9 -$
 $\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6} \times 4x^3 \times 81 - 6 \times 2x \times 243 + 729$
 $= 64x^6 - 576x^5 + 2160x^4 - 4320x^3 + 4860x^2 - 2916x$
 $+ 729$
 प्रश्न 11. $(102)^5$ का मान ज्ञात कीजिए।
 हल- $(102)^5 = (100 + 2)^5$
 $= {}^5 C_0 (100)^5 + {}^5 C_1 (100)^4 (2) + {}^5 C_2 (100)^3 (2)^2$
 $+ {}^5 C_3 (100)^2 + {}^5 C_4 (100) (2)^4 + {}^5 C_5 (2)^5$

$= {}^5 C_0 (10)^{10} + {}^5 C_1 (10)^9 + {}^5 C_2 (10)^8 + {}^5 C_3 (10)^7 + {}^5 C_4 (10)^6 + {}^5 C_5 (10)^5$
 $\times 8 + {}^5 C_4 (10)^2 \times 16 + {}^5 C_5 \times 32$, $[\because n C r = {}^n C_{n-r}]$
 $= 1 \times 10^{10} + 5 \times 10^9 \times 2 + \frac{5 \times 4}{2} \times 10^8 \times 4 + \frac{5 \times 4 \times 3}{6} \times 10^7 \times 8 + 5 \times 10^6 \times 16 + 32$
 $= 10000000000 + 10000000000 + 100000000 + 8000000 + 800000 + 32$
 $= 11040808032$

$= 10000000000 + 10000000000 + 100000000 + 8000000 + 800000 + 32$
 $= 11040808032$

$= 10000000000 + 10000000000 + 100000000 + 8000000 + 800000 + 32$
 $= 11040808032$

$= 10000000000 + 10000000000 + 100000000 + 8000000 + 800000 + 32$
 $= 11040808032$

$= 10000000000 + 10000000000 + 100000000 + 8000000 + 800000 + 32$
 $= 11040808032$

1/ श्री. एच. प्रमद बैंक

न 12. (101)⁴ का मान ज्ञात कीजिए।

$$= (100+1)^4 = {}^4C_0(100)^4 + {}^4C_1(100)^3(1) + {}^4C_2(100)^2(1)^2 + {}^4C_3(100)(1)^3 + {}^4C_4(1)^4$$

$$= {}^4C_0(100)^4 + {}^4C_1(100)^3 + {}^4C_2(100)^2 + {}^4C_3(100) + {}^4C_4(1)$$

$$= 100000000 + 40000000 + 60000 + 400 + 1$$

$$= 104060401$$

$$10^8 + 4 \times 10^6 + \frac{4 \times 3}{2} \times 10^4 + 4 \times 10^2 + 1$$

$$= 100000000 + 40000000 + 60000 + 400 + 1 = 104060401$$

न 13. (98)⁵ को गुणना कीजिए।

हल- हम को दो संख्याओं के योग या अंतर में व्यक्त हो हैं निम्न की बात ज्ञात करना सरल हो फिर द्विपद प्रमेय प्रयोग करते हैं।

$$98 = (100 - 2)^5$$

$$= {}^5C_0(100)^5 - {}^5C_1(100)^4 \cdot 2 + {}^5C_2(100)^3 \cdot 2^2 - {}^5C_3(100)^2 \cdot 2^3 + {}^5C_4(100) \cdot 2^4 - {}^5C_5(2)^5$$

$$= 10000000000 - 5 \times 1000000000 \times 2 + 10 \times 100000000 \times 4 - 10 \times 100000 \times 8 + 5 \times 100 \times 16 - 32$$

$$= 9039207968$$

न 14. (96)³ का मान ज्ञात कीजिए।

$$= (100 - 4)^3 = {}^3C_0(100)^3 - {}^3C_1(100)^2 \cdot 4 + {}^3C_2(100) \cdot 4^2 - {}^3C_3(4)^3$$

$$= {}^3C_0(100)^3 - {}^3C_1(100)^2 \cdot 4 + {}^3C_2(100) \cdot 16 - {}^3C_3(64)$$

$$= 100^3 - 3 \times 100^2 \times 4 + 3 \times 100 \times 16 - 64$$

$$= 10^6 - 12 \times 10^4 + 48 \times 10^2 - 64 = 1064800 - 120064 = 884736$$

न 15. (99)⁵ का मान ज्ञात कीजिए।

$$= (100 - 1)^5 = {}^5C_0(100)^5 - {}^5C_1(100)^4 \cdot 1 + {}^5C_2(100)^3 \cdot 1^2 - {}^5C_3(100)^2 \cdot 1^3 + {}^5C_4(100) \cdot 1^4 - {}^5C_5(1)^5$$

$$= 10000000000 - 5 \times 1000000000 + \frac{5 \times 4}{2} \times 100000000 - 5 \times 100000000 + \frac{5 \times 4}{2} \times 10000000 - 5 \times 100000 + 1$$

$$= 9000000000 - 5 \times 1000000000 + 10000000000 - 5000000000 + 10000000000 + 5000000000 - 5000000000 + 10000000000 + 10000000000 - 5000000000 + 10000000000 = 95099000409$$

$$1000000 - \frac{5 \times 4}{2} \times 10000 + 5 \times 100 - 1 = 1000000 - 100000 + 500 = 900000 + 500 = 900500$$

संख्या बड़ी है?

हल- 1.01 को दो पदों में व्यक्त करके द्विपद प्रमेय के प्रयोग से संख्या बड़ी है।

$$(1.01)^{1000000} = (1 + 0.01)^{1000000}$$

$$= 1 + 1000000 \times 0.01 + \text{अन्य धनात्मक पद}$$

$$= 1 + 10000 + \text{अन्य धनात्मक पद} > 10000$$

अतः $(1.01)^{1000000} > 10000$

प्रश्न 17. द्विपद प्रमेय का प्रयोग करते हुए बताइए कि सौ संख्या बड़ी है।

$$(1.1)^{10000} \text{ या } 10000?$$

$$\text{हल- } (1.1)^{10000} = (1 + 0.1)^{10000}$$

$$= 10000 \text{ } {}^1C_0 + 10000 \text{ } {}^1C_1(0.1) + \dots$$

$$= 1 \times 1 + 10000 \times 0.1 + \dots + \text{अन्य पद}$$

$$= 1 + 1000 + \text{अन्य पद}$$

$$= (1001 + \text{अन्य पद}) > 1000 \Rightarrow (1.1)^{10000} > 1000$$

प्रश्न 18. सिद्ध कीजिए कि $\sum_{r=0}^n {}^n C_r = 2^n$

$$\text{हल- } \sum_{r=0}^n {}^n C_r \times 3^r = {}^n C_0 3^0 + {}^n C_1 3^1 + {}^n C_2 3^2 + {}^n C_3 3^3 + \dots + {}^n C_n 3^n$$

$$= {}^n C_0 + {}^n C_1 3 + {}^n C_2 3^2 + \dots + {}^n C_n 3^n$$

$$= (1+3)^n = 4^n$$

प्रश्न 19. (a+b)ⁿ - (a-b)ⁿ का विस्तार कीजिए। इसका प्रयोग करके $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^4 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल- हम जानते हैं कि प्रसार $(x+y)^n = {}^n C_0 x^n + {}^n C_1 x^{n-1} y + {}^n C_2 x^{n-2} y^2 + \dots + {}^n C_n y^n$ तथा $(x-y)^n = {}^n C_0 x^n - {}^n C_1 x^{n-1} y + {}^n C_2 x^{n-2} y^2 - \dots + (-1)^n {}^n C_n y^n$

$$\text{अतः } (a+b)^n - (a-b)^n = {}^n C_0 a^n + {}^n C_1 a^{n-1} b + {}^n C_2 a^{n-2} b^2 + {}^n C_3 a^{n-3} b^3 + \dots + {}^n C_n b^n - [{}^n C_0 a^n - {}^n C_1 a^{n-1} b + {}^n C_2 a^{n-2} b^2 - {}^n C_3 a^{n-3} b^3 + \dots + (-1)^n {}^n C_n b^n]$$

$$= 1 \times a^4 + 4 a^3 b + \frac{4 \times 3}{2} a^2 b^2 + 4 a b^3 + 1 \times b^4$$

$$= (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \quad \dots (i)$$

$$\text{इसी प्रकार, } (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \quad \dots (ii)$$

$$\text{समी (i) से समी (ii) को घटाने पर, } (a+b)^4 - (a-b)^4 = 8a^3b + 8ab^3 = 8ab(a^2 + b^2)$$

$$\text{जब, } a = \sqrt{3} \text{ तथा } b = \sqrt{2} \text{ रखने पर,}$$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^4 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4 = 8\sqrt{3}\sqrt{2}(3+2) = 8\sqrt{6} \times 5 = 40\sqrt{6}$$

$$= 8\sqrt{6}(3+2) = 8\sqrt{6} \times 5 = 40\sqrt{6}$$

प्रश्न 20. (x+1)⁶ + (x-1)⁶ का मान ज्ञात कीजिए। इसका प्रयोग करके या अन्यथा $(\sqrt{2} + 1)^6 + (\sqrt{2} - 1)^6$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल- अब, } (x+1)^6 = {}^6C_0 x^6 + {}^6C_1 x^5 + {}^6C_2 x^4 + {}^6C_3 x^3 + {}^6C_4 x^2 + {}^6C_5 x + {}^6C_6(1)^6$$

$$\times (1)^6 + {}^6C_5 x^5 + {}^6C_4 x^4 + {}^6C_3 x^3 + {}^6C_2 x^2 + {}^6C_1 x + {}^6C_0(1)^6$$

$$\Rightarrow (x+1)^6 = {}^6C_0 x^6 + {}^6C_1 x^5 + {}^6C_2 x^4 + {}^6C_3 x^3 + {}^6C_4 x^2 + {}^6C_5 x + {}^6C_6$$

$$\Rightarrow (x+1)^6 = x^6 + 6x^5 + \frac{6 \times 5}{2} x^4 + \frac{6 \times 5 \times 4}{6} x^3 + \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{2 \times 2} x^2 + 6x + 1$$

$$\Rightarrow (x+1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1 \quad \dots (i)$$

$$\text{इसी प्रकार, } (x-1)^6 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1 \quad \dots (ii)$$

$$\text{अतः, समी (i) तथा (ii) को जोड़ने पर, } (x+1)^6 + (x-1)^6 = 2(x^6 + 15x^4 + 15x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow (\sqrt{2} + 1)^6 + (\sqrt{2} - 1)^6 = 2[\sqrt{2}^6 + 15(\sqrt{2})^4 + 15(\sqrt{2})^2 + 1]$$

$$= 2(2^3 + 15 \times 2 + 15 \times 2 + 1)$$

$$= 2(8 + 15 \times 4 + 30 + 1) = 2(8 + 60 + 30 + 1) = 2(99) = 198$$

प्रश्न 21. द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि 6ⁿ - 5n को जब 25 से भाग दिया जाए तो सदैव 1 शेष बचता है।

हल- दो संख्याओं a तथा b के लिए यदि हम संख्याएँ q तथा r प्राप्त कर सकें ताकि a = bq + r हो हम कह सकते हैं कि a को b से भाग करने पर q भजनफल तथा r शेषफल प्राप्त होता है। इसी प्रकार यह दर्शाते हैं कि 6ⁿ - 5n को 25 से भाग करने पर 1 शेष बचता है, हमें सिद्ध करना है:

$$6^n - 5n = 25k + 1 \text{ जहाँ } k \text{ एक प्राकृत संख्या है।}$$

$$\text{हम जानते हैं- } (1+a)^n = {}^n C_0 + {}^n C_1 a + {}^n C_2 a^2 + \dots + {}^n C_n a^n$$

$$a = 5, \text{ के लिए हमें प्राप्त होता है,}$$

$$(1+5)^n = {}^n C_0 + {}^n C_1 5 + {}^n C_2 5^2 + \dots + {}^n C_5 5^n$$

$$\text{या } (6)^n = 1 + 5n + 5^2 \cdot {}^n C_2 + 5^3 \cdot {}^n C_3 + \dots + 5^n$$

$$\text{या } 6^n - 5n = 1 + 5^2 ({}^n C_2 + {}^n C_3 5 + \dots + 5^{n-2})$$

$$\text{या } 6^n - 5n = 1 + 25 ({}^n C_2 + 5 \cdot {}^n C_3 + \dots + 5^{n-2})$$

$$\text{या } 6^n - 5n = 25k + 1 \text{ जहाँ } k = {}^n C_2 + 5 \cdot {}^n C_3 + \dots + 5^{n-2}$$

यह दर्शाता है कि जब 6ⁿ - 5n को 25 से भाग किया जाता है तो शेष 1 बचता है।

प्रश्न 22. दिखाइए कि 9ⁿ⁺¹ - 8n - 9, 64 से विभाज्य है, जहाँ n एक धन पूर्णांक है।

$$\text{हल- } 9^{n+1} - 8n - 9 = 9^n \times 9 - 8n - 9$$

$$= (1+8)^n \times 9 - 8n - 9$$

$$= {}^n C_0 + {}^n C_1 8 + {}^n C_2 8^2 + {}^n C_3 8^3 + \dots + {}^n C_n 8^n - 8n - 9$$

$$= (1 + 8n + {}^n C_2 8^2 + {}^n C_3 8^3 + \dots + {}^n C_n 8^n) - 8n - 9$$

$$= 9 + 72n + ({}^n C_2 8^2 + {}^n C_3 8^3 + \dots + {}^n C_n 8^n) - 8n - 9$$

$$= (72n - 8n) + 8^2 ({}^n C_2 + {}^n C_3 8 + \dots + {}^n C_n 8^{n-2}) + 9$$

$$= 64n + 64 ({}^n C_2 + {}^n C_3 8 + \dots + {}^n C_n 8^{n-2}) + 9$$

$$= 64 [n + ({}^n C_2 + {}^n C_3 8 + \dots + {}^n C_n 8^{n-2}) 9]$$

$$= 64 \times \text{कुछ अचर संख्याएँ} = 64 \text{ से भाज्य संख्या } \square$$

अभ्यास-9 अनुक्रम तथा श्रेणी

वस्तुनिष्ठ प्रश्नों पर

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिये-

- (1) श्रेणी 2, 4, 8 ... का 8वाँ पद होगा: (अ) 64 (ब) 128 (स) 256 (द) 512
- (2) श्रेणी a_n = n(n+2) का 5वाँ पद होगा: (अ) 35 (ब) 7 (स) 12 (द) 5
- (3) अनुक्रम $\sqrt{3}, \sqrt{12}, \sqrt{27}, \dots$ का 10वाँ पद होगा? (अ) $10\sqrt{3}$ (ब) $3\sqrt{10}$ (स) $\sqrt{30}$ (द) $3\sqrt{3}$
- (4) यदि किसी समांतर श्रेणी के p वें पद का p गुना, उसी श्रेणी के q गुना के बराबर हो तो उसका (p+q) वाँ पद होगा- (अ) p (ब) q (स) p+q (द) 0
- (5) यदि किसी अनुक्रम का n वाँ पद $na = \frac{1}{2n-1}$ है तो उसका 5वाँ पद होगा? (अ) 1 (ब) $\frac{1}{10}$ (स) $\frac{1}{9}$ (द) 9

(6) अनुक्रम $1 + 2 + 3 + \dots + n$ का योगफल है-

(अ) $\frac{n(n-1)}{2}$

(ब) $\frac{n}{2}$

(स) n^2

(द) $\frac{n(n+1)}{2}$

(7) किसी कल्प में वैश्वरिया को संख्या प्रत्येक घंटे के पर्याप्त दुगुनी हो जाती है यदि प्रारम्भ में उसमें 30 वैश्वरिया उपस्थित हैं तो वैश्वरिया की संख्या दूसरे घण्टे बाद होगी?

(अ) 20

(ब) 120

(स) 480

(द) 60

उत्तर- 1. (स), 2. (अ), 3. (अ), 4. (द), 5. (स), 6. (द), 7. (ब)

प्रश्न 2. रिकत स्थानों की पूर्ति कीजिए-

(1) कोई दो परासक वास्तविक संख्याओं a और b का गुणोत्तर माध्य होता है।

(2) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \dots$ का 5वाँ पद होगा।

(3) अनुक्रम $(-1)^{n-1} 5^n$ का तीसरा पद है।

(4) यदि a, A, b समांतर श्रेणी में हों, तो संख्या A को a और b का कहते हैं।

उत्तर- (1) $\pm \sqrt{ab}$, (2) $5\sqrt{2}$, (3) 625, (4) समांतर माध्य

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए-

(1) दो संख्याओं a और b का समांतर माध्य $\frac{a-b}{2}$ होता है।

(2) 1 और 12 का समांतर माध्य 6 होगा।

(3) यदि किसी समांतर श्रेणी के प्रत्येक पद में एक अक्षर से गुणा किया जाए तो, इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी समांतर श्रेणी होता है।

(4) दो संख्याओं का समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य से छोटा होता है।

(5) श्रेणी 5, 25, 125, ... का n वाँ पद 5^{n+1} है।

उत्तर- (1) असत्य, (2) असत्य, (3) सत्य, (4) असत्य, (5) असत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए-

1) गुणोत्तर श्रेणी a, ar, ar^2, \dots का n वाँ पद लिखिए।

2) गुणोत्तर श्रेणी a, ar, ar^2, \dots के n पदों का योग का सूत्र लिखिए।

3) समांतर श्रेणी $a, a+d, a+2d, \dots$ का n वाँ पद लिखिए।

4) समांतर श्रेणी $a, a+d, a+2d, \dots$ के n पदों का योग T सूत्र लिखिए।

उत्तर- (1) ar^{n-1} , (2) $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, $r < 1$, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, $r > 1$, (3) $a + (n-1)d$, (4) $\frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$

प्रश्न 5. यदि किसी अनुक्रम का n वाँ पद $a_n = n \cdot \frac{n^2+5}{4}$ हो, तो उसका 10वाँ पद लिखिए।

हल- दिया है, $a_n = \frac{n(n^2+5)}{4}$

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर,

$$a_1 = \frac{1(1^2+5)}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$a_2 = \frac{2(2^2+5)}{4} = \frac{2(4+5)}{4} = \frac{9}{2}$$

$$a_3 = \frac{3(3^2+5)}{4} = \frac{3(9+5)}{4} = \frac{21}{4}$$

$$a_4 = \frac{4(4^2+5)}{4} = \frac{4(16+5)}{4} = 21$$

$$a_5 = \frac{5(5^2+5)}{4} = \frac{5(25+5)}{4} = \frac{75}{4}$$

प्रश्न 6. अनुक्रम $a_n = (n-1)(2-n)(3+n)$ द्वारा परिभाषित अनुक्रम का 20वाँ पद क्या है?

हल- हम $n = 20$ रखने पर, पाते हैं

$$a_{20} = (20-1)(2-20)(3+20) = 19 \times (-18) \times (23) = -7866.$$

प्रश्न 7. यदि किसी समांतर श्रेणी के n पदों का योग $nP + \frac{1}{2}n(n-1)Q$ है जहाँ P तथा Q अचर तो सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

हल- माना कि a_1, a_2, \dots, a_n दी गई समांतर श्रेणी है, तो

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = nP + \frac{1}{2}n(n-1)Q$$

$$\text{इसलिए } S_1 = a_1 = P, S_2 = a_1 + a_2 = 2P + Q$$

$$\text{तो सार्व अंतर है } d = a_2 - a_1 = (P+Q) - P = Q$$

प्रश्न 8. माना कि a_n निम्नलिखित रूप में परिभाषित है:

$$a_1 = 3$$

$$a_n = 3a_{n-1} + 2 \text{ सभी } n > 1 \text{ तो अनुक्रम के प्रथम पाँच पद ज्ञात कीजिए तथा संगत श्रेणी लिखिए।}$$

$$\text{हल- } a_1 = 3, a_2 = 3a_{n-1} + 2, \text{ सभी } n > 1 \text{ के लिए}$$

$$\text{दिया है } a_1 = 3$$

$$a_3 = 3a_{n-1} + 2$$

$$\Rightarrow a_3 = 3(11) + 2 = 33 + 2 = 35$$

$$a_4 = 3a_{n-1} + 2 = 3a_3 + 2 = 3(35) + 2 = 105 + 2 = 107$$

$$\Rightarrow a_5 = 3a_{n-1} + 2 = 3(107) + 2 = 321 + 2 = 323$$

$$= 3(107) + 2 = 321 + 2 = 323$$

अतः अभीष्ट श्रेणी 3, 11, 35, 107, 323, होगी। उत्तर प्रश्न 9. माना कि अनुक्रम a_n निम्नलिखित रूप में परिभाषित है:

$$a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 2 \text{ for } n \geq 2.$$

तो अनुक्रम के पाँच पद ज्ञात कीजिए तथा संगत श्रेणी लिखिए।

हल- हम पाते हैं:

$$a_1 = 1, a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3, a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5, a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7, a_5 = a_4 + 2 = 7 + 2 = 9.$$

अतः अनुक्रम के प्रथम पाँच पद 1, 3, 5, 7 तथा 9 हैं। संगत श्रेणी $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots$ है।

प्रश्न 10. माना कि a_n निम्नलिखित रूप में परिभाषित है:

$$a_1 = -1, a_n = \frac{a_{n-1}}{n} \text{ जहाँ } n \geq 2.$$

$$\text{ज्ञात कीजिए तथा संगत श्रेणी लिखिए।}$$

$$\text{हल- (a) } a_1 = -1, a_n = \frac{a_{n-1}}{n} \text{ जहाँ } n \geq 2.$$

$$\text{दिया है } a_1 = -1$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n} \text{ जहाँ } n \geq 2$$

$$\therefore a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{-1}{2 \times 3} = -\frac{1}{6}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{-1}{6 \times 4} = -\frac{1}{24}$$

$$a_5 = \frac{a_4}{5} = \frac{-1}{24 \times 5} = -\frac{1}{120}$$

प्रश्न 11. माना कि a_n निम्नलिखित रूप में परिभाषित है:

$$a_1 = a_2 = 2, a_n = a_{n-1} - 1 \text{ जहाँ } n > 2 \text{ तो अनुक्रम के प्रथम पाँच पद ज्ञात कीजिए तथा संगत श्रेणी लिखिए।}$$

$$\text{हल- } a_1 = a_2 = 2, a_n = a_{n-1} - 1, n > 2$$

$$\text{दिया है, } a_1 = a_2 = 2$$

$$a_n = a_{n-1} - 1, n > 2$$

$$n = 3 \text{ रखने पर, } a_3 = a_2 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\text{रखने पर, } a_4 = a_3 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$n = 5 \text{ रखने पर, } a_5 = a_4 - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$\text{श्रेणी है, } 2 + 2 + 1 + 0 + (-1) + \dots$$

प्रश्न 12. यदि किसी समांतर श्रेणी का m वाँ पद n तथा n वाँ पद m , जहाँ $m \neq n$, हो तो p वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल- हम पाते हैं:

$$a_m = a + (m-1)d = n, a_n = a + (n-1)d = m, \dots (1)$$

$$\text{या } a_m = a + (n-1)d = m, \dots (2)$$

$$(1) \text{ और } (2) \text{ को हल करने पर, हम पाते हैं: } (m-n)d = n-m, \text{ या } d = -1, \dots (3)$$

$$\text{तथा } a = n + m - 1$$

$$\text{इसलिए } a_p = a + (p-1)d = n + m - 1 + (p-1)(-1) = n + m - p$$

अतः p वाँ पद $n + m - p$ है।

प्रश्न 13. ऐसी 6 संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनको 3 और 24 के बीच रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक समांतर श्रेणी बन जाए।

हल- माना कि A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 तथा A_6 3 तथा 24 के मध्य 6 संख्याएँ हैं,

$$\text{इसलिए } A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 \text{ 24 समांतर श्रेणी में हैं।}$$

$$\text{यहाँ } a = 3, B = 24, N = 8.$$

नि. पी. एच. प्रश्न बैंक

4. 1 से 2001 तक के विषम पूर्णांकों का योग ज्ञात

$$= \frac{pq}{2} \left[2 \times \frac{1}{pq} + (pq-1) \frac{1}{pq} \right]$$

71. से 2001 तक के विषम पूर्णांकों की श्रेणी है, 1 + 7 + ... + 2001

$$= \frac{1}{2} (2 + pq - 1) = \frac{1}{2} (pq + 1)$$

यही सिद्ध करना था

हल- मान $a = 1$

$d = 2$
तो है कि श्रेणी का n वाँ पद $T_n = a + (n-1)d$

$$1 = 1 + (n-1)2 \quad (\because a = 1, T_n = 2001 \text{ दिया है})$$

$$0 = (n-1)2 \Rightarrow (n-1) = \frac{2000}{2}$$

$$1 = 1000 \Rightarrow n = 1001$$

$$n \text{ पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।}$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$2 \times (1 + 1001-1) = 1001 \times 1001 = 1002001$$

यदि किसी संश्लेषण का p वाँ पद $\frac{1}{q}$ तथा q वाँ पद $\frac{1}{p}$ हो, जहाँ $p \neq q$

हो, तो श्रेणी का प्रथम pq पदों का योग ज्ञात कीजिए कि प्रथम pq पदों का योग $\frac{1}{2}$

$$1 + (p-1)d = \frac{1}{q} \quad \dots (1)$$

$$1 + (q-1)d = \frac{1}{p} \quad \dots (2)$$

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{p} = (p-q)d$$

$$\frac{p-q}{pq} = (p-q)d \quad [\because p-q \neq 0]$$

$$\frac{1}{pq} = d$$

$$\frac{1}{pq} = \frac{1}{pq}$$

$$\frac{1}{pq} = \frac{1}{pq}$$

$$\frac{1}{pq} = \frac{1}{pq}$$

$$\frac{1}{pq} = \frac{1}{pq}$$

$$\frac{1}{pq} = \frac{1}{pq}$$

$$\Rightarrow (n-2) 360 = n(5n+235)$$

$$\Rightarrow (n-2) 72 = n(n+47) \Rightarrow 72n - 144 = n^2 + 47n$$

$$\Rightarrow (n-16)(n-9) = 0$$

$$n = 9, 16$$

केवल $n = 9$ अर्थात् गुणजों की संख्या है।

प्रश्न 18. एक गुणोत्तर श्रेणी में तीसरा पद 24 तथा 6वाँ पद 1/2 है, तो 10वाँ पद ज्ञात कीजिए।

$$a_3 = ar^2 = 24$$

$$a_6 = ar^5 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_6}{a_3} = \frac{ar^5}{ar^2} = \frac{1/2}{24} \Rightarrow r^3 = \frac{1}{48}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{48}}$$

$$a_3 = ar^2 = 24 \Rightarrow a = 24 \times \frac{48}{1} = 1152$$

$$a_{10} = ar^9 = 1152 \times \left(\frac{1}{48}\right)^3 = \frac{1152}{110592} = \frac{1}{96}$$

$$a_{10} = \frac{1}{96}$$

$$a_{10} = \frac{1}{96}$$

$$a_{10} = \frac{1}{96}$$

$$a_{10} = \frac{1}{96}$$

$$a_{10} = \frac{1}{96}$$

$$a_{10} = \frac{1}{96}$$

$$a_{10} = \frac{1}{96}$$

$$a_{10} = \frac{1}{96}$$

$$a_{10} = \frac{1}{96}$$

$$a_{10} = \frac{1}{96}$$

$$a_{10} = \frac{1}{96}$$

$$a_{10} = \frac{1}{96}$$

$$a_{10} = \frac{1}{96}$$

$$a_{10} = \frac{1}{96}$$

$$= \frac{8}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right]$$

$$\therefore S = \frac{80}{81} (10^n - 1) - \frac{8n}{9}$$

प्रश्न 21. श्रेणी 5 + 55 + 555 + 5555 + ... के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल- मान लीजिए $S = 5 + 55 + 555 + \dots + n$ पदों तक

$$= 5(1 + 11 + 111 + \dots + n \text{ पदों तक})$$

$$= \frac{5}{9} (9 + 99 + 999 + \dots + n \text{ पदों तक})$$

$$= \frac{5}{9} [(10-1) + (100-1) + (1000-1) + \dots + n \text{ पदों तक}]$$

$$= \frac{5}{9} [(10 + 100 + 1000 + \dots + n \text{ पदों तक}) - (1 + 1 + 1 + \dots + n \text{ पदों तक})]$$

$$= \frac{5}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right]$$

$$= \frac{5}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right]$$

$$= \frac{5}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right]$$

$$= \frac{5}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right]$$

$$= \frac{5}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right]$$

$$= \frac{5}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right]$$

$$= \frac{5}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right]$$

$$= \frac{5}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right]$$

$$= \frac{5}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right]$$

$$= \frac{5}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right]$$

$$= \frac{5}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right]$$

$$= \frac{5}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right]$$

$$= \frac{5}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right]$$

$$= \frac{5}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right]$$

$$= \frac{5}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right]$$

$$\left[\because \text{गुणोत्तर श्रेणी का योग} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r < 1 \right]$$

$$\left[\begin{aligned} & \frac{1}{10} \left[1 - \left(\frac{1}{10} \right)^n \right] \\ & = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{n-9} \left[1 - \left(\frac{1}{10} \right)^n \right] \right] \end{aligned} \right]$$

23. फाइबोनाची (Fibonacci) अनुक्रम निम्नलिखित परिभाषित है $1 = a_1 = a_2$, या $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, तो a_n ज्ञात कीजिए, जबकि $n = 1, 2, 3, 4, 5$ पर, $1 = a_1 = a_2$

$$\begin{aligned} a_3 &= a_{n-1} + a_{n-2}, n > 2 \\ 3, 4, 5, 6 \text{ रखते पर,} \\ a_3 &= a_2 + a_1 \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 + a_2 \\ &= 2 + 1 = 3 \\ a_5 &= a_4 + a_3 \\ &= 3 + 2 = 5 \\ a_6 &= a_5 + a_4 \\ &= 5 + 3 = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n, n = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ के लिए} \\ a_n &= 1 \\ a_1 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 2 \text{ पर, } a_2 &= 2 \\ n = 3 \text{ पर, } a_3 &= 3 \\ n = 4 \text{ पर, } a_4 &= 5 \\ n = 5 \text{ पर, } a_5 &= 8 \end{aligned}$$

$$1, 2, \frac{3}{2}, \text{ तथा } \frac{5}{2} \text{ है।}$$

24. दो समांतर श्रेणियों के n पदों के योगफल का $n(3n + 8) : (7n + 15)$ है। 12वें पद का अनुपात निम्न है।

मान लें a_1, a_2 तथा d_1, d_2 क्रमशः प्रथम एवं द्वितीय श्रेणियों के प्रथम पद तथा सर्व अंतर हैं, तो दी हुई अनुपात, हम पाते हैं-

$$\begin{aligned} \text{प्रथम समांतर श्रेणी के } n \text{ पदों का योग} &= \frac{3n+8}{2} \\ \text{द्वितीय समांतर श्रेणी के } n \text{ पदों का योग} &= \frac{7n+15}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n[2a_1 + (n-1)d_1]}{2} &= \frac{3n+8}{2} \\ \frac{n[2a_2 + (n-1)d_2]}{2} &= \frac{7n+15}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{प्रथम समांतर श्रेणी का 12वाँ पद} &= a_1 + 11d_1 \\ \text{द्वितीय समांतर श्रेणी का 12वाँ पद} &= a_2 + 11d_2 \\ \frac{2a_1 + 22d_1}{2} &= \frac{3 \times 23 + 8}{2} \quad [(1) \text{ में } n = 23 \text{ रखते पर}] \\ 2a_1 + 22d_1 &= 7 \times 23 + 15 \end{aligned}$$

अतः चालिअ अनुपात 7 : 16 है।
प्रश्न 25. दो समांतर श्रेणियों के n पदों के योगफल का अनुपात $5n + 4 : 9n + 6$ हो, तो उनके 18वें पदों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
हल- मान लीजिए दो समांतर श्रेणी क्रमशः निम्न हैं:
 $a, a+d, a+2d, \dots$
और $A, A+D, A+2D, \dots$

$$\begin{aligned} \text{प्रथम समांतर श्रेणी के } n \text{ पदों का योगफल} &= \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \\ \text{दूसरे समांतर श्रेणी के } n \text{ पदों का योगफल} &= \frac{n}{2} [2A + (n-1)D] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{S'_n} &= \frac{5n+4}{9n+6} \\ \frac{\frac{n}{2} [2a + (n-1)d]}{\frac{n}{2} [2A + (n-1)D]} &= \frac{5n+4}{9n+6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2a + (n-1)d}{2A + (n-1)D} &= \frac{5n+4}{9n+6} \\ \frac{2a + (n-1)d}{2A + (n-1)D} &= \frac{5n+4}{9n+6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a + \left(\frac{n-1}{2} \right) d}{A + \left(\frac{n-1}{2} \right) D} &= \frac{5n+4}{9n+6} \\ \frac{n-1}{2} &= 17 \text{ रखते पर,} \\ n-1 &= 34 \Rightarrow n = 35 \end{aligned}$$

$$\frac{a+17d}{A+17D} = \frac{5 \times 35 + 4}{9 \times 35 + 6}$$

$$\frac{T_{18}}{T'_18} = \frac{175+4}{315+6} = \frac{179}{321}$$

प्रश्न 26. यदि किसी समांतर श्रेणी के प्रथम p, q, r पदों का योगफल क्रमशः a, b तथा c हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{a}{p}(q-r) + \frac{b}{q}(r-p) + \frac{c}{r}(p-q) = 0$

$$\begin{aligned} \text{हल- मान लीजिए समांतर श्रेणी का प्रथम पद } A \text{ तथा सर्वान्तर } d \text{ है।} \\ \text{दिया है, } S_p = a \Rightarrow \frac{p}{2} [2A + (p-1)d] = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_q = b \Rightarrow \frac{q}{2} [2A + (q-1)d] = b \\ S_r = c \Rightarrow \frac{r}{2} [2A + (r-1)d] = c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{p}(q-r) + \frac{b}{q}(r-p) + \frac{c}{r}(p-q) = 0 \text{ सिद्ध करना है।} \\ \text{बायाँ पक्ष} = \frac{a}{p}(q-r) + \frac{b}{q}(r-p) + \frac{c}{r}(p-q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{बायाँ पक्ष} &= \frac{1}{r} \times \frac{p}{2} [2A + (p-1)d] (q-r) + \frac{1}{q} \times \frac{q}{2} [2A + (q-1)d] (r-p) + \frac{1}{r} \times \frac{r}{2} [2A + (r-1)d] (p-q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} [2A + (p-1)d] (q-r) + [2A + (q-1)d] (p-q) \\ &= \frac{1}{2} [2A + (p-1)d] (q-r) + 2A(r-p) + (q-1)d(p-q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} [2A(q-r) + (p-1)d(q-r) + 2A(r-p) + (q-1)d(p-q)] \\ &= \frac{1}{2} [2A(q-r+p-p) + 2A(p-q) + (r-1)d(p-q)] \\ &= \frac{1}{2} [2A \times (0) + d(pq - pr - q + rqr - pq - r + p + pr - rp - p + a)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (0 + d \times 0) = 0 \\ \therefore \text{बायाँ पक्ष} &= \text{दायाँ पक्ष} \end{aligned}$$

प्रश्न 27. यदि a और b का समा. $\frac{a^n + b^n}{a^{n-1} + b^{n-1}}$ हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।
हल- a और b का समा. $= \frac{a+b}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{a^n + b^n}{a^{n-1} + b^{n-1}} &= \frac{a+b}{2} \\ 2a^n + 2b^n &= (a+b)(a^{n-1} + b^{n-1}) \\ 2a^n + 2b^n &= a^n + b^n + ab^{n-1} + ba^{n-1} \\ a^n + b^n &= ab^{n-1} + ba^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^{n-1}(a-b) &= b^{n-1}(a-b) \\ a^{n-1} &= b^{n-1} \\ \left(\frac{a}{b} \right)^{n-1} &= 1 = \left(\frac{a}{b} \right)^0 \\ n-1 &= 0 \\ n &= 1. \end{aligned}$$

प्रश्न 28. यदि दो घनात्मक संख्याओं a तथा b के बीच समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य क्रमशः 10 तथा 8 हैं, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
हल- दिया है $A.M. = \frac{a+b}{2} = 10$
तथा $G.M. = \sqrt{ab} = 8$

$$\begin{aligned} (1) \text{ तथा } (2) \text{ से हम पाते हैं} \\ a+b &= 20 \\ ab &= 64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3), (4) \text{ से } a \text{ तथा } b \text{ का मान सर्वसंयुक्त (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab \text{ से रखने पर हम पाते हैं} \\ (a-b)^2 &= 400 - 256 = 144 \text{ या } a-b = \pm 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ तथा } (4) \text{ को हल करने पर, हम पाते हैं} \\ a=4, b=16 \text{ या } a=16, b=4. \end{aligned}$$

प्रश्न 29. D का मान ज्ञात कीजिए ताकि $\frac{a^{2n+1} + b^{2n+1}}{a^{2n} + b^{2n}} = \sqrt{ab}$, a तथा b के बीच गुणोत्तर माध्य हो।
हल- दिया है, $\frac{a^{2n+1} + b^{2n+1}}{a^{2n} + b^{2n}} = \sqrt{ab}$

$$\begin{aligned} \frac{a^{2n+1} + b^{2n+1}}{a^{2n} + b^{2n}} &= \frac{1}{\sqrt{ab}} \\ a^{2n+1} + b^{2n+1} &= (a^2 + b^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}} \end{aligned}$$

50/ चौ. पी. एच. प्रश्न हलक

$$\Rightarrow a^{n+1} + b^{n+1} = a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} + a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}$$

$$\Rightarrow a^{n+1} + b^{n+1} - a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} - a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow (a^{\frac{n+1}{2}} - a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}) + (b^{\frac{n+1}{2}} - a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}}) = 0$$

$$\Rightarrow a^{\frac{n+1}{2}} [a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{n+1}{2}}] - b^{\frac{n+1}{2}} [a^{\frac{n+1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}] = 0$$

$$\Rightarrow (a^{\frac{n+1}{2}} - b^{\frac{n+1}{2}}) (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}) = 0$$

$$\Rightarrow a^{\frac{n+1}{2}} - b^{\frac{n+1}{2}} = 0 \quad \left(\because a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \neq 0 \right)$$

$$\Rightarrow a^{\frac{n+1}{2}} = b^{\frac{n+1}{2}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{n+1}{2}} = 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{n+1}{2}} = \left(\frac{a}{b} \right)^0$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow n = -1$$

दोनों ओर आधार (a/b) को घात की तुलना करने पर,

$$\Rightarrow \frac{n+1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow n = -1$$

प्रश्न 30. एक व्यक्ति की प्रथम वर्ष में आय 3,00,000 रुपये है तथा उसकी आय 10,000 रुपये प्रति वर्ष, तब तक बढ़ती है, तो उसके द्वारा 20 वर्षों में प्राप्त आय ज्ञान कीजिए।

हल- वर्ष, हम पाते हैं, समांतर श्रेणी जिसका
 $a = 3,00,000$, $d = 10,000$ तथा $n = 20$
 जो: S_n का उपयोग करने पर, हम पाते हैं,

$$S_{20} = \frac{20}{2} [600000 + 19 \times 10000] = 10 (790000) = 79,00,000$$

यह अर्थ है 20 वर्ष के अंत में 79,00,000 रुपये प्राप्त करने की प्रत्याशा है।
 प्रश्न 31. 100 तथा 1000 के मध्य उन सभी प्राकृत संख्याओं के योगफल ज्ञान कीजिए जो 5 के गुणक हैं।
 हल- प्रथम संख्या, संख्याएँ हैं 105, 110, 115, ..., 995
 पहला पद, $a = 105$,
 समांतर, $d = 110 - 105 = 5$
 नवीं पद $T_n = a + (n-1)d$
 $995 = 105 + (n-1)5 \quad (\because a = 105, T_n = 995)$
 $890 = (n-1)5$
 $n-1 = \frac{890}{5} \Rightarrow n-1 = 178$

$$n = 178 + 1 = 179$$

अर्थात् संख्याओं का योग

$$S_n = \frac{n}{2} [2 \times 105 + (179-1)5]$$

$$= \frac{179}{2} [210 + 178 \times 5]$$

$$= \frac{179}{2} [210 + 890] = \frac{179}{2} \times 1100$$

$$= 179 \times 550 = 98450$$

प्रश्न 32. किसी समांतर श्रेणी में प्रथम पद 2d तथा प्रथम पाँच पदों का योगफल, आठवें पाँच पदों के योगफल का एक-चौथाई है। दर्शाइए कि 20वाँ पद - 112 है।
 हल- मान लीजिए समांतर श्रेणी है,
 $a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$
 दिया है, $a = 2$

प्रथम पाँच पदों का योग = $\frac{1}{4}$ आठवें पाँच पदों का योग

$$a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + a + 4d$$

$$= \frac{1}{4} [a + 5d + a + 6d + a + 7d + a + 8d + a + 9d]$$

$$5a + 10d = \frac{1}{4} [5a + 35d]$$

$$4(5a + 10d) = 5a + 35d \Rightarrow 20a - 5a = 35d - 40d$$

$$15a = -5d \Rightarrow 15 \times 2 = -5d \quad (\because a = 2)$$

$$30 = -5d$$

$$d = \frac{-30}{5} = -6$$

अब, $T_n = a + (n-1)d$
 $T_{20} = 2 + (20-1)(-6) = 2 + 19(-6)$
 $= 2 - 19 \times 6 = 2 - 114 = -112$

प्रश्न 33. समांतर श्रेणी -6, - $\frac{11}{2}$, -5... के कितने पदों का योगफल -25 है?
 हल- दिए हुए अनुक्रम -6, - $\frac{11}{2}$, -5... समांतर श्रेणी में है।
 यहाँ, $a = -6$, $d = -\frac{11}{2} - (-6) = -\frac{11}{2} + 6 = -\frac{11}{2} + \frac{12}{2} = \frac{1}{2}$

$$d = \frac{-11 + 12}{2} = \frac{1}{2}$$

अब, $S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$
 $-25 = \frac{n}{2} [2 \times (-6) + (n-1) \frac{1}{2}]$

$$\Rightarrow -25 \times 2 = n \left[\frac{-12 + (n-1)}{2} \right]$$

$$\Rightarrow -50 = n \left[\frac{-24 + n - 1}{2} \right]$$

$$\Rightarrow -50 \times 2 = n(n-25)$$

$$\Rightarrow -100 = n^2 - 25n$$

$$\Rightarrow n^2 - 25n + 100 = 0$$

अब पद को विभक्त कर गुणनखंड करने पर,
 $n^2 - (20+5)n + 100 = 0$
 $n^2 - 20n - 5n + 100 = 0$
 $n(n-20) - 5(n-20) = 0 \Rightarrow n = 5, 20$

प्रश्न 34. यदि किसी समांतर श्रेणी 25, 22, 19... के कुछ पदों का योगफल 116 है, तो अंतिम पद ज्ञान कीजिए।
 हल- दी हुई समांतर श्रेणी 25, 22, 19... है।
 यहाँ $a = 25$, $d = -3$ तथा $S_n = 116$
 $S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$
 $116 = \frac{n}{2} [2 \times 25 + (n-1)(-3)]$
 $116 \times 2 = n[50 - 3n + 3]$
 $232 = n[53 - 3n]$
 $232 = 53n - 3n^2$
 $3n^2 - 53n + 232 = 0$

अब, मध्य पद विभक्त कर गुणनखंड करने पर,
 $3n^2 - (7 \times 4 + 29)n + 232 = 0$
 $3n^2 - 28n - 29n + 232 = 0$
 $3n(n-8) - 29(n-8) = 0$
 $(3n-29)(n-8) = 0$
 $n = \frac{29}{3}, n = 8$

$n = 29$ अमान्य है क्योंकि n भिन्न नहीं हो सकता। अतः
 $n = 8$ केवल $n = 8$ मान्य है।
 अब, $T_n = a + (n-1)d$
 $T_8 = 25 + (8-1)(-3)$
 $= 25 + 7 \times (-3) = 25 - 21 = 4$

प्रश्न 35. उस समांतर श्रेणी के n पदों का योगफल ज्ञान कीजिए, जिसका K वाँ पद $5K + 1$ है।
 हल- दिया है, K वाँ पद $T_K = 5K + 1$
 $K = 1, 2, 3, 4, \dots$ रखने पर,
 $T_1 = 5 \times 1 + 1 = 6$

$$T_2 = 5 \times 2 + 1 = 11$$

$$T_3 = 5 \times 3 + 1 = 16$$

रखने पर
 $a = 6, d = 11 - 6 = 5$

अब, $S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] = \frac{n}{2} [2 \times 6 + (n-1)5]$
 $= \frac{n}{2} [12 + 5n - 5] = \frac{n}{2} [5n + 7]$

प्रश्न 36. यदि किसी समांतर श्रेणी के n पदों का योगफल $(pn + qn^2)$ है, यहाँ p तथा q अचर हैं, तो समांतर श्रेणी कीजिए।
 हल- दिया है, $S_n = pn + qn^2$
 अब, $T_n = S_n - S_{n-1}$
 $T_n = (pn + qn^2) - [p(n-1) + q(n-1)^2]$
 $= pn + qn^2 - [pn - p + q(n^2 + 1 - 2n)]$
 $= pn + qn^2 - (pn - p + qn^2 + q - 2qn)$
 $= pn + qn^2 - pn + p - qn^2 - q + 2qn$
 $= p - q + 2qn$

अब, $n = 1, 2, 3, \dots$ रखने पर,
 $T_1 = p - q + 2q \times 1 = p - q + 2q = p + q$
 $T_2 = p - q + 2q \times 2 = p - q + 4q = p + 3q$
 $T_3 = p - q + 2q \times 3 = p - q + 6q = p + 5q$
 \dots
 अतः श्रेणी है $p + q, p + 3q, p + 5q, \dots$
 जिसका सर्वांतर = $(p + 3q) - (p + q) = 2q$

प्रश्न 37. गुणोत्तर श्रेणी 3, $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \dots$ के कितने पद आसन्न अक्षरों में हैं ताकि उनका योगफल 512 हो सके।
 हल- माना कि n आसन्न अक्षरों का योगफल 512 है।
 $a = 3, r = \frac{1}{2}$ तथा $S_n = 512$

क्योंकि $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$
 $512 = \frac{3(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = 6(1-\frac{1}{2^n})$
 $\frac{3069}{512} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^n}}$
 $\frac{3069}{3072} = 1 - \frac{1}{2^n}$

या $1 - \frac{3069}{2^n} = 1 - \frac{3072}{2^n}$

या $1 - \frac{3}{2^n} = \frac{3072}{2^n}$

या $2^n = 1024$

प्रश्न 38. एक गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम तीन पदों का योगफल

12 है तथा उनका गुणानफल 1 है, तो सार्व अनुपात तथा

पदों को ज्ञात कीजिए?

हल- माना $\frac{a}{r}, a, ar$ गुणोत्तर श्रेणी के तीन पद हैं तो

$\frac{a}{r} + a + ar = 12$... (1)

तथा $\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = -1$... (2)

(2) से हम पाते हैं $a^3 = -1$ अर्थात् $a = -1$ (केवल वास्तविक मूल पर विचार करने से)

(1) में $a = -1$ रखने पर हम पाते हैं

$-\frac{1}{r} - 1 - r = \frac{13}{12}$ या $12r^2 + 25r + 12 = 0$

यह r में द्विघात समीकरण है, जिसे हल करने पर हम पाते

हैं $r = -\frac{3}{4}$ या $-\frac{4}{3}$

अतः गुणोत्तर श्रेणी के तीन पद हैं

$\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}$ के लिए तथा $\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}$ के लिए

प्रश्न 39. ऐसी 3 संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनको 1 तथा 256 के बीच रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेणी बना जाए।

हल- माना कि G_1, G_2, G_3 तीन गुणोत्तर माध्य 1 तथा 256 के बीच में हैं।

$1, G_1, G_2, G_3, 256$ गुणोत्तर श्रेणी में है।

इसलिए $256 = r^4$ जिससे $r = \pm 4$ (केवल वास्तविक मूल लेने पर) $r = 4$ के लिए हम

पाते हैं $G_1 = ar = 4, G_2 = ar^2 = 16, G_3 = ar^3 = 64$

इसी प्रकार $r = -4$ के लिए संख्याएँ $-4, 16, 64$ हैं।

अतः 1 तथा 256 के बीच तीन संख्याएँ $4, 16, 64$ हैं।

प्रश्न 40. किसी गुणोत्तर श्रेणी का 5वाँ, 8वाँ तथा 11वाँ पद क्रमशः p, q तथा s हैं, तो दिखाइए कि $p^2 = ps$

हल- माना समान्तर श्रेणी का प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r है।

$T_n = ar^{n-1}$
 $T_3 = ar^2 = p$
 $T_8 = ar^7 = q$
 $T_{11} = ar^{10} = s$

$ar^2 = p$
 $ar^7 = q$
 $ar^{10} = s$

$ps = ar^2 \cdot ar^7 = a^2 r^9$
 $qs = ar^7 \cdot ar^{10} = a^2 r^{17}$
 $q^2 = ps$

$ps = q^2$
 $q^2 = ps$

$ps = q^2$
 $q^2 = ps$

$ps = q^2$
 $q^2 = ps$

$ps = q^2$
 $q^2 = ps$

$ps = q^2$
 $q^2 = ps$

$ps = q^2$
 $q^2 = ps$

$ps = q^2$
 $q^2 = ps$

$ps = q^2$
 $q^2 = ps$

$ps = q^2$
 $q^2 = ps$

$ps = q^2$
 $q^2 = ps$

$ps = q^2$
 $q^2 = ps$

$ps = q^2$
 $q^2 = ps$

$ps = q^2$
 $q^2 = ps$

$ps = q^2$
 $q^2 = ps$

$ps = q^2$
 $q^2 = ps$

अध्याय-10 सरल रेखाएँ

वस्तुनिष्ठ प्रश्नोत्तर

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिये-

(1) यदि एक रेखा x - अक्ष को धन दिशा से α कोण बनाती है तो रेखा का ढाल होगा-

(अ) $\tan \alpha$ (ब) $\cot \alpha$ (स) $\sin \alpha$ (द) $\cos \alpha$

(2) दो रेखाएँ परस्पर संलंबवत हैं तो उनके ढालों का गुणनफल होगा-

(अ) 0 (ब) 1 (स) -1 (द) 2

(3) यदि m_1 और m_2 ढाल वाली दो रेखाओं के बीच का कोण θ हो तो-

(अ) $\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$ (ब) $\tan \theta = \left| \frac{m_2 + m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$

(स) $\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 - m_1 m_2} \right|$ (द) $\tan \theta = \left| \frac{m_2 + m_1}{1 - m_1 m_2} \right|$

(4) दो रेखाएँ जिनके ढाल m_1 और m_2 हैं, समांतर होंगी यदि

(अ) $m_1 = m_2$ (ब) $m_1 = -m_2$
(स) $m_1 = m_2^2$ (द) $m_1 = m_2^2$

(5) दो बिन्दुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) से होकर जाने वाली रेखा का ढाल =

(अ) $\frac{y_2 + y_1}{x_2 - x_1}$ (ब) $\frac{y_2 - y_1}{x_2 + x_1}$

(स) $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (द) $\frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}$

उत्तर- (1) (अ), (2) (स), (3) (अ), (4) (अ), (5) (स)

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

(1) क्षैतिज रेखा की ढाल शून्य है और कर्णांतर रेखा की ढाल

..... है।

(2) दो रेखाएँ समांतर होती हैं यदि और केवल यदि उनके ढाल

(3) यदि एक रेखा x - अक्ष को धन दिशा से α , $\alpha \neq 90^\circ$ कोण बनाती है तो रेखा की ढाल

(4) यदि AB की ढाल = BC की ढाल तो बिंदु A, B और C

उत्तर- (1) अपरिभाषित, (2) समान, (3) $\tan \alpha$ (4) संरेख, $m_1 m_2 = -1$ और m_2 ढालों वाली रेखाओं L_1 और L_2 के बीच का कोण θ हो तो $\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$, $1 + m_1 m_2 \neq 0$.

(2) तीन बिंदु A, B और C संरेख होते हैं यदि और केवल यदि AB की ढाल = BC की ढाल।

(3) दो बिन्दुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण है:

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$

(4) ढाल m और y - अंतःखण्ड c वाली रेखा का समीकरण है $y = mx + c$

(5) ढाल m और x - अंतःखण्ड d वाली रेखा का समीकरण है $y = m(x + d)$.

उत्तर- (1) सत्य, (2) सत्य, (3) असत्य, (4) सत्य, (5) असत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द या वाक्य में उतर लिखिए-

(1) बिंदु (-2, 3) से जाने वाली और ढाल -4 की रेखा का समीकरण लिखिए।

(2) उस रेखा का समीकरण लिखिए जो x - अक्ष और y - अक्ष से क्रमशः -3 और 2 के अंतः खंड बनाती है।

(3) उस रेखा के ढाल का मान कितना होगा जो बिन्दुओं (3, -2) और (-1, 4) से होकर जाती है।

(4) उस रेखा के ढाल का मान कितना होगा जो धन x - अक्ष से 60° का कोण बनाती है।

उत्तर- (1) $4x + y + 5 = 0$, (2) $2x - 3y + 6 = 0$, (3) $-\frac{3}{2}$, (4) $\sqrt{3}$.

प्रश्न 5. (-2, 6) और (4, 8) बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा (8, 12) और (x, 24) बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा पर लम्ब है। x का मान ज्ञात कीजिए।

हल- बिन्दुओं (-2, 6) और (4, 8) से जाने वाली रेखा का ढाल-

$m_1 = \frac{8 - 6}{4 - (-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

बिन्दुओं (8, 12) और (x, 24) से जाने वाली रेखा का ढाल:

$m_2 = \frac{24 - 12}{x - 8} = \frac{12}{x - 8}$

अतः दो रेखाएँ लम्बवत होती हैं,

$m_1 m_2 = -1$, theb $\frac{1}{3} \times \frac{12}{x - 8} = -1$ or $x = 4$

प्रश्न 6. बिन्दुओं (1, -1) और (3, 5) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण लिखिए।

हल- यहाँ $x_1 = 1, y_1 = -1, x_2 = 3$ और $y_2 = 5$, दो बिंदु रूप सूत्र (2) के प्रयोग से रेखा का समीकरण, हम पाते हैं

$y - (-1) = \frac{5 - (-1)}{3 - 1} (x - 1)$

या $-3x + y + 4 = 0$, जो अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्न 7. उस रेखा का समीकरण लिखिए जिनके लिए $\tan \theta = \frac{1}{2}$, यहाँ θ रेखा का झुकाव है और y - अंतःखंड $-\frac{3}{2}$ है।

हल- (1) यहाँ रेखा की ढाल = $m = \tan \theta = \frac{1}{2}$ और y - अंतःखंड $c = -\frac{3}{2}$, इसलिए, ढाल-अंतःखंड रूप उपर्युक्त सूत्र (3) से रेखा का समीकरण $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ या $2y - x + 3 = 0$ है, जो अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्न 8. उस रेखा का समीकरण लिखिए जिनके लिए $\tan \theta = \frac{1}{2}$, यहाँ θ का झुकाव है और x - अंतःखण्ड 4 है।

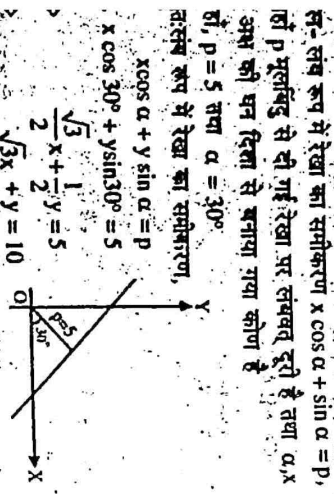
हल- यहाँ, $m = \tan \theta = \frac{1}{2}$ और $d = 4$ ।

इसलिए, ढाल-अंतःखंड रूप उपर्युक्त सूत्र (4) से रेखा का समीकरण

$y = \frac{1}{2}(x - 4)$ या $2y - x + 4 = 0$

है, जो अभीष्ट समीकरण है।

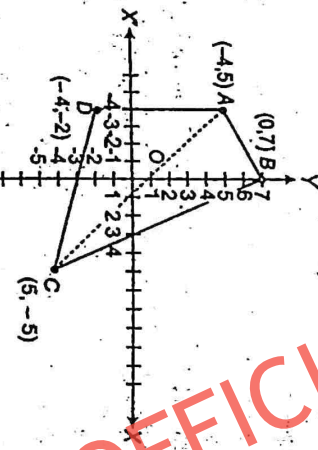
प्रश्न 9. वल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी दिक्बिंदु से स्पर्शिक दूरी 5 इकाई और स्तंभ, धन X-अक्ष 30° का कोण बनाती है।



सं- लंब रूप में रेखा का समीकरण $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$, जहाँ p मूलबिंदु से दी गई रेखा पर लंबवत दूरी है तथा α, x अक्ष की धन दिशा से बनाया गया कोण है।
 यहाँ, $p = 5$ तथा $\alpha = 30^\circ$
 तब हमें रेखा का समीकरण,
 $x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ = 5$
 $\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 5$
 $\sqrt{3}x + y = 10$

प्रश्न 10. एक रेखा का समीकरण $3x - 4y + 10 = 0$ है। एक वल ज्ञात कीजिए।
 सं- (i) दिया हुआ समीकरण $3x - 4y + 10 = 0$ को $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$... (1)
 माना जा सकता है। (1) को गुणना $y = mx + c$, से करने पर पाते हैं कि दी हुई रेखा की वल $m = \frac{3}{4}$ है।
 प्रश्न 11. वल रेखा का समीकरण $3x - 4y + 10 = 0$ है, तब वल-अक्षखण्ड और y-अक्षखण्ड ज्ञात कीजिए।
 सं- समीकरण $3x - 4y + 10 = 0$ को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है,
 $3x - 4y = -10$ या $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$... (2)
 अतः वल-अक्ष $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$ से करने पर हम पाते हैं कि $x = 10$ और $y = 5$ है।
 प्रश्न 12. बिंदु (3, -5) की रेखा $3x - 4y - 26 = 0$ से दूरी ज्ञात कीजिए।
 सं- दी हुई रेखा $3x - 4y - 26 = 0$... (1)
 यहाँ गुणन रेखा के स्पर्शक समीकरण $Ax + By + C = 0$ से करने पर, हम पाते हैं,
 $A = 3, B = -4$ और $C = -26$
 यहाँ बिंदु $(x_1, y_1) = (3, -5)$ है। दिए बिंदु की रेखा से दूरी
 $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3(3) + (-4)(-5) - 26|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{5}$... (2)
 यहाँ की

प्रश्न 13. कार्तीय ताल में एक चतुर्भुज खींचिए जिसके शीर्ष (-4, 5), (0, 7), (5, -5) और (-4, -2) हैं। इसका क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।
 सं- (i) यदि $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ एक त्रिभुज के शीर्ष हैं, तो
 ΔABC का क्षेत्रफल
 $= \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$
 (ii) चतुर्भुज का क्षेत्रफल
 $= \Delta ABC$ का क्षेत्रफल + ΔADC का क्षेत्रफल
 दिए गए शीर्ष $A(-4, 5), B(0, 7), C(5, -5)$ तथा $D(-4, -2)$ बिंदु X-Y तल में दर्शाए गए हैं। सभी शीर्षों को मिलाने पर एक चतुर्भुज ABCD निकलता है।



चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल
 $= \Delta ADC$ का क्षेत्रफल + ΔABC का क्षेत्रफल
 $= \frac{1}{2} | -4(-2 + 5) - 4(-5 - 5) + 5(5 + 2) |$
 $= \frac{1}{2} | -4(-3) - 4(-10) + 5(7) |$
 $= \frac{1}{2} | 12 + 40 + 35 | = \frac{1}{2} | 87 | = \frac{87}{2}$
 अतः ΔADC का क्षेत्रफल ... (1)
 $= \frac{1}{2} | -4(-2 + 5) - 4(-5 - 5) + 5(5 + 2) |$
 $= \frac{1}{2} | -4(-3) - 4(-10) + 5(7) |$
 $= \frac{1}{2} | 12 + 40 + 35 | = \frac{1}{2} | 87 | = \frac{87}{2}$
 ΔABC का क्षेत्रफल
 $= \frac{1}{2} | -4(7 + 5) + 0(-5 - 5) + 5(5 - 7) |$
 $= \frac{1}{2} | -4(12) + 0(-10) + 5(-2) |$
 $= \frac{1}{2} | -48 - 10 | = \frac{1}{2} | -58 | = 29$
 अतः चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल
 $= \frac{87}{2} + 29 = \frac{63 + 58}{2} = \frac{121}{2}$ वर्ग इकाई

प्रश्न 14. X-अक्ष पर एक बिंदु ज्ञात कीजिए जो (7, 6) और (3, 4) बिंदुओं से समान दूरी पर है।
 सं- माना X-अक्ष पर किसी बिंदु P के निर्देशांक (x, 0) है, तब X-अक्ष पर Y-निर्देशांक शून्य होता है तथा दिए गए बिंदु A(7, 6) तथा B(3, 4) है।
 दिया है, $PA = PB \Rightarrow PA^2 = PB^2$
 $\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2$
 यहाँ, $x_1 = x, x_2 = 7, y_1 = 0, y_2 = 6, x_3 = 3, y_3 = 4$
 $\Rightarrow (x - 7)^2 + (0 - 6)^2 = (x - 3)^2 + (0 - 4)^2$
 $\Rightarrow x^2 + 49 - 14x + 36 = x^2 + 9 - 6x + 16$
 $\Rightarrow -14x + 6x = 25 - 36 - 49$
 $-8x = 25 - 85 \Rightarrow -8x = -60$
 $\Rightarrow x = \frac{60}{8} \Rightarrow x = \frac{15}{2}$
 \therefore X-अक्ष पर बिंदु $P = \left(\frac{15}{2}, 0\right)$

प्रश्न 15. x का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिंदु $(x, -1), (2, 2)$ और $(4, 5)$ संरेख हैं।
 सं- बिंदु बिंदु A(x, -1), B(2, 2) तथा C(4, 5) संरेख हैं। यहाँ, $x_1 = x, x_2 = 2, y_2 = 2, y_1 = -1, x_3 = 4$ तथा $y_3 = 5$
 AB की प्रवणता = BC की प्रवणता
 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$
 $\frac{-1 - (-1)}{x - 2} = \frac{5 - 2}{4 - 2}$
 $\frac{0}{x - 2} = \frac{3}{2}$
 $0 = \frac{3}{2}(x - 2)$
 $0 = \frac{3}{2}x - 3$
 $\frac{3}{2}x = 3$
 $x = 2$
 प्रश्न 16. यदि तीन बिंदु (0, 0), (a, b) और (0, b) एक रेखा पर हैं, तो दिखाएँ कि $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1$

हल- दिए गए बिंदु A(h, 0) B(a, b) तथा C(0, b) हैं। यदि A, B तथा C संरेख हैं, तब
 AB की प्रवणता = BC की प्रवणता = CA की प्रवणता
 माना $(x_1, y_1) \rightarrow A(h, 0), (x_2, y_2) \rightarrow B(a, b), (x_3, y_3) \rightarrow C(0, b)$
 अतः AB की प्रवणता = BC की प्रवणता = CA की प्रवणता
 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}$
 $\frac{b - 0}{a - h} = \frac{b - 0}{0 - a} = \frac{0 - b}{h - 0}$
 $\frac{b}{a - h} = \frac{b}{-a} = \frac{-b}{h}$
 $\Rightarrow -ab = ak - ab - hk + bh \Rightarrow ak + bh = hk$
 प्रत्येक पद को (hk) द्वारा भाग देने पर,
 $\frac{ak}{hk} + \frac{bh}{hk} = \frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1$ (यहाँ स्थित करने था)
 प्रश्न 17. समीकरण $\sqrt{3}x + y - 8 = 0$ की स्तंभ रूप में व्यक्त कीजिए और P तथा Q के मान ज्ञात कीजिए।
 हल- दिया समीकरण
 $\sqrt{3}x + y - 8 = 0$
 है। (1) को $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$, से भाग देने पर
 $\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 4 = 0$ या $x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ = 4$... (2)
 (2) की गुणना $x \cos \omega + y \sin \omega = p$, से करने पर, हम $p = 4$ और $\omega = 30^\circ$ पाते हैं।
 प्रश्न 18. $y - \sqrt{3}x - 5 = 0$ और $\sqrt{3}y - x + 6 = 0$ रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।
 हल- दी हुई रेखाएँ
 $y - \sqrt{3}x - 5 = 0$ या $y = \sqrt{3}x + 5$... (1)
 और $\sqrt{3}y - x + 6 = 0$ या $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 2\sqrt{3}$... (2)
 रेखा (1) की वल $m_1 = \sqrt{3}$ और रेखा (2) की वल $m_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ है।
 दोनों रेखाओं के बीच चतुर्कोण (माना कि θ) इस प्रकार है-
 $\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$
 $\tan \theta = \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} \right|$
 $\tan \theta = \left| \frac{\frac{1 - 3}{\sqrt{3}}}{1 + 1} \right| = \left| \frac{-2}{2\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

नि. पी. एल. प्रश्न बैंक

$\theta = 30^\circ$ प्राप्त होता है। अतः दोनों रेखाओं के बीच का कोण 30° या $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ है।

9. रेखाओं $\sqrt{3}x + y = 1$ और $x + \sqrt{3}y = 1$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

दो रेखाओं के समीकरण हैं,

$$x + y = 1$$

$$y = -\sqrt{3}x + 1 \text{ तथा } x + \sqrt{3}y = 1$$

$$\sqrt{3}y = -x + 1$$

$$y = \frac{-1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$x + c_1$ तथा $y = m_2x + c_2$ के साथ तुलना करने पर

$$m_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ तथा } m_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = \left| \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \right|$$

$$\left[\because \tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| \right]$$

$$\theta = \left| \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{3}} \right| = \left| \frac{-\frac{3+1}{3}}{\frac{4}{3}} \right| = \frac{4}{4} = 1$$

$$\theta = 10^\circ$$

$$\theta = \tan 30^\circ$$

10. समान्तर रेखाओं $3x - 4y + 7 = 0$ और $3x - 4 + 7 = 0$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

दो रेखाएँ $A, B = -4, C_1 = 7$ और $C_2 = 5$, इसलिए

$$d = \frac{7-5}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{2}{5}$$

11. दो रेखाओं के बीच का कोण $\frac{\pi}{4}$ है एक

दूसरी $\frac{1}{2}$ है तो दूसरी रेखा की ढाल ज्ञात कीजिए।

माना दो रेखाएँ m_1 और m_2 ढाल वाली दो रेखाओं के बीच का कोण θ इस प्रकार है कि

$$\theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

$$1 = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

$$1 = \frac{1}{2}, m_2 = m \text{ और } \theta = \frac{\pi}{4}$$

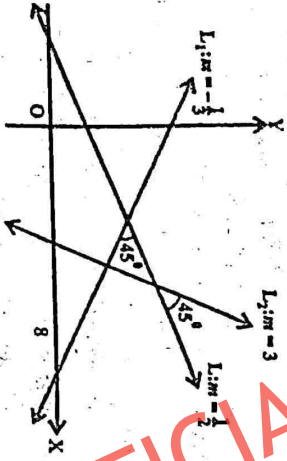
अथ (1) में इन मानों को रखने पर

$$\tan \frac{\pi}{4} = \left| \frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m} \right| \text{ या } 1 = \left| \frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m} \right|$$

जिससे प्राप्त होता है

$$\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m} = 1 \text{ या } \frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m} = -1$$

$$\text{इसलिए } m = 3 \text{ या } m = -\frac{1}{3}$$



आकृति

अतः दूसरी रेखा की ढाल 3 या $-\frac{1}{3}$ है। आकृति में दो उत्तर का कारण स्पष्ट किया गया है।

प्रश्न 22. एक रेखा की ढाल दूसरी रेखा की ढाल की दुगुनी है यदि दोनों के बीच के कोण की स्पर्शज्या (sagrent)

$\frac{1}{3}$ है, तो रेखाओं की ढाल ज्ञात कीजिए।

हल- माना दोनों रेखाओं के बीच का कोण θ है।

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

$$\text{दिया है, } \tan \theta = \frac{1}{3}, m_1 = m, m_2 = 2m$$

$$\frac{1}{3} = \left| \frac{m - 2m}{1 + m \cdot 2m} \right|$$

$$\frac{1}{3} = \left| \frac{-m}{1 + 2m^2} \right|$$

$$\Rightarrow 1 + 2m^2 = 3m$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 3m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2m(m-1) - 1(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow (m-1)(2m-1) = 0$$

$$m = 1, \frac{1}{2}$$

प्रश्न 23. बिन्दु $(2, 2)$ से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके द्वारा अक्षों से कटे अंतः खण्डों का योग 9 है।

माना कि अन्तःखण्ड a और $9-a$ है, अतएव रेखा का समीकरण है:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{9-a} = 1, \text{ अर्थात } (9-a)x + ay = a(9-a) \dots (1)$$

अ रेखा $(2, 2)$ से होकर जाती है, अतएव $(9-a) \cdot 2 + a \cdot 2 = a(9-a)$

$$\Rightarrow 18 - 2a + 2a = 9a - a^2 \Rightarrow a^2 - 9a + 18 = 0$$

$$\Rightarrow (a-6)(a-3) = 0 \Rightarrow a = 6, \text{ या } 3$$

अतः (1) से अभीष्ट रेखाएँ हैं:

$$9-6)x + 6y = 6(9-6) \text{ या } (9-3)x + 3y = 3(9-3)$$

$$\Rightarrow 3x + 6y = 18 \text{ या } 6x + 3y = 18$$

$$\Rightarrow x + 2y = 6 \text{ या } 2x + y = 6$$

प्रश्न 24. अक्षों के बीच रेखाखंड का मध्य-बिंदु $P(a, b)$ है। दिखाइए कि रेखा का समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ है।

हल- माना रेखा AB का समीकरण $\frac{x}{h} + \frac{y}{k} = 1$ है।

जहाँ A तथा B रेखा द्वारा क्रमशः X -अक्ष तथा Y -अक्ष पर

बिन्दु $A(h, 0)$ और $B(0, k)$ पर हैं।

$$AB \text{ का मध्य-बिंदु } P = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{h+0}{2}, \frac{0+k}{2} \right)$$

$\therefore P(a, b)$, रेखा AB का मध्य-बिंदु है अर्थात

$$\frac{h+0}{2} = a \text{ तथा } \frac{0+k}{2} = b$$

अतः $h = 2a$ तथा $k = 2b$

समी (1) में h तथा k के मान रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 25. अक्षों के बीच रेखाखंड को बिंदु $R(h, k)$, $1:2$ के अनुपात में विभक्त करता है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल- माना रेखा AB का समीकरण,

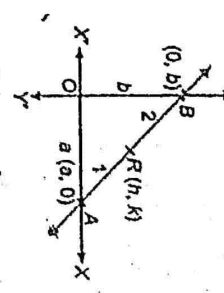
माना बिंदु $R(h, k)$, रेखा AB को अनुपात $1:2$ में विभक्त करता है। अतः विभाजन सूत्र द्वारा,

$$R(h, k) = \left(\frac{1x_2 + 2x_1}{1+2}, \frac{1y_2 + 2y_1}{1+2} \right)$$

\therefore बिंदु $P(x, y)$, रेखा AB जिसके बिन्दुसंकेत क्रमशः $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ हैं, को अनुपात $m:n$ में अंतः विभाजित करता है।

$$P(x, y) = \left[\left(\frac{mx_2 + nx_1}{n+m}, \frac{my_2 + ny_1}{n+m} \right) \right]$$

$$\Rightarrow h = \frac{2a}{3}, k = \frac{b}{3} \Rightarrow a = \frac{3h}{2}, b = 3k$$



समी (i) में a व b के मान रखने पर,

$$\frac{x}{\frac{3h}{2}} + \frac{y}{3k} = 1 \Rightarrow \frac{2x}{3h} + \frac{y}{3k} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2Kx + hy}{3hk} = 1 \Rightarrow 2Kx + hy = 3hk$$

प्रश्न 26. दर्शाइए कि दो रेखाएँ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, जहाँ $b_1, b_2 \neq 0$

(i) समांतर हैं यदि $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ और

(ii) संलग्न हैं यदि $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$.

हल- दो रेखाएँ ऐसे लिखी जा सकती हैं

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1} \dots (1)$$

$$\text{और } y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2} \dots (2)$$

रेखाओं (1) और (2) की ढाल क्रमशः $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ और $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$ है।

अथ (i) रेखाएँ समांतर हैं यदि $m_1 = m_2$, जिससे प्राप्त होता है-

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \text{ या } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

रेखाएं लंब होंगी, यदि $m_1 \cdot m_2 = -1$, जिससे प्राप्त होता है।
 $\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = -1$ या $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$

प्रश्न 27. यदि p मूलबिन्दु से उस रेखा पर डाले गये लंब लंबाई हो जिस पर अक्षों पर काटे गए अंतर:खण्ड a $(b$ हो, तो दिखाइए कि $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.
 - दो हुई रेखा का समीकरण है:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$bx + ay = ab$$

$$bx + ay - ab = 0$$

उपर्युक्त समीकरण का रूप है :
 $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$

(1) और (2) को तुलना करने पर,
 $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = \frac{c}{c}$
 $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = \frac{c}{c}$
 $\cos \alpha = \frac{a}{b} = \frac{b}{a} = \frac{c}{c}$
 $\frac{\cos \alpha}{a} = \frac{\sin \alpha}{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
 $\frac{\cos \alpha}{a} = \frac{\sin \alpha}{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
 $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$p = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$p^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

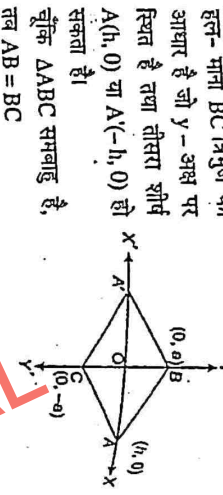
$$\frac{1}{p^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{a^2}{a^2 b^2} + \frac{b^2}{a^2 b^2}$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}$$

यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 28. 2a भुजा के समबाहु त्रिभुज का आधार y -अक्ष के अनुदिश इस प्रकार है कि आधार का मध्य बिंदु मूल बिन्दु पर है। त्रिभुज के शीर्ष ज्ञात कीजिए।



हल- माना BC त्रिभुज का आधार है जो y -अक्ष पर स्थित है तथा तीसरा शीर्ष $A(h, 0)$ या $A'(-h, 0)$ हो सकता है।
 चूँकि ΔABC समबाहु है, तब $AB = BC$

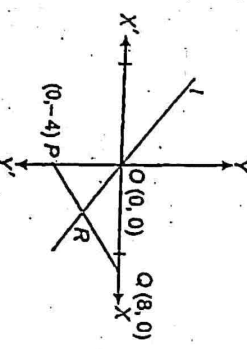
$$AB^2 = BC^2$$

$$\Rightarrow (h-0)^2 + (0-a)^2 = (2a)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

प्रश्न 29. रेखा का ढाल ज्ञात कीजिए जो मूलबिंदु और $P(0, -4)$ तथा $B(8, 0)$ बिंदुओं को मिलाने वाली रेखाखंड के मध्य-बिंदु से जाती है।

हल- दिए गए बिंदु $P(0, -4)$ तथा $Q(8, 0)$ हैं।
 $\therefore x_1 = 0, y_1 = -4, x_2 = 8, y_2 = 0$
 ये बिंदु $X-Y$ तल में नीचे चित्र में अंकित किए गए हैं



PQ का मध्य बिंदु है
 $R = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{0+8}{2}, \frac{-4+0}{2} \right) = (4, -2)$
 \therefore OR की प्रवणता $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 0}{4 - 0} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$
 $\therefore x_1 = 0, y_1 = 0, x_2 = 4, y_2 = -2$

प्रश्न 30. पाश्चात्तरस प्रमेय के प्रयोग बिंदु दिखाताइए कि बिंदु $(4, 3), (3, 5)$ और $(-1, -1)$ त्रिभुज के शीर्ष हैं। हल- हम जानते हैं : (i) जब दो बिंदु दिए गए होते हैं, तब बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

(ii) दो रेखाएं लंबवत् होती हैं, यदि $m_1 \times m_2 = -1$ माना दिए बिंदु $A(4, 4), B(3, 5)$ तथा $C(-1, -1)$ हैं।
 यदि $(x_1, y_1) \rightarrow A(4, 4), (x_2, y_2) \rightarrow B(3, 5), (x_3, y_3) \rightarrow C(-1, -1)$

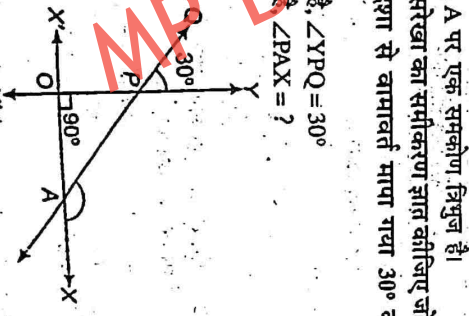
$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [4(5+1) - 4(3+1) + 1(-3+5)] = \frac{1}{2} [24 - 16 + 2] = \frac{10}{2} = 5 \neq 0$$

अतः A, B तथा C त्रिभुज के शीर्ष हैं।

AB की प्रवणता, $m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-4}{3-4} = \frac{1}{-1} = -1$
 BC की प्रवणता, $m_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{-1-5}{-1-3} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$
 $m_1 \times m_2 = -1 \times \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \neq -1$

AB की प्रवणता \times CA की प्रवणता $= (-1) \times 1 = -1$
 $\therefore \Delta ABC, A$ पर एक समकोण त्रिभुज है।

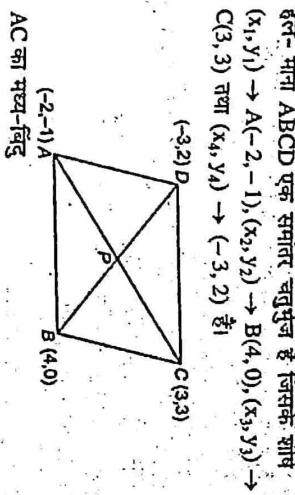
प्रश्न 31. उसरेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो Y -अक्ष की $1/3$ भाग दिशा से वास्तविक माप गया 30° का कोण बनाता है।
 हल- दिया है, $\angle YPQ = 30^\circ$
 ज्ञात करना है $\angle PAX = ?$



यहाँ, $\angle YPQ = \angle OBA$ (कक्षांतर विपरीत कोण)
 $\therefore \angle OPA + \angle POA + \angle PAO = 180^\circ$
 \therefore त्रिभुज के सभी आंतरिक कोणों का योग 180° होता है।
 $\angle PAO = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$
 $\angle PAX = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

\therefore रेखा AO की प्रवणता $= m = \tan 120^\circ$ ($\because m = \tan \theta$)
 $= \tan(180^\circ - 60^\circ)$
 $\therefore \tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$
 $= -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

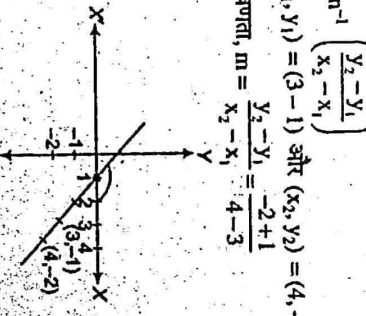
प्रश्न 32. दूरी सूत्र का प्रयोग किए बिना दिखाताइए कि बिंदु $(-2, -1), (4, -0), (3, 3)$ और $(-3, 2)$ समान्तर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।
 हल- माना ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है जिसके शीर्ष $(x_1, y_1) \rightarrow A(-2, -1), (x_2, y_2) \rightarrow B(4, 0), (x_3, y_3) \rightarrow C(3, 3)$ तथा $(x_4, y_4) \rightarrow D(-3, 2)$ हैं।



AC का मध्य-बिंदु $P = \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{-1+3}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$
 BD का मध्य-बिंदु $P = \left(\frac{4+(-3)}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$
 \therefore दो बिंदुओं का मध्य-बिंदु $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

$\therefore AC$ का मध्य-बिंदु $= BD$ का मध्य-बिंदु
 $\therefore ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।
 इति सिद्धम्

प्रश्न 33. X -अक्ष और $(3, -1)$ और $(4, -2)$ बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।
 हल- जब दो बिंदु दिए गए होते हैं, तब उनको मिलाने वाली रेखा का X -अक्ष से कोण ज्ञात करने के लिए सूत्र,
 $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)$
 दिया है, $(x_1, y_1) = (3, -1)$ और $(x_2, y_2) = (4, -2)$
 रेखा की प्रवणता, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - (-1)}{4 - 3} = \frac{-1}{1} = -1$



7. सी. पी. एच. प्रश्न बैंक

$$\tan \theta = \frac{-1}{1} \Rightarrow \tan \theta = -1$$

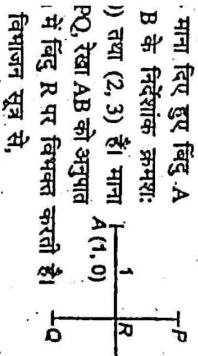
$$\tan \theta = -\tan 45^\circ$$

$$(\because 1 = \tan 45^\circ)$$

$$\tan \theta = \tan(180^\circ - 45^\circ) [\because \tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta]$$

$$\tan \theta = \tan 135^\circ \Rightarrow \theta = 135^\circ$$

34. एक रेखा (1, 0) तथा (2, 3) बिंदुओं को मिलाने रेखाखंड पर लंब है तथा उसको I : n के अनुपात में विभाजित करती है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।



माना बिंदु R (x, y)

B के निर्देशांक क्रमशः

1) तथा (2, 3) है। माना A(1, 0)

PQ रेखा AB को अनुपात

में बिंदु R पर विभाजित करती है।

विभाजन सूत्र से,

$$= \left(\frac{1 \times x_2 + n \times x_1}{1+n}, \frac{1 \times y_2 + n \times y_1}{1+n} \right)$$

$$= \left(\frac{1 \times 2 + n \times 1}{1+n}, \frac{1 \times 3 + n \times 0}{1+n} \right)$$

$$(\because x_1 = 1, y_1 = 0, x_2 = 2, y_2 = 3)$$

$$= \left(\frac{1+n}{1+n}, \frac{3}{1+n} \right)$$

PQ ⊥ AB

रेखा PQ को प्रवणता m है।

Q रेखा की प्रवणता x AB रेखा की प्रवणता = -1

$$m \times \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1 \quad (\because m_1 \times m_2 = -1)$$

$$m \times \frac{3-0}{2-1} = -1$$

$$m \times 3 = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

$$(\because x_1 = 1, y_1 = 0, x_2 = 2, y_2 = 3)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ के प्रयोग द्वारा}$$

$$y - 0 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$\left[\because R \left(\frac{1+n}{1+n}, \frac{3}{1+n} \right) = (x, y) \right]$$

$$n+1 : y-9 = -x(n+1) + (n+2)$$

$$n+1$$

$$3(n+1)y - 9 = -x(n+1) + (n+2)$$

$$\Rightarrow x(n+1) + 3(n+1)y = n+2+9$$

$$\Rightarrow (x(n+1) + 3(n+1)y) = n+11$$

प्रश्न 35. रेखा $x - 2y + 3 = 0$ पर लंब और बिंदु (1, -2) से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल- दी हुई रेखा $x - 2y + 3 = 0$ को

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

... (1)

रेखा (1) की ढाल $m_1 = \frac{1}{2}$ है। इसलिए रेखा (1) के लंब रेखा

की ढाल

$$m_2 = \frac{1}{m_1} = -2 \text{ है।}$$

ढाल -2 वाली और बिंदु (1, -2) से जाने वाली रेखा का समीकरण

$$y - (-2) = -2(x - 1) \text{ या } y = -2x,$$

है जो अभीष्ट समीकरण है।

अभ्यास-11

शंकु परिच्छेद

वस्तुनिष्ठ प्रश्नोत्तर

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए-

(i) वृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र मूल बिन्दु पर तथा त्रिज्या 4 है -

(अ) $x^2 + y^2 = 4$ (ब) $\sqrt{x^2 + y^2} = 4$

(स) $x^2 + y^2 = 16$ (द) $x^2 - y^2 = 16$

(ii) यदि किसी परवलय का शीर्ष मूल बिन्दु तथा नाभि (0, a) है तो उसका समीकरण होगा -

(अ) $y^2 = 4ax$ (ब) $x^2 = 4ay$

(स) $y^2 = -4ax$ (द) $x^2 = -4ay$

(iii) परवलय $x^2 = 16y$ की नाभिकीय लम्बाई जीवा की लम्बाई होगी -

(अ) -16 (ब) +4 (स) -4 (द) 16

(iv) नाभि (2, 0) तथा शिखर $x = -2$ वाले परवलय का समीकरण होगा -

(अ) $y^2 = -4x$ (ब) $x^2 = 8y$

(स) $y^2 = 4x$ (द) $y^2 = 8x$

(v) दीर्घ वृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई है -

प्रश्न 3. सही जोड़ी बनाइए -

सम्प- (I) सम्प- (II)

(i) वक्र $x^2 = 4y$ की नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई (a) 8

(ii) वक्र $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$ का दीर्घ अक्ष (b) 4

(iii) वक्र $x^2 + y^2 = 4$ की त्रिज्या (c) 2

(iv) वक्र $x^2 + (y - 4)^2 = r^2$ का केन्द्र है। (d) (0, 4)

(v) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ की उत्केन्द्रता है। (e) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

उत्तर- (i) - (b), (ii) - (a), (iii) - (c), (iv) - (d), (v) - (e).

प्रश्न 4. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए-

(i) केन्द्र (2, -1) एवं त्रिज्या 5 वाले वृत्त का समीकरण लिखिए?

(ii) वृत्त $(x + 7)^2 + (y - 4)^2 = 2$ का केन्द्र एवं त्रिज्या ज्ञात कीजिए?

(iii) परवलय का समीकरण लिखिए जिसका शीर्ष (0, 0) तथा नाभि (-2, 0) हो?

(iv) वक्र $x^2 = -8y$ के शिखर का समीकरण लिखिए?

(v) परवलय $y^2 = -16x$ के नाभि का निर्देशांक लिखिए?

(vi) वक्र $36x^2 + 4y^2 = 144$ के दीर्घ अक्ष एवं लघुअक्ष की लम्बाई या लिखिए?

(vii) यदि दीर्घवृत्त के दीर्घ अक्ष की लम्बाई 10 एवं लघुअक्ष की लम्बाई 6 है तो उसका समीकरण लिखिए?

(viii) यदि किसी अतिपरवलय के अनुप्रस्थ अक्ष एवं संयुग्मी अक्ष बराबर हो तो उस वक्र को क्या कहते हैं?

(ix) अतिपरवलय $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ की नाभियाँ किस अक्ष पर हैं?

उत्तर- (i) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$, (ii) केन्द्र, (iii) $y^2 = -8x$, (iv) $y = 2$, (v) (-4, 0), (vi) दीर्घ अक्ष = 12, लघु अक्ष = 4, (vii) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, (viii) समकोणीय, अतिपरवलय (iv) $y -$ अक्ष पर।

प्रश्न 5. सत्य/असत्य लिखिए-

(1) वृत्त $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ का केन्द्र (2, 3) है।

(2) वृत्त $x^2 + (y - 5)^2 = 4$ का केन्द्र y अक्ष पर है।

(3) परवलय $y^2 = 4ax$ की शिखर का समीकरण $x = -a$ है।

(4) परवलय $x^2 = 4ay$ की नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई $2a$ है।

(5) यदि परवलय की समीकरण x अक्ष के अनुदिश है तथा x का गुणांक धनात्मक हो तो परवलय दाईं ओर खुलता है।

तल के उन बिन्दुओं का समुच्चय जिनका तल में दो को से दूरियों का योग अचर हो दीर्घवृत्त कहलाता है।
 - (1) असत्य, (2) सत्य, (3) सत्य, (4) असत्य, (5) सत्य, सत्य।

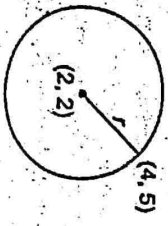
6. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र) और त्रिज्या $\sqrt{2}$ इकाई है।
 दिया है, केंद्र $(h, k) = (1, 1)$ तथा त्रिज्या $r = \sqrt{2}$

वही समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ के प्रयोग द्वारा,
 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2})^2$
 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$
 $x^2 + y^2 + 1 - 2x - 2y = 2$
 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 1$

7. वृत्त $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 8 = 0$ का केंद्र तथा π ज्ञात कीजिए।
 दिया गया समीकरण $(x^2 + 8x) + (y^2 + 10y) = 8$
 कोष्ठकों को पूर्ण वर्ग बनाने पर,
 $x^2 + 8x + 16 + (y^2 + 10y + 25) = 8 + 16 + 25$
 $x^2 + 4y^2 + (y+5)^2 = 49$
 $x - (-4) + (y+5)^2 = 7^2$

वृत्त का केंद्र $(-4, -5)$ व त्रिज्या 7 इकाई है।
 8. ज्या बिंदु $(-2.5, 3.5)$ वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ के अंदर, पर ज्ञात पर स्थित है?
 दिया है, वृत्त की समीकरण $x^2 + y^2 = 25$
 $S = x^2 + y^2 - 25$
 $i = (-2.5)^2 + (3.5)^2 - 25 = 6.25 + 12.25 - 25$
 $= 18.50 - 25 = -6.50 < 0$

9. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र) ज्ञात गया बिंदु $(4, 5)$ से जाता है।
 $r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$
 यहाँ, केंद्र $(h, k) = (2, 2)$ तथा वृत्त पर स्थित बिंदु $P(x, y)$ है।
 $r = \sqrt{(2-4)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$
 $\therefore r = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$



वृत्त की समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{13})^2$
 \therefore दिया है, $(h, k) = (2, 2)$ तथा $r = \sqrt{13}$
 $\Rightarrow x^2 + 4 - 4x + y^2 + 4 - 4y = 13$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y - 5 = 0$

प्रश्न 10. परवलय $y^2 = 10x$ के नाभिक के निर्देशांक और निचला का समीकरण ज्ञात कीजिए।
 परवलय $y^2 = 10x$ है, जो $y^2 = 4ax$ के रूप की है अर्थात् नाभियों x -अक्ष की धन दिशा में स्थित है।
 यहाँ, $4a = 10 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$
 नाभियों $(a, 0) = (\frac{5}{2}, 0)$
 अक्ष $= X$ -अक्ष
 निचला, $x = -a \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

नाभिलंब जीवा को लंबाई $= 4a = 4 \times \frac{5}{2} = 10$
 प्रश्न 11. उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका नाभिक $(0, -3)$ और निचला $y = 3$ है।
 हल- दिया है कि नाभिक $(0, -3)$ तथा निचला $y = 3$ ।
 चूँकि नाभिक Y -अक्ष की ऋणात्मक दिशा में स्थित है अर्थात् परवलय की समीकरण $x^2 = -4ay, a = 3$ के साथ, के रूप की होगी।
 अतः अभीष्ट समीकरण $x^2 = -4(3)y \Rightarrow x^2 = -12y$

प्रश्न 12. उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष $(0, 0)$ तथा नाभिक $(3, 0)$ है।
 हल- दिया है कि शीर्ष $(0, 0)$
 नाभिक $(3, 0)$
 चूँकि शीर्ष $(0, 0)$ तथा नाभिक X -अक्ष की धन दिशा में स्थित है। अतः परवलय की समीकरण $y^2 = 4ax, a = 3$ के साथ, के रूप की होगी।
 अतः अभीष्ट समीकरण $y^2 = 4 \times 3x$
 $y^2 = 12x$

प्रश्न 13. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ के नाभियों और शीर्षों के निर्देशांक, दीर्घ एवं लघु अक्ष की लंबाइयाँ, उत्केंद्रता और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।
 हल- क्योंकि $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ का हल, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के हल से बड़ा है, इसलिए

शीर्ष अक्ष x -अक्ष के अनुदिश है। दिए गए समीकरण की शीर्ष $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, से तुलना करने पर
 $a = 5$ और $b = 3$
 साथ ही $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$
 अतः नाभियों के निर्देशांक $(-4, 0)$ और $(4, 0)$ है, शीर्षों के निर्देशांक $(-5, 0)$ और $(5, 0)$ है। दीर्घ अक्ष की लंबाई $2a = 10$ इकाइयाँ, लघु अक्ष की लंबाई $2b = 6$ इकाइयाँ और उत्केंद्रता $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$ और नाभिलंब $\frac{2b^2}{a} = \frac{18}{5}$ है।

प्रश्न 14. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसकी नाभियों के निर्देशांक $(\pm 5, 0)$ तथा शीर्षों के निर्देशांक $(\pm 13, 0)$ हैं।
 हल- क्योंकि दीर्घवृत्त का शीर्ष x -अक्ष पर स्थित है अतः इसका समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के अनुरूप होगा, जहाँ अर्ध-दीर्घ अक्ष की लंबाई a है। हमें ज्ञात है, कि, $a = 13, c = \pm 5$ ।
 अतः $c^2 = a^2 - b^2$, के सूत्र से हमें प्राप्त होता है, $25 = 169 - b^2$ या $b = 12$

अतः दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ है।
 प्रश्न 15. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके दीर्घ अक्ष की लंबाई 16 एवं नाभियों $(0, \pm 6)$ हैं।
 हल- नाभियों $(0, \pm 6)$ Y -अक्ष पर स्थित हैं, चूँकि इनका x -निर्देशांक शून्य है। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप की होगी।
 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
 दिया है कि लघु अक्ष की लंबाई, $2b = 16$ तथा $c = 6$
 $\Rightarrow b = 8$ तथा $c = 6$
 $\therefore c^2 = a^2 - b^2$
 $\Rightarrow 36 = a^2 - 64$
 $a^2 = 36 + 64 = 100$
 $a = 10$ तथा $b^2 = 64$ समी. (1) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं,
 $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

प्रश्न 16. उस दीर्घवृत्त के शीर्षों के निर्देशांक, दीर्घ अक्ष और लघुअक्ष की लंबाइयाँ ज्ञात कीजिए जिसका समीकरण $16x^2 + y^2 = 16$ है?
 हल- दी गई दीर्घवृत्त की समीकरण $16x^2 + y^2 = 16$

गणित - 11/63
 $\Rightarrow \frac{16x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$ (16) भाग करने पर)
 $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{16} = 1$
 \therefore $\frac{1}{1}$ का हर भाग, $\frac{y^2}{16}$ के हर भाग से खोला है।
 \therefore दीर्घ अक्ष, Y -अक्ष के अनुदिश है।
 दी गई समीकरण की तुलना $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ से करने पर हम प्राप्त करते हैं
 $b^2 = 1$ तथा $a^2 = 16$
 $b = 1$ तथा $a = 4$

यहाँ, a तथा b लंबाइयाँ हैं, अतः हम केवल धनात्मक चिन्ह लेते हैं
 $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 1 = 15$
 $c = \sqrt{15}$
 \Rightarrow अतः, $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 1 = 15$
 $c = \sqrt{15}$
 यहाँ, दीर्घ अक्ष Y -अक्ष के अनुदिश है, अतः
 नाभियों $(0, \pm c) = (0, \pm \sqrt{15})$
 शीर्ष $(0, \pm a) = (0, \pm 4)$
 दीर्घ अक्ष की लंबाई $= 2a = 2 \times 4 = 8$
 लघु अक्ष की लंबाई $= 2b = 2 \times 1 = 2$
 उत्केंद्रता, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 1}{4} = \frac{1}{2}$
 प्रश्न 17. अतिपरवलय की परिभाषा लिखिए।
 उत्तर- एक अतिपरवलय, तल के उन सभी बिंदुओं का समुच्चय है जिनकी तल में दो स्थिर बिंदुओं से दूरियों का अंतर अचर होता है।

प्रश्न 18. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियों $(0, \pm 13)$ एवं संयुग्मी अक्ष की लंबाई 24 है।
 हल- चूँकि नाभियाँ $(0, \pm 13)$ Y -अक्ष पर स्थित हैं, चूँकि इसका X -निर्देशांक शून्य है अतः अतिपरवलय की समीकरण निम्न रूप की होगी।
 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

यहाँ यह दिया है कि नाभियाँ $(0, \pm 13)$ $(0, \pm c)$ तथा संयुग्मी-अक्ष की लंबाई $2b = 24$
 $c = 13$ तथा $b = 12$
 $c^2 = b^2 + a^2$

\therefore

\therefore

\therefore

\therefore

\therefore

\therefore

\therefore

169 = a² + 144 ⇒ a² = 169 - 144 ⇒ a² = 25
= 25 तथा b² = 144 समी. (i) में रखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$$

19. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए
जो शीर्ष (0, ± 3) एवं नाभियाँ (0, ± 5) है।

- चूँकि शीर्ष (0, ± 3) तथा नाभियाँ (0, ± 5) Y-अक्ष
स्थित हैं, चूँकि इनका x-निर्देशक शून्य है।

अतिपरवलय की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \dots(i)$$

यदि दिया है कि शीर्ष (0, ± 3) = (0, ± a) तथा नाभियाँ
± 5 = (0, ± c)

$$a = 3 \text{ तथा } c = 5$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16$$

= 9 तथा b² = 16 समी. (i) में रखने पर, हम पाते हैं

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

20. अतिपरवलय 5y² - 9x² = 36 की उत्केन्द्रता एवं
फोकल जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

$$\frac{5y^2}{36} - \frac{9x^2}{36} = 1$$

$$\frac{y^2}{\frac{36}{5}} - \frac{x^2}{4} = 1$$

$$\frac{y^2}{\frac{36}{5}} - \frac{x^2}{4} = 1$$

5

गौर अतिपरवलय के समीकरण को तुलना $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$
में करने पर,

$$b^2 = \frac{36}{5} \Rightarrow b = \frac{6}{\sqrt{5}}, a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

जानें कि, a² = b²(e² - 1)

$$4 = \frac{36}{5}(e^2 - 1)$$

$$e^2 - 1 = \frac{20}{5}$$

$$e^2 = 1 + \frac{20}{5} = \frac{14}{5}$$

$$\text{उत्केन्द्रता } e = \frac{\sqrt{14}}{5}$$

$$\text{शीर्ष} = (0, \pm b) = \left(0, \pm \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$$

नाभियाँ = (0, ± be)

$$= \left(0, \pm \frac{6}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{14}}{5}\right) = \left(0, \pm \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\frac{2a^2}{b} = \frac{2 \times 4}{\frac{6}{\sqrt{5}}} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$$

नाभित्व जीवा की लम्बाई = $\frac{2a^2}{b} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$

प्रश्न 21. बिन्दु 5 के उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए
जिसका केन्द्र X-अक्ष पर हो और जो बिन्दु (2, 3) से होकर
जाता है।

हल- वृत्त का केन्द्र X-अक्ष पर है, इसलिए k = 0 होगा।

माना वृत्त का समीकरण है :

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$

यहाँ a = 5

$$\therefore (x-h)^2 + (y-0)^2 = (5)^2$$

$$\Rightarrow (x-h)^2 + y^2 = 25$$

वृत्त (1) बिन्दु (2, 3) से होकर जाता है।

$$\therefore (2-h)^2 + (3)^2 = 25$$

$$(2-h)^2 + 25 - 9 = 16 = (4)^2$$

$$\Rightarrow 2-h = \pm 4$$

(+) चिन्ह लेने पर,
2-h = 4

$$\Rightarrow h = 2 - 4 = -2$$

$$\Rightarrow h = 2 - 4 = -2$$

अतः अभीष्ट वृत्त का
समीकरण होगा-

$$(x+2)^2 + y^2 = 25$$

$$(x-6)^2 + y^2 = 25$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = 25$$

$$\Rightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 = 25$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$

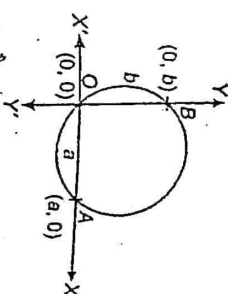
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$



जब बिन्दु (0, 0) है,

$$0 + 0 + 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

जब बिन्दु (a, 0) है,

$$a^2 + 0 + 2ag + 0 + 0 = 0 \Rightarrow a^2 + 2ag = 0$$

$$g = -\frac{a}{2}$$

तथा जब बिन्दु (0, b) है,

$$0 + b^2 + 0 + 2bf + 0 = 0$$

$$\Rightarrow b^2 + 2bf = 0 \Rightarrow f = -\frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow b^2 + 2bf = 0 \Rightarrow f = -\frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow b^2 + 2bf = 0 \Rightarrow f = -\frac{b}{2}$$

g तथा c के मानों को समी. (i) में रखने पर वृत्त की अभीष्ट
समीकरण प्राप्त करते हैं।

$$\text{अर्थात् } x^2 + y^2 + 2x \left(-\frac{a}{2}\right) + 2y \left(-\frac{b}{2}\right) + 0 = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

परवलय की नाभ = (0, -a)
= (0, -6)

परवलय का अक्ष = Y-अक्ष

परवलय की नियता y = a

y = 6

नाभित्व की लम्बाई = 4a

= 4 × 6 = 24

प्रश्न 25. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसकी
दीर्घ अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है और (4, 3) तथा (-1, 4)
दीर्घवृत्त पर स्थित हैं।

हल- दीर्घवृत्त के समीकरण का मानक रूप $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
है। चूँकि बिन्दु (4, 3) तथा (-1, 4) दीर्घवृत्त पर स्थित हैं। अतः
हमें प्राप्त होता है,

$$\frac{16}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \quad \dots(1)$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \quad \dots(2)$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1$$

1/ जी. पी. एच. प्रश्न बैंक

न 27. अतिपरवलय $16x^2 - 9y^2 = 576$ के शीर्षों, भ्रमों के निर्देशांक और उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

1- दी गई समीकरण $16x^2 - 9y^2 = 576$, को 576 द्वारा 1 करने पर, हम पाते हैं

$$\frac{16x^2}{576} - \frac{9y^2}{576} = \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$$

2. समीकरण $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ को तुलना $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के करने पर, हम पाते हैं

$$\begin{aligned} a^2 &= 36 & \text{तथा} & & b^2 &= 64 \\ a &= 6 & \text{तथा} & & b &= 8 \\ c^2 &= a^2 + b^2 = 36 + 64 = 100 \\ c &= 10 \end{aligned}$$

3. अतिपरवलय की समीकरण में x^2 का गुणांक धनात्मक अतः अनुप्रस्थ अक्ष X-अक्ष के अनुदिश होगा।

$$\begin{aligned} \text{नाभि} &= (\pm c, 0) = (\pm 10, 0) \\ \text{शीर्ष} &= (\pm a, 0) = (\pm 6, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{उत्केन्द्रता, } e &= \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \\ \text{नाभिलंब} &= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 64}{6} = \frac{64}{3} \end{aligned}$$

न 28. अतिपरवलय $49y^2 - 16x^2 = 784$ के अनुप्रस्थ शीर्ष, भ्रमों की निर्देशांक और उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

1- दी गई समीकरण $49y^2 - 16x^2 = 784$, को 784 द्वारा 1 करने पर, हम पाते हैं

$$\frac{49y^2}{784} - \frac{16x^2}{784} = \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{49} = 1$$

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{49} = 1$$

2. तुलना $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{49} = 1$ को तुलना $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ के साथ करने पर, हम पाते हैं

$$\begin{aligned} a^2 &= 16 & \text{तथा} & & b^2 &= 49 \\ a &= 4 & \text{तथा} & & b &= 7 \\ c^2 &= a^2 + b^2 = 16 + 49 = 65 \\ c &= \sqrt{65} \end{aligned}$$

3. अतिपरवलय की समीकरण में y^2 का गुणांक धनात्मक अतः अनुप्रस्थ अक्ष Y-अक्ष के अनुदिश होगा।

$$\begin{aligned} \text{नाभि} &= (0, \pm c) = (0, \pm \sqrt{65}) \\ \text{शीर्ष} &= (0, \pm a) = (0, \pm 4) \end{aligned}$$

$$\text{उत्केन्द्रता, } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{65}}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{नाभिलंब} &= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 49}{4} = \frac{49}{2} \\ \text{उत्केन्द्रता, } e &= \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{65}}{4} \end{aligned}$$

प्रश्न 29. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष $(\pm 7, 0)$ एवं उत्केन्द्रता $e = \frac{4}{3}$ है।

हल- शीर्ष $(\pm 7, 0)$ तथा $e = \frac{4}{3}$ अतिपरवलय, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ शीर्ष $(\pm a, 0)$ अतः $a = 7, e = \frac{4}{3}$

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 (e^2 - 1) \Rightarrow b^2 = 49 \left(\frac{16}{9} - 1 \right) \\ b^2 &= 49 \left(\frac{16-9}{9} \right) \Rightarrow b^2 = 49 \times \frac{7}{9} \\ b^2 &= \frac{343}{9} \end{aligned}$$

इस प्रकार, अतिपरवलय का समीकरण, $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{\frac{343}{9}} = 1$ या $\frac{x^2}{49} - \frac{9y^2}{343} = 1$.

प्रश्न 30. बिंदुओं $(2, 3)$ तथा $(-1, 1)$ से जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र रेखा $x - 3y - 11 = 0$ पर स्थित है।

हल- माना वृत्त की समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ समी. (i), बिंदुओं $(2, 3)$ तथा $(-1, 1)$ से होकर जाती है अर्थात् ये इसको संतुष्ट करेंगे।

$$\begin{aligned} \text{जब बिंदु } (2, 3) \text{ है,} & & (2)^2 + (3)^2 + 2g(2) + 2f(3) + c &= 0 \\ & & 4g + 6f + c + 13 &= 0 \quad \dots(i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{तथा जब बिंदु } (-1, 1) \text{ है} & & (-1)^2 + (1)^2 + 2g(-1) + 2f(1) + c &= 0 \\ & & -2g + 2f + c + 2 &= 0 \quad \dots(ii) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{कैसा कि केंद्र } (-g, -f) \text{ रेखा } x - 3y - 11 &= 0 \text{ पर स्थित है} \\ \Rightarrow & & -g - 3(-f) - 11 &= 0 \\ & & -g + 3f - 11 &= 0 \quad \dots(iii) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{समी. (iv) से, } g &= 3f - 11 \text{ समी. (v) में रखने पर हम पाते हैं,} \\ 6g + 4f + 11 &= 0 \\ 6(3f - 11) + 4f + 11 &= 0 \end{aligned}$$

$$18f - 66 + 4f + 11 = 0$$

$$22f - 55 = 0$$

$$f = \frac{55}{22} \Rightarrow f = \frac{5}{2}$$

$$\text{समी. (iv) से, } g = 3 \times \frac{5}{2} - 11 = \frac{15-22}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$\text{समी. (ii) से, } 4 \times \left(-\frac{7}{2} \right) + 6 \left(\frac{5}{2} \right) + c + 13 = 0$$

$$\Rightarrow -14 + 15 + c + 13 = 0$$

$$\Rightarrow c + 14 = 0$$

$$\Rightarrow c = -14$$

$$\Rightarrow g, f \text{ तथा } c \text{ के मानों को समी. (i) में रखने पर वृत्त की समीकरण,}$$

$$x^2 + y^2 + 2x \left(-\frac{7}{2} \right) + 2y \left(\frac{5}{2} \right) - 14 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 7x + 5y - 14 = 0$$

प्रश्न 31. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र वृत्त $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ के केंद्र पर हो तथा बिंदु $(4, 3)$ से होकर जाता हो।

हल- यहाँ वृत्त बिंदु $(4, 3)$ से होकर जाता है। माना कि वृत्त की बिज्या a है, अतएव वृत्त का समीकरण होगा-

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = a^2$$

$$(-4-3)^2 + (3-3)^2 = a^2 \quad \therefore a^2 = 49$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 49$$

अतएव $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 24 = 0$

प्रश्न 32. उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो Y-अक्ष के प्रति सममित हो और बिंदु $(2, -3)$ से गुजरता है।

हल- माना वृत्त की जीवा भी ज्ञात कीजिए।

हल- क्योंकि परवलय Y-अक्ष के प्रति सममित है और इसका शीर्ष मूल बिंदु पर है, अतः इसका समीकरण $x^2 = 4ay$ या $x^2 = -4ay$, के रूप में है जहाँ बिंदु परवलय के ऊपर या नीचे खुलने पर निर्भर करता है परंतु परवलय चतुर्थांश में स्थित बिंदु $(2, -3)$ से गुजरता है इसलिए यह अवश्य सही नीचे की ओर खुलेगा अतः परवलय का समीकरण $x^2 = -4ay$ के अनुरूप है, क्योंकि परवलय $(2, -3)$ से गुजरता है, अतः हमें प्राप्त होता है,

$$2^2 = -4a(-3), \text{ अर्थात् } a = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{परवलय का समीकरण है}$$

$$x^2 = -4 \left(\frac{1}{3} \right) y, \text{ अर्थात् } 3x^2 = -4y$$

$$\text{नाभिलंब जीवा की लम्बाई} = 4a = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

प्रश्न 33. परवलय $y^2 = -32x$ के नाभिक निर्देशांक, अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल- परवलय का समीकरण है:

$$y^2 = -32x$$

इसको तुलना $y^2 = -4ax$ से करने पर,

$$-4a = -32$$

$$\therefore \text{नाभिक निर्देशांक } (-a, 0) = (-8, 0)$$

$$\text{परवलय का अक्ष} = X\text{-अक्ष}$$

$$\text{परवलय की नियता } x = a \Rightarrow x = 8$$

$$\text{नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई } 4a = 4 \times 8 = 32$$

प्रश्न 34. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका दीर्घाक्ष x-अक्ष पर और बिन्दुओं $(4, 3)$ और $(6, 2)$ से जाता है।

हल- चूँकि दीर्घ अक्ष X-अक्ष के अनुदिश है। अतः दीर्घवृत्त की समीकरण निम्न रूप की होगी।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{दिया है कि समी. (i) बिन्दुओं } (4, 3) \text{ (4, 3) तथा (6, 2) से होकर जाती है अर्थात् ये समीकरण को संतुष्ट करेंगे।}$$

$$\therefore \frac{(4)^2}{a^2} + \frac{(3)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{16}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \quad \dots(ii)$$

$$\text{तथा } \frac{(6)^2}{a^2} + \frac{(2)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \quad \dots(iii)$$

$$\text{समी. (ii) को 4 से तथा समी. (iii) को 9 से गुणा करने पर, हम पाते हैं,}$$

$$\frac{64}{a^2} - \frac{324}{a^2} = 4 - 9 \Rightarrow -\frac{260}{a^2} = -5$$

$$\Rightarrow \frac{260}{a^2} = 5 \Rightarrow a^2 = 52$$

$$\text{समी. (ii) से, } \frac{16}{52} + \frac{9}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{9}{b^2} = \frac{52-16}{52} = \frac{36}{52}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{b^2} = \frac{36}{52} \Rightarrow b^2 = \frac{9 \times 52}{36} = 13$$

अतः a^2 और b^2 के मान समी. (1) में रखने पर अभीष्ट दीर्घवृत्त होगा :

$$\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1.$$

अतः

$$\therefore \text{दीर्घ-अक्ष की लम्बाई} = 2a = 10; \text{ तथा लघु-अक्ष की लम्बाई } 2b = 8.$$

प्रश्न 35. दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके केंद्र (0, 0) पर दीर्घ-अक्ष Y-अक्ष पर और बिन्दुओं (3, 2) और (1, 6) से जाता है।

हल-मान दीर्घवृत्त का समीकरण है :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{जहाँ } a < b$$

\therefore समी. (1) बिन्दुओं (3, 2) और (1, 6) से होकर जाता है।

$$\frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \quad \dots(2)$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{36}{b^2} = 1 \quad \dots(3)$$

या समी. (2) में 9 का गुण करने पर,

$$\frac{81}{a^2} + \frac{36}{b^2} = 9$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{36}{b^2} = 1$$

$$\frac{80}{a^2} = 8$$

$$a^2 = \frac{80}{8} = 10$$

\therefore मान समी. (2) में रखने पर,

$$\frac{9}{10} + \frac{4}{b^2} = 1$$

$$\frac{4}{b^2} = 1 - \frac{9}{10}$$

$$\frac{4}{b^2} = \frac{1}{10}$$

$$b^2 = 40$$

अतः b^2 के मान समी. (1) में रखने पर अभीष्ट दीर्घवृत्त समीकरण होगा-

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{40} = 1.$$

अतः

$$\frac{90 - 9a^2 - 4a^2}{a^2(10 - a^2)} = 1$$

$$90 - 13a^2 = 10a^2 - a^4$$

$$a^4 - 23a^2 + 90 = 0$$

$$a^4 - 18a^2 - 5a^2 + 90 = 0$$

$$a^2(a^2 - 18) - 5(a^2 - 18) = 0$$

$$(a^2 - 5)(a^2 - 18) = 0$$

$$a^2 = 5 \text{ या } a^2 = 18$$

$$\therefore \text{समी. (iii) से, यदि } a^2 = 5$$

$$b^2 = 10 - 5 = 5$$

$$a^2 = 18$$

$$b^2 = 10 - 18 = -8$$

अतः संभव नहीं है।

$$a^2 = b^2 = 5$$

अतः $a^2 = b^2 = 5$ समी. (i) में रखने पर, हम पाते हैं-

$$\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{5} = 1$$

$$y^2 - x^2 = 5$$

प्रश्न 38. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियाँ (± 4, 0) तथा नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई 12 है।

हल-अतिपरवलय की नाभियाँ (± 4, 0) हैं।

अतः अतिपरवलय का समीकरण होगा :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{नाभियाँ } (\pm ae, 0) = (\pm 4, 0)$$

$$ae = 4$$

\therefore नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई

$$= \frac{2b^2}{a} = 12$$

$$b^2 = 6a$$

$$b^2 = a^2(e^2 - 1)$$

$$6a = a^2e^2 - a^2$$

$$6a = 4a^2 - a^2$$

$$6a = 16 - a^2$$

$$a^2 + 6a - 16 = 0$$

$$a^2 + 8a - 2a - 16 = 0$$

$$a(a + 8) - 2(a + 8) = 0$$

$$(a - 2)(a + 9) = 0$$

$$a = 2, a = -8,$$

\therefore $a = 2$ (ऋणात्मक नहीं हो सकता)

$$a = 2$$

$$b^2 = 6a = 6 \times 2 = 12$$

$$b = \sqrt{12}$$

\therefore अ और b का मान समी. (1) में रखने पर अतिपरवलय का अभीष्ट समीकरण होगा :

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{12})^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 = 1$$

$$\Rightarrow 3x^2 - y^2 = 12.$$

अतः प्रश्न 39. 15 सेमी. लंबी एक छड़ AB दोनों निर्देशांकों के बीच में इस प्रकार रखी गई है कि उसका एक सिरे A, x-अक्ष पर और दूसरा सिरे B, y-अक्ष पर रहता है छड़ पर एक बिंदु P(x, y) इस प्रकार लिया गया है कि AP = 6 सेमी है दिखाइए कि P का बिंदुबल एक दीर्घवृत्त है।

हल-मान लीजिए छड़ AB, y-अक्ष के साथ θ कोण बनाती है जैसा कि आकृति 11.35 में दिखाया गया है। AB पर बिंदु P(x, y) इस प्रकार है कि AP = 6 सेमी. है।

क्योंकि AB = 15 सेमी., इसलिए PB = 9 सेमी.

P से PQ और PR क्रमशः y-अक्ष और x-अक्ष पर लंब डालिए।

$$\text{APBR में, } \cos\theta = \frac{x}{9}$$

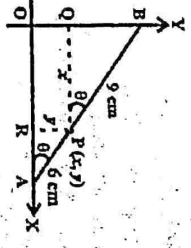
$$\text{APRA में, } \sin\theta = \frac{y}{6}$$

$$\text{क्योंकि } \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\left(\frac{x}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1$$

$$\text{या } \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$$

अतः P का बिंदुबल एक दीर्घवृत्त है।



अध्याय-12 त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय

वस्तुनिष्ठ प्रश्नों पर

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए-

(i) x-अक्ष पर किसी बिन्दु के निर्देशांक होते हैं -

(अ) (0, x, 0) (ब) (x, 0, 0)

(स) (0, 0, x) (द) (x, x, x)

(ii) xy-समतल पर किसी बिन्दु के निर्देशांक होते हैं -

(अ) (0, y, z) (ब) (x, 0, z)

(स) (x, y, 0) (द) (x, y, z)

(iii) y-अक्ष पर किसी बिन्दु के निर्देशांक होते हैं -

(अ) (0, y, 0) (ब) (y, 0, 0)

(स) (0, 0, y) (द) (y, y, y)

(iv) यदि कोई बिन्दु z-अक्ष पर है तो उसके निर्देशांक होंगे -

(अ) (z, 0, 0) (ब) (0, z, 0)

(स) (0, 0, z) (द) (z, z, z)

(v) xy -तल पर किसी बिन्दु के निर्देशांक होते हैं -

- (a) $(x, 0, z)$ (ब) $(x, y, 0)$
- (c) $(0, y, z)$ (द) $(0, y, 2)$
- (e) (x, y, z) (f) $(x, y, 0)$

(vi) YZ -तल पर किसी बिन्दु के निर्देशांक होते हैं -

- (a) $(0, y, z)$ (ब) $(x, y, 0)$
- (c) $(x, y, 0)$ (द) (x, y, z)
- (e) $(x, y, 0)$ (f) (x, y, z)

(vii) बिन्दु $(4, 3, 6)$ को z -अक्ष से दूरी होगी -

- (a) 6 (ब) 5
- (c) $\sqrt{45}$ (द) $\sqrt{52}$

(viii) बिन्दु $(12, 5, 8)$ को xy -तल से दूरी है -

- (a) 13 (ब) 12
- (c) 8 (द) 7

(ix) बिन्दु $(3, -2, 5)$ को y -अक्ष से दूरी है -

- (a) $\sqrt{13}$ (ब) $\sqrt{34}$
- (c) $\sqrt{29}$ (द) $\sqrt{8}$

उत्तर- (i) (ब), (ii) - (स), (iii) - (अ), (iv) - (स), (v) - (अ), (vi) - (अ), (vii) - (ब), (viii) - (स), (ix) - (ब)

प्रश्न 2. रिकत स्थानों की पूर्ति कीजिए -

(i) निर्देशांक तल अंतरिक्ष को भागों में विभाजित करता है।

(ii) x अक्ष एवं z अक्ष दोनों एक साथ मिलकर तल बनाते हैं।

(iii) बिन्दु $(7, 3, -8)$ को YZ समतल से दूरी है।

(iv) बिन्दुओं $(1, -3, 4)$ और $(-4, 1, 2)$ के बीच की दूरी है।

(v) बिन्दु $(3, -4, 5)$ को मूल बिन्दु से दूरी है।

(vi) बिन्दु $(-3, 5, 0)$ निर्देशांक तल पर है।

(vii) बिन्दुओं $(5, 0, 0)$ अक्ष पर है। $\{x/y/z\}$

(viii) ZX समतल में Y निर्देशांक का मान है। $\{y/0/x\}$

(ix) बिन्दु $(-2, 0, c)$ को ZX समतल से दूरी है। $\{c/0/0\}$

उत्तर- (i) 8, (ii) yz (iii) 7, (iv) $3\sqrt{5}$, (v) $5\sqrt{2}$, (vi) xy , (vii) x , (viii) 0, (ix) 0.

प्रश्न 3. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए -

(i) बिन्दु $(-3, 5, 0)$ किस तल पर स्थित है?

(ii) कोई बिन्दु ZX तल पर है तो उसका कौन-सा निर्देशांक शून्य है?

(iii) बिन्दु $(3, 0, 0)$ एवं $(0, 4, 5)$ के बीच की दूरी क्या है?

(iv) तीनों निर्देशांक तल जिस बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते हैं उसके निर्देशांक क्या है?

(v) यदि कोई बिन्दु XY तल पर हो तो उसका कौन-सा निर्देशांक शून्य है?

(vi) तीनों निर्देशांक तलों के परस्पर लम्बवर्त प्रतिच्छेद से बनी वाली तीनों रेखाओं को पुष्पक - पुष्पक क्या कहते हैं?

(vii) यदि कोई बिन्दु Z -अक्ष पर है तो उसके कौन-कौन से निर्देशांक शून्य हैं?

(viii) बिन्दु $(-3, 1, 4)$ को YZ -समतल से दूरी कितनी है?

(ix) बिन्दु $(12, 5, 23)$ को Z अक्ष से दूरी कितनी है?

उत्तर- (i) xy -तल, (ii) y -निर्देशांक, (iii) $5\sqrt{2}$, (iv) $(0, 0, 0)$, (v) Z -निर्देशांक, (vi) x -अक्ष, y -अक्ष, z -अक्ष, (vii) y एवं x निर्देशांक, (viii) 3, (ix) 13.

प्रश्न 4. सत्य/असत्य लिखिए -

(i) बिन्दु $(7, 0, 0)$, x -अक्ष पर स्थित है।

(ii) बिन्दु $(3, 4, 5)$ को y -अक्ष से दूरी 4 है।

(iii) ZX -तल पर बिन्दु के निर्देशांक $(x, 0, z)$ के रूप के होते हैं।

(iv) बिन्दु (x, y, z) को XY -तल से दूरी $\sqrt{x^2 + y^2}$ है।

(v) बिन्दु $(4, 1, 7)$, YZ -तल पर स्थित है।

उत्तर- (i) सत्य, (ii) असत्य, (iii) सत्य, (iv) असत्य, (v) असत्य।

प्रश्न 5. बिन्दुओं $(-1, 3, -4)$ और $(1, -3, 4)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल-दिये गये बिन्दु $(-1, 3, -4)$ और $(1, -3, 4)$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(1+1)^2 + (-3-3)^2 + (4+4)^2}$$

$$= \sqrt{4+36+64} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(-2, 3, 5)$, $(1, 2, 3)$ और $(7, 0, -1)$ संरेख हैं।

हल-दिये गये बिन्दु $A(-2, 3, 5)$, $B(1, 2, 3)$ और $C(7, 0, -1)$ हैं।

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(1+2)^2 + (2-3)^2 + (3-5)^2}$$

$$= \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

$$BC = \sqrt{(7-1)^2 + (0-2)^2 + (-1-3)^2}$$

$$= \sqrt{36+4+16}$$

$$BC = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

$$CA = \sqrt{(7+2)^2 + (0-3)^2 + (-1-5)^2}$$

$$= \sqrt{81+9+36} = \sqrt{126}$$

$$CA = 3\sqrt{14}$$

$$AB + BC = \sqrt{14} + 2\sqrt{14}$$

$$= AB + BC = 3\sqrt{14}$$

$$AB + BC = CA$$

अतः बिन्दु A, B, C समरेखीय हैं। यही सिद्ध करना था।

प्रश्न 7. Y -अक्ष पर उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसकी बिन्दु $P(3, -2, 5)$ से दूरी $5\sqrt{2}$ है।

हल-माना Y -अक्ष पर कोई बिन्दु $A(0, y, 0)$ है।

$$PA = 5\sqrt{2}$$

$$PA^2 = 50$$

$$(3-0)^2 + (-2-y)^2 + (5-0)^2 = 50$$

$$9 + 4 + y^2 + 4y + 25 = 50$$

$$y^2 + 4y + 38 - 50 = 0$$

$$y^2 + 4y - 12 = 0$$

$$y^2 + 6y - 2y - 12 = 0$$

$$y(y+6) - 2(y+6) = 0$$

$$(y-2)(y+6) = 0$$

$$y = 2, -6$$

अतः Y -अक्ष पर स्थित बिन्दु $(0, 2, 0)$ या $(0, -6, 0)$ होंगे। उत्तर

प्रश्न 8. बिन्दुओं $(-3, 7, 2)$ और $(2, 4, -1)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(2+3)^2 + (4-7)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{25+9+9}$$

$$AB = \sqrt{43}$$

$$= \sqrt{(0+3)^2 + (4-4)^2 + (0+5)^2}$$

$$= \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

प्रश्न 10. बिन्दु $(-6, 7, -2)$ की बिन्दु $(3, 1, 5)$ से दूरी ज्ञात कीजिए।

हल-माना दिए गए बिन्दु $P(-6, 7, -2)$ तथा $Q(3, 1, 5)$ हैं।

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(3+6)^2 + (1-7)^2 + (5+2)^2}$$

$$= \sqrt{81+36+49} = \sqrt{166}$$

$$= \sqrt{166}$$

प्रश्न 11. दर्शाइये कि $(0, 7, 10)$, $(-1, 6, 6)$ और $(-4, 9, 6)$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

हल-माना $A(0, 7, 10)$, $B(-1, 6, 6)$ तथा $C(-4, 9, 6)$ त्रिभुज के शीर्ष हैं।

$$AB = \sqrt{(0+1)^2 + (7-6)^2 + (10-6)^2}$$

$$= \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18}$$

$$= 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(-1+4)^2 + (6-9)^2 + (6-6)^2}$$

$$= \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$CA = \sqrt{(-4-0)^2 + (9-7)^2 + (6-10)^2}$$

$$= \sqrt{16+4+16}$$

$$= \sqrt{36} = 6$$

$$AB^2 + BC^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 6^2 = CA^2$$

∴ $AABC$, B पर एक समकोण त्रिभुज है।

प्रश्न 12. बिन्दुओं $(13, 5, 12)$ एवं $(4, 3, -7)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल-माना दिए गए बिन्दु $P(13, 5, 12)$ एवं $Q(4, 3, -7)$ हैं।

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(4-13)^2 + (3-5)^2 + (-7-12)^2}$$

$$= \sqrt{81+4+361} = \sqrt{446}$$

प्रश्न 13. क्या बिन्दु $(-1, 7, 3)$, $(4, 1, 2)$ तथा $(3, 2, -5)$ संरेख हैं।

हल-माना दिए गए बिन्दु $A(-1, 7, 3)$, $B(4, 1, 2)$ तथा $C(3, 2, -5)$ हैं।

$$B = \sqrt{(4+1)^2 + (1-7)^2 + (2-3)^2}$$

$$= \sqrt{25+36+1} = \sqrt{62}$$

$$C = \sqrt{(3-4)^2 + (2-1)^2 + (-5-2)^2}$$

$$= \sqrt{1+1+49} = \sqrt{51}$$

$$D = \sqrt{(3+1)^2 + (2-7)^2 + (-5-3)^2}$$

$$= \sqrt{16+25+64} = \sqrt{105}$$

$$R = AB + BC \neq AC$$

इ स्रोत नहीं है।

दशांश के बिन्दु (0, 7, -10), (1, 6, -6) और

6) एक समद्विबाहु त्रिभुज की शीर्ष है।

माना A(0, 7, -10), B(1, 6, -6) तथा C(4, 9, -6) शीर्ष हैं। तब,

AB = A तथा B बिन्दुओं के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(0-1)^2 + (7-6)^2 + (-10+6)^2}$$

$$= \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

BC = B तथा C बिन्दुओं के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(1-4)^2 + (6-9)^2 + (-6+6)^2}$$

$$= \sqrt{9+9+0}$$

$$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$AB = BC$$

अतः एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

दशांश के बिन्दु (-2, 3, 5), (1, 2, 3) और

1) स्रोत है या नहीं।

ए प्रश्न क्र. 6 का हल।

दशांश के बिन्दु (3, -15), (-2, 7, 1) और

1) स्रोत है या नहीं?

A(3, -1, 5), B(-2, 7, 1) तथा C(5, 2, -3) हैं।

$$\sqrt{(-2-3)^2 + (7+1)^2 + (1-5)^2}$$

$$\sqrt{25+64+16} = \sqrt{105}$$

$$\sqrt{(5+2)^2 + (2-7)^2 + (-3-1)^2}$$

$$\sqrt{49+25+16} = \sqrt{90}$$

$$\sqrt{(5-3)^2 + (2+1)^2 + (-3-5)^2}$$

$$\sqrt{4+9+64} = \sqrt{77}$$

$$A^2 = BC \Rightarrow CA$$

एक स्रोत नहीं है।

प्रश्न 17. क्या बिन्दु A(3, 6, 9), B(10, 20, 30) और C(25, -41, 5) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं?

हल- दूरी-सूत्र से हमें प्राप्त होता है कि

$$AB^2 = (10-3)^2 + (20-6)^2 + (30-9)^2$$

$$= 49 + 196 + 441 = 686$$

$$BC^2 = (25-10)^2 + (-41-20)^2 + (5-30)^2$$

$$= 225 + 3721 + 625 = 4571$$

$$CA^2 = (3-25)^2 + (6+41)^2 + (9-5)^2$$

$$= 484 + 2209 + 16 = 2709$$

हम पाते हैं कि $CA^2 + AB^2 \neq BC^2$

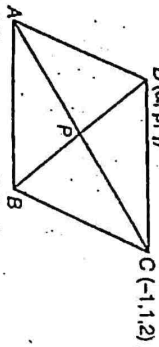
अतः ΔABC एक समकोण त्रिभुज नहीं है।

प्रश्न 18. समांतर चतुर्भुज के तीन शीर्ष A(1, 2, 2), B(1, 2, -4) व C(-1, 1, 2) हैं। चौथे शीर्ष D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल- माना ABCD एक समांतर चतुर्भुज है तथा (α, β, γ) बिन्दु के निर्देशांक हैं तथा विकर्ण AC तथा BD एक-दूसरे को बिन्दु P पर प्रतिच्छेदित करते हैं।

समांतर चतुर्भुज में विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

\therefore BD के मध्य-बिन्दु के निर्देशांक = AC के मध्य-बिन्दु के निर्देशांक



$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma-4}{2} \right) = \left(\frac{3-1}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{2+2}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma-4}{2} \right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{0}{2}, \frac{4}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma-4}{2} \right) = (1, 0, 2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma-4}{2} \right) = (1, 0, 2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma-4}{2} \right) = (1, 0, 2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma-4}{2} \right) = (1, 0, 2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma-4}{2} \right) = (1, 0, 2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma-4}{2} \right) = (1, 0, 2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma-4}{2} \right) = (1, 0, 2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma-4}{2} \right) = (1, 0, 2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma-4}{2} \right) = (1, 0, 2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma-4}{2} \right) = (1, 0, 2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma-4}{2} \right) = (1, 0, 2)$$

$$PA^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2$$

$$PB^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2$$

हल- माना बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) हैं।

$$PA^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2$$

$$PB^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 14y + 4z = 2k^2 - 109$$

प्रश्न 20. दशांश के बिन्दु A(1, 2, 3), B(-1, -2, -1), C(2, 3, 2) और D(4, 7, 6) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं। चौथे शीर्ष E के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल- माना ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

अतः विकर्ण AC और BD एक-दूसरे को बिन्दु E पर प्रतिच्छेदित करते हैं।

\therefore E के निर्देशांक = AC के मध्य-बिन्दु के निर्देशांक = BD के मध्य-बिन्दु के निर्देशांक

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma+3}{2} \right) = \left(\frac{4+2}{2}, \frac{7+3}{2}, \frac{6+2}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma+3}{2} \right) = (3, 5, 4)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma+3}{2} \right) = (3, 5, 4)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma+3}{2} \right) = (3, 5, 4)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma+3}{2} \right) = (3, 5, 4)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma+3}{2} \right) = (3, 5, 4)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma+3}{2} \right) = (3, 5, 4)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma+3}{2} \right) = (3, 5, 4)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma+3}{2} \right) = (3, 5, 4)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma+3}{2} \right) = (3, 5, 4)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma+3}{2} \right) = (3, 5, 4)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma+3}{2} \right) = (3, 5, 4)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma+3}{2} \right) = (3, 5, 4)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma+3}{2} \right) = (3, 5, 4)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma+3}{2} \right) = (3, 5, 4)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma+3}{2} \right) = (3, 5, 4)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma+3}{2} \right) = (3, 5, 4)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma+3}{2} \right) = (3, 5, 4)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma+3}{2} \right) = (3, 5, 4)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma+3}{2} \right) = (3, 5, 4)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}, \frac{\gamma+3}{2} \right) = (3, 5, 4)$$

P तथा B के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 - 2x + y^2 + 4 - 4y + z^2 + 9 - 6z = x^2 + 9 - 6x + y^2 + 4 - 4y + z^2 + 1 + 2z$$

$$\Rightarrow 4x - 58z = 0 \Rightarrow x - 2z = 0$$

अतः $x = 2z$

प्रश्न 22. बिन्दुओं P से दूरी समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी बिन्दुओं A(4, 0, 0) और B(-4, 0, 0) से दूरियों का योगफल 10 है।

हल- माना बिन्दु P(x, y, z) है, तब दिया है कि PA + PB = 10

$$\Rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} + \sqrt{(x+4)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = 10$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2} = 10$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2 + z^2} = 10 - \sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 100 - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2} + (x+4)^2 + y^2 + z^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 16 - 8x = 100 + x^2 + 16 + 8x - 20\sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow -8x - 8x - 100 = -20\sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow -16x - 100 = -20\sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow 4x + 25 = 5\sqrt{(x+4)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow (4x+25)^2 = 25[(x+4)^2 + y^2 + z^2]$$

$$\Rightarrow 16x^2 + 625 + 200x = 25(x^2 + 8x + 16 + y^2 + z^2)$$

$$\Rightarrow 16x^2 + 625 + 200x = 25x^2 + 200x + 400 + 25y^2 + 25z^2$$

$$\Rightarrow 16x^2 + 625 + 200x - 25x^2 - 200x - 400 - 25y^2 - 25z^2 = 0$$

$$\Rightarrow -9x^2 + 225 - 25y^2 - 25z^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1$$

अध्याय-13 सीमा और अवकलन

वस्तुनिष्ठ प्रश्नोत्तर

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिए-

(1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$ जहाँ $a \in \mathbb{N}$ का मान होगा-

(अ) $\frac{a^2}{2}$ (ब) $(a-1) \cdot a^2$

(स) $\frac{a^2}{2}$ (द) $\frac{a^2}{2}$

ii) यदि $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin px}{\sin qx} = 4$ हो तो p का मान होगा -

- अ) 6 (ब) 9 (स) 12 (द) 14
 iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x}$ का मान होगा -
 अ) 1 (ब) 2 (स) 0 (द) -1

iv) $\frac{d}{dx} \sec x$ का मान होगा -

- अ) $-\sec x \tan x$ (ब) $-\cot x \operatorname{cosec} x$
 स) $\cot x \operatorname{cosec} x$ (द) $\sec x \tan x$

v) $\sin^2 x$ का अवकलन गुणांक होगा -
 अ) $\cos^2 x$ (ब) $\sin^2 x$ (स) $\tan^2 x$ (द) $\cot^2 x$

प्रश्न 2. सत्य/असत्य छांटिए -
 i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ का मान 0 होगा
 ii) $2 \cos x$ का $x = \frac{\pi}{2}$ अवकलन गुणांक 2 होगा

iii) $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x$ का मान $\operatorname{cosec}^2 x$ होगा
 iv) यदि $f(x) = x^2 + 1$ हो तो $f'(2)$ का मान -2 होगा
 v) सत्य, (ii) असत्य, (iii) असत्य, (iv) असत्य

न 2. रिकत स्थानों को पूर्णतः कीजिए -
 यदि $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ है तो $x = 0$ पर $\frac{dy}{dx} = \dots$ होगा
 i) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{\theta}{4} \right)}{\theta}$ का मान \dots होगा
 ii) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\tan \theta}$ का मान \dots होगा

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}$ का मान \dots होगा
 iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x + 100}$ का मान 0
 v) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sec x$
 vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi(\pi - x)}$
 vii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\pi^2}$
 viii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi(\pi - x)}$
 ix) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$
 x) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

14. गती जोड़ी मिलिए -
 सत्य (अ) सत्य (ब)

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ का मान लिखिए।
 (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x - \pi}$ का मान लिखिए।
 (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{bx}$ का मान लिखिए।
 (iv) $x = 100$ पर 99x का अवकलन गुणांक लिखिए।
 (v) $x \sin x$ का अवकलन लिखिए।
 उत्तर- (i) $\pi/180$, (ii) -1, (iii) a/b, (iv) 99, (v) $x \cos x + \sin x$.

प्रश्न 5. एक शब्द/वाक्य में उत्तर लिखिए -

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^0}{x}$ का मान लिखिए।
 (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x - \pi}$ का मान लिखिए।
 (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{bx}$ का मान लिखिए।
 (iv) $x = 100$ पर 99x का अवकलन गुणांक लिखिए।
 (v) $x \sin x$ का अवकलन लिखिए।
 उत्तर- (i) $\pi/180$, (ii) -1, (iii) a/b, (iv) 99, (v) $x \cos x + \sin x$.

प्रश्न 6. $\lim_{x \rightarrow 1} [x(x+1)]$ का मान ज्ञात करें।
 उत्तर- $\lim_{x \rightarrow 1} [x(x+1)] = 3(3+1) = 3(4) = 12$

प्रश्न 7. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x+2}$ को हल करें।
 उत्तर- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x+2} = \frac{1+1}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

प्रश्न 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ का मान ज्ञात करें।
 उत्तर- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \operatorname{cosec} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{cosec} x} = 1 \cdot 1 = 1$

प्रश्न 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ को हल करें।
 उत्तर- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{2}{2} = 1$

प्रश्न 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\pi - x}$ को हल करें।
 उत्तर- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\pi - x} = \frac{\cos 0}{\pi - 0} = \frac{1}{\pi}$ [∵ $\cos 0 = 1$]

प्रश्न 11. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^4 - 256}{x - 4}$ का मान ज्ञात कीजिए।
 उत्तर- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^4 - 256}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2 - 16)(x^2 + 16)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)(x^2 + 16)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x+4)(x^2 + 16) = (4+4)(4^2 + 16) = 8 \times 32 = 256$

प्रश्न 12. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \cos 2x}{x} \right]$ की गणना कीजिए।
 उत्तर- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 1 \cdot 0 = 0$ [∵ $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$]

प्रश्न 13. $x^4(3 - 4x^5)$ का अवकलन कीजिए।
 उत्तर- $y = 3x^4 - 4x^9 \Rightarrow y' = 3x^3 - 4x^8$
 यहाँ x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

प्रश्न 14. $\operatorname{cosec} x$ का अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।
 उत्तर- $y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$
 यहाँ x के सापेक्ष अवकलन करने पर,
 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{1}{\sin x} = \frac{d}{dx} (1 - 1) \frac{d}{dx} (\sin x) = \frac{0 - \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \operatorname{cosec} x$

प्रश्न 15. $(x-2)^2$ का अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।
 उत्तर- $y = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (x^2 - 4x + 4) = 2x - 4 + 4 = 2x$

प्रश्न 16. $(x^2 + 1)^2$ का अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।
 उत्तर- $y = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (x^4 + 2x^2 + 1) = 4x^3 + 4x + 0 = 4x(x^2 + 1)$

प्रश्न 17. यदि $y = \frac{2 - 3 \operatorname{cosec} x}{\sin x}$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।
 उत्तर- $y = \frac{2 - 3 \operatorname{cosec} x}{\sin x} = 2 \operatorname{cosec} x - 3 \cot x$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (2 \operatorname{cosec} x - 3 \cot x) = 2 \frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x - 3 \frac{d}{dx} \cot x = 2 \operatorname{cosec} x \cot x + 3 \operatorname{cosec}^2 x$

प्रश्न 18. $(x + \cos x)(x - \tan x)$ का अवकलन कीजिए।
 उत्तर- माना $y = (x + \cos x)(x - \tan x)$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} [(x + \cos x)(x - \tan x)] = (x + \cos x) \frac{d}{dx} (x - \tan x) + (x - \tan x) \frac{d}{dx} (x + \cos x) = (x + \cos x)(1 - \sec^2 x) + (x - \tan x)(1 - \sin x) = (x + \cos x)(1 - \sec^2 x) + (x - \tan x)(1 - \sin x)$

प्रश्न 19. $\frac{d}{dx} \frac{1}{\sin x}$ का मान ज्ञात करें।
 उत्तर- $\frac{d}{dx} \frac{1}{\sin x} = \frac{d}{dx} (\sin x)^{-1} = -1(\sin x)^{-2} \cdot \cos x = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \operatorname{cosec} x$

प्रश्न 20. $\frac{d}{dx} \frac{1}{\cos x}$ का मान ज्ञात करें।
 उत्तर- $\frac{d}{dx} \frac{1}{\cos x} = \frac{d}{dx} (\cos x)^{-1} = -1(\cos x)^{-2} \cdot (-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \operatorname{cosec} x$

प्रश्न 21. $\frac{d}{dx} \frac{1}{\tan x}$ का मान ज्ञात करें।
 उत्तर- $\frac{d}{dx} \frac{1}{\tan x} = \frac{d}{dx} (\tan x)^{-1} = -1(\tan x)^{-2} \cdot \sec^2 x = \frac{-\sec^2 x}{\tan^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$

प्रश्न 22. $\frac{d}{dx} \frac{1}{\cot x}$ का मान ज्ञात करें।
 उत्तर- $\frac{d}{dx} \frac{1}{\cot x} = \frac{d}{dx} (\cot x)^{-1} = -1(\cot x)^{-2} \cdot (-\operatorname{cosec}^2 x) = \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\cot^2 x} = \sec^2 x$

प्रश्न 19. $(2 \tan x - 7 \sec x + x^4)$ का अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल- $y = 2 \tan x - 7 \sec x + x^4$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (2 \tan x - 7 \sec x + x^4)$

$= 2 \frac{d}{dx} \tan x - 7 \frac{d}{dx} \sec x + \frac{d}{dx} x^4$
 $= 2 \sec^2 x - 7 \sec x \tan x + 4x^3$

प्रश्न 20. यदि $y = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$ जहाँ $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ तब $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल- $y = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}} = \sqrt{\frac{1 - (1 - 2 \sin^2 x)}{1 + (2 \cos^2 x - 1)}}$
 $= \sqrt{\frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x}} = \sqrt{\tan^2 x} = |\tan x|$

जहाँ $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

तब $\frac{dy}{dx} = \tan x$

प्रश्न 21. यदि $y = x^2 \cdot \cos x$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल- $y = x^2 \cos x$
 $\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx} \cos x + \cos x \frac{d}{dx} x^2$
 $= -x^2 \sin x + 5x^1 \cos x$
 $= x^1 (5 \cos x - x \sin x)$

प्रश्न 22. $\sec x - \tan x$ का अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल- $y = \sec x - \tan x$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sec x - \frac{d}{dx} \tan x$
 $= \sec x \tan x - \sec^2 x$

प्रश्न 23. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 4}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल- 2 पर फलन का मान प्राप्त करने पर हम इसे $\frac{0}{0}$ का रूप में पाते हैं। अतः
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x+2)}$
 $= \frac{2(2-2)}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$

प्रश्न 24. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^{15} - 1}{x^{10} - 1} \right]$ को हल कीजिए।

हल- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{15} - 1}{x^{10} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^{15} - 1}{x - 1} + \frac{x^{10} - 1}{x - 1} \right]$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^{15} - 1}{x - 1} \right] + \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^{10} - 1}{x - 1} \right]$
 $= 15(1)^{14} + 10(1)^9$ (उत्पन्न प्रमेय से)
 $= 15 + 10 = \frac{3}{2}$

प्रश्न 25. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल- $y = 1 + x$, जिससे $y \rightarrow 1$ जैसे $x \rightarrow 0$. तब
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt{y} - 1}{y - 1}$
 $= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{y} + 1}$
 $= \frac{1}{(1)^{1/2} + 1}$ (उत्पन्न विपणनी से) $= \frac{1}{2}$

प्रश्न 26. $\lim_{y \rightarrow 1} \left[\frac{a^0 + x \cdot 000x}{b \cdot 000x} \right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल- $y = \frac{a^0 - a^n}{x - a}$

y का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{(x^n - a^n) - (x^n - a^n)}{(x-a) \frac{d}{dx} (x-a)}$
 $= \frac{(x-a) \ln x^{n-1} - 0 - (x^n - a^n)(1-0)}{(x-a)^2}$
 $= \frac{(x-a) n x^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2} = \frac{x \cdot n x^{n-1} - a n x^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2}$
 $= \frac{n x^n - a n x^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2}$

प्रश्न 28. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{2x^2 - 5x - 3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{2x^2 - 5x - 3}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)(x^2 + 9)}{2x^2 - 5x - 3}$ [$\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$]
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(x^2 + 9)}{2x(x-3) + 1(x-3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(x^2 + 9)}{(x-3)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x^2 + 9)}{2x+1}$
 $= \frac{(3+3)(3^2 + 9)}{2 \cdot 3 + 1} = \frac{6 \times 18}{7} = 108$

प्रश्न 29. $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^{1/3} - 1}{z^{1/6} - 1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल- $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^{1/3} - 1}{z^{1/6} - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^{1/3} - 1}{z^{1/6} - 1} \times \frac{z^{1/6} - 1}{z^{1/6} - 1}$
 $= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\left(\frac{1}{3}\right) (1)^{2/3}}{\left(\frac{1}{6}\right) (1)^{5/6}} = \frac{6}{3} \times 1 = 2$

प्रश्न 30. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ज्ञात कीजिए जहाँ

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \\ -x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$
हल- $x = 1 + h$ रखते हैं, जहाँ $x \rightarrow 1$, तब $h \rightarrow 0$.
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [-(1+h)^2 - 1]$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} [-(1 + h^2 + 2h) - 1]$
 $= -(1 + 0 + 0) - 1$
 $= -1 - 1$
 $= -2$

$x = 1 - h$ रखते हैं, जहाँ $x \rightarrow 1$, तब $h \rightarrow 0$.
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} [(1-h)^2 - 1]$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} [(1 + h^2 - 2h) - 1]$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} [h^2 - 2h]$
 $= 0 - 0 = 0$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
अतः, चिन्ह $x = 1$ पर सीमा का अस्तित्व नहीं है।
प्रश्न 31. $y = \frac{x + \cos x}{\tan x}$ है तो $\frac{dy}{dx}$ मान ज्ञात कीजिए।

हल- हम फलन $\frac{x + \cos x}{\tan x}$ पर भागफल नियम का प्रयोग करेंगे जहाँ $\frac{d}{dx} \left[\frac{u}{v} \right] = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$
 $h(x) = \frac{(1 - \sin x) \tan x - (x + \cos x) \sec^2 x}{(\tan x)^2}$

प्रश्न 32. $\frac{4x + 5 \sin x}{3x + 7 \cos x}$ का अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल- मान $y = \frac{4x + 5 \sin x}{3x + 7 \cos x}$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\frac{4x + 5 \sin x}{3x + 7 \cos x} \right]$

$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x + 7 \cos x) \frac{d}{dx} (4x + 5 \sin x) - (4x + 5 \sin x) \frac{d}{dx} (3x + 7 \cos x)}{(3x + 7 \cos x)^2}$
 $= \frac{(3x + 7 \cos x)(4 + 5 \cos x) - (4x + 5 \sin x)(3 - 7 \sin x)}{(3x + 7 \cos x)^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{12x + 15x \cos x + 28 \cos^2 x - 12x + 28x \sin x - 15 \sin x + 35 \sin^2 x}{(3x + 7 \cos x)^2}$
 $= \frac{35 \cos^2 x + \sin^2 x + 15x \cos x + 28 \cos x + 28x \sin x - 15 \sin x}{(3x + 7 \cos x)^2}$

33. $\frac{\sec x - 1}{\sec x + 1}$ का अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

माना $y = \frac{\sec x - 1}{\sec x + 1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sec x - 1}{\sec x + 1} \right)$$

$$= \frac{(\sec x + 1) \frac{d}{dx} (\sec x - 1) - (\sec x - 1) \frac{d}{dx} (\sec x + 1)}{(\sec x + 1)^2}$$

$$= \frac{(\sec x + 1)(\sec x \tan x - 0) - (\sec x - 1)(\sec x \tan x + 0)}{(\sec x + 1)^2}$$

$$= \frac{x \tan x (\sec x + 1) - \sec x (\sec x + 1)}{(\sec x + 1)^2}$$

34. $\sec x + \tan x$ का अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

माना $y = \sec x + \tan x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (\sec x + \tan x)$$

$$= \frac{d}{dx} \left(\frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} \right)$$

$$= \frac{(\sec x + \tan x) \frac{d}{dx} (x \tan x) - x \tan x \frac{d}{dx} (\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)^2}$$

35. $\tan x$ के अवकलन का परिकलन कीजिए।

माना $f(x) = \tan x$, तब

$$f(x+h) = \tan(x+h)$$

$$f(x) = \tan x$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h}$$

$$= \frac{1}{h} \left[\frac{\sin(x+h) \cos x - \sin x \cos(x+h)}{\cos(x+h) \cos x} \right]$$

$$= \frac{1}{h} \left[\frac{\sin(x+h) \cos x - \cos(x+h) \sin x}{\cos(x+h) \cos x} \right]$$

$$= \frac{\sin(x+h) \cos x - \cos(x+h) \sin x}{h \cos(x+h) \cos x}$$

$$= \frac{\sin(A+B) \cos C - \cos(A+B) \sin C}{h \cos(A+B) \cos C}$$

$$= \frac{\sin(A+B) \cos C - \cos(A+B) \sin C}{h \cos(A+B) \cos C}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

प्रश्न 36. $\sin x$ के अवकलन का परिकलन कीजिए।

हल- मान लीजिए $f(x) = \sin x$, तब

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos \left(\frac{2x+h}{2} \right) \sin \left(\frac{h}{2} \right)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin(A+B) \text{ के सूत्र का प्रयोग करके})}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x$$

प्रश्न 37. $x^5 - \cos x$ का अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल- मान लीजिए $h(x) = x^5 - \cos x$ जहाँ कहा भी यह परिभाषित है, हम इस फलन पर भागफल नियम का प्रयोग करेंगे।

$$h'(x) = \frac{d}{dx} (x^5 - \cos x) = (x^5 - \cos x)' \sin x - (x^5 - \cos x) (\sin x)'$$

$$= (5x^4 + \sin x) \sin x - (x^5 - \cos x) \cos x$$

$$= 5x^4 \cos x + 5x^4 \sin x + 1$$

प्रश्न 38. $\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}$ को x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

हल- $y = \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}} \right)$$

$$= \frac{(\sqrt{a-x}) \frac{d}{dx} (\sqrt{a+x}) - (\sqrt{a+x}) \frac{d}{dx} (\sqrt{a-x})}{(\sqrt{a-x})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a-x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) - (\sqrt{a+x}) \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)}{(\sqrt{a-x})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x}}{2\sqrt{x}(\sqrt{a-x})^2} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}(\sqrt{a-x})^2}$$

अध्याय-15 सांख्यिकी

वस्तुनिष्ठ प्रश्नोत्तर

प्रश्न 1. एक शब्द वाक्य में उत्तर दीजिए-
 (1) आँकड़ों के परिसर को परिभाषित कीजिए।
 (2) यदि एक बल्लेबाज द्वारा खेल में अधिकतम 60 रन और न्यूनतम 46 रन बनाए जाते हैं तो रनों का परिसर ज्ञात कीजिए।
 (3) निम्नलिखित आँकड़ों से माध्य का मान लिखिए।
 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12
 (4) निम्नलिखित आँकड़ों से माध्यिका का मान लिखिए -
 3, 9, 5, 3, 12, 10, 18, 4, 7, 19, 21
 (5) निम्नलिखित आँकड़ों से माध्यिका का मान लिखिए।
 4, 10, 6, 4, 13, 11, 19, 5, 8, 20
 जहाँ (1) किसी श्रृंखला के अधिकतम एवं न्यूनतम मानों के अंतर को परिसर कहते हैं। (2) परिसर = $60 - 46 = 14$
 (3) 9, (4) 9, (5) 9.

प्रश्न 2. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12
 हल- हम क्रमबद्ध आगे बढ़ते हुए निम्नलिखित ज्ञात करते हैं-
 लिए गए आँकड़ों का माध्य

$$\bar{x} = \frac{6+7+10+12+13+4+8+12}{8} = \frac{72}{8} = 9 \text{ है।}$$

प्रश्नों का माध्य \bar{x} से क्रमशः विचलन $x_i - \bar{x}$
 अर्थात् 6-9, 7-9, 10-9, 12-9, 13-9, 4-9, 8-9, 12-9 है।
 या -3, -2, 1, 3, 4, -5, -1, 3 है।
 विचलनों के नरपक्ष मान $|x_i - \bar{x}|$
 3, 2, 1, 3, 4, 5, 1, 3 है।
 माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन निम्नलिखित है:

$$M.D.(\bar{x}) = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

$$= \frac{3+2+1+3+4+5+1+3}{8} = \frac{22}{8} = 2.75$$

प्रश्न 3. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।
 1, 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 17
 हल- दिए गए आँकड़ों का माध्य

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

यहाँ का योग $\sum x_i$
 यहाँ की संख्या n

$$= \frac{4+7+8+9+10+12+13+17}{8} = 10$$

x_i	$ x_i - \bar{x} $
4	$ 4 - 10 = 6$
7	$ 7 - 10 = 3$
8	$ 8 - 10 = 2$
9	$ 9 - 10 = 1$
10	$ 10 - 10 = 0$
12	$ 12 - 10 = 2$
13	$ 13 - 10 = 3$
17	$ 17 - 10 = 7$
$\sum x_i = 80$	$\sum x_i - \bar{x} = 24$

∴ माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन

$$= \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{24}{8} = 3$$

प्रश्न 4. निम्नलिखित आँकड़ों से माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

3, 9, 5, 3, 12, 10, 18, 4, 7, 19, 21
 हल- यहाँ श्रेणियों की संख्या 11 है जो विषम है। आँकड़ों को आरोही क्रम में लिखने पर हमें 3, 3, 4, 5, 7, 9, 1, 12, 18, 19, 21 प्राप्त होता है।

अब माध्यिका = $\left(\frac{11+1}{2} \right)$ वाँ या 6वाँ श्रेणिका = 9 है।
 विचलनों का क्रमशः नरपक्ष मान $|x_i - M|$ इस प्रकार से है।
 6, 6, 5, 4, 2, 0, 1, 3, 9, 10, 12

इसलिए $\sum |x_i - M| = 58$

तथा $M.D. (M) = \frac{1}{n} \sum |x_i - M| = \frac{1}{11} \times 58 = 5.27$

प्रश्न 5. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

x_i	f_i	$f_i x_i$	$ x_i - \bar{x} $	$f_i x_i - \bar{x} $
2	2	4	5.5	11
5	8	40	2.5	20
6	10	60	1.5	15

हल- आइए दिए गए आँकड़ों की सारणी 5.1 बनाकर अन्य संबंध परिकलन के बाद लगाएँ।

सारणी

वि.पी.एच. प्रश्न बैंक

7	56	0.5	3.5
8	80	2.5	20
5	60	4.5	22.5
40	300		92

$\sum f_i x_i = 40, \sum f_i x_i = 300, \sum f_i |x_i - \bar{x}| = 92$

$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum f_i x_i = \frac{1}{40} \times 300 = 7.5$

$M.D.(\bar{x}) = \frac{1}{N} \sum f_i |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{40} \times 92 = 2.3$

निम्न आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करें-

10	30	50	70	90
4	24	28	16	8

f_i	$f_i x_i$	$ x_i - \bar{x} $	$f_i x_i - \bar{x} $
4	40	$10 - 50 = 40$	160
24	720	$30 - 50 = 20$	480
28	1400	$50 - 50 = 0$	0
16	1120	$70 - 50 = 20$	320
8	720	$90 - 50 = 40$	320
$\Sigma f_i = 60$	$\Sigma f_i x_i = 4000$		$\Sigma f_i x_i - \bar{x} = 1280$

$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{4000}{60} = 66.67$

सापेक्ष माध्य विचलन = $\frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \frac{1280}{60} = 21.33$

निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष विचलन ज्ञात कीजिए:

3	6	9	12	13	15	21	22
3	4	5	2	4	5	4	3

हल- ग. आँकड़े पहले ही आरोही क्रम में हैं। इन में अंशतः संचयी वारंवारता की एक कक्षा और लगाते हैं।

सारणी	
x_i	3, 6, 9, 12, 13, 15, 21, 22
f_i	3, 4, 5, 23, 4, 5, 4, 3
c.f.	3, 7, 12, 14, 18, 23, 27, 30

अब, $N = 30$ है जो सम संख्या है।
इसलिए माध्यिका 15वाँ व 16वाँ श्रेणियों का माध्य है। यह दोनों श्रेणियों संचयी वारंवारता 18 से स्थित है जिसका अंशतः श्रेणिका 13 है।

इसलिए माध्यिका $M = 15$ वाँ श्रेणिका + 16 वाँ श्रेणिका
 $= \frac{13+13}{2} = 13$

अब माध्यिका से विचलनों का निरपेक्ष मान अर्थात् $|x_i - M|$ निम्नलिखित सारणी में दर्शाए गए हैं।

$ x_i - M $	10	7	4	1	0	2	8	9
f_i	3	4	5	2	4	5	4	3
$f_i x_i - M $	30	28	20	2	0	10	32	27

$\sum f_i |x_i - M| = 149$

इसलिए $M.D.(\bar{x}) = \frac{1}{N} \sum f_i |x_i - M| = \frac{1}{30} \times 149 = 4.97$

प्रश्न 8. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए प्रसरण तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए-

हल- दिए गए आँकड़ों को निम्नलिखित प्रकार से सारणी 15.7 में लिख सकते हैं। माध्य को पर विचलन विधि द्वारा 14 को कल्पित माध्य लेकर ज्ञात किया गया है। श्रेणियों की संख्या $n = 10$ है।

x_i	6	8	10	12	14
$d_i = \frac{x_i - 14}{2}$	-4	-3	-2	-1	0
माध्य से विचलन $(x_i - \bar{x})$	-9	-7	-5	-3	-1
$(x_i - \bar{x})^2$	81	49	25	9	1

16	1	1	1
18	2	3	9
20	3	5	25
22	4	7	49
24	5	9	81
	5		330

माध्य $\bar{x} =$ कल्पित माध्य + $\frac{\sum d_i}{n} \times h$

अतः मानक विचलन $\sigma = \sqrt{33} = 5.74$

x	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
f	2	3	8	14	8	3	2

हल- दिए गए आँकड़ों से निम्न सारणी 15.4 बनाते हैं। सारणी-

प्राप्तिका	छात्रों की संख्या f_i	माध्य-विंदु x_i	$f_i x_i$	$ x_i - \bar{x} $	$f_i x_i - \bar{x} $
10-20	2	15	30	30	60
20-30	3	25	75	20	60
30-40	8	35	280	10	80
40-50	14	45	630	0	0
50-60	8	55	440	10	80
60-70	3	65	195	20	60
70-80	2	75	150	30	60
	40		1800		400

$N = \sum f_i = 40, \sum f_i x_i = 1800, \sum f_i |x_i - \bar{x}| = 400$
इसलिए $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum f_i x_i = \frac{1800}{40} = 45$

अतः $M.D.(\bar{x}) = \frac{1}{N} \sum f_i |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{40} \times 400 = 10$

प्रश्न 10. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए.

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
वारंवारता	6	7	15	16	4	2

हल- दिए गए आँकड़ों से निम्न सारणी 15.6 बनाते हैं:

वर्ग	वारंवारता f_i	संचयी वारंवारता (c.f.)	माध्य-विंदु x_i	$ x_i - \text{Med.} $	$f_i x_i - \text{Med.} $
0-10	6	6	5	23	138
10-20	7	13	15	13	91
20-30	15	28	25	3	45
30-40	16	44	35	7	112
40-50	4	48	45	17	68
50-60	2	50	55	27	54
	50				508

$N = 50$, इसलिए $\frac{N}{2}$ वीं या 25वीं मद 20 - 30 वर्ग में है। इसलिए 20 - 30 माधिका वर्ग है। हम जानते हैं कि

$$\text{माधिका} = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$$

$$l = 20, C = 13, f = 15, h = 10 \text{ और } N = 50, \text{ इसलिए, माधिका} = 20 + \frac{25 - 13}{15} \times 10 = 20 + 8 = 28$$

माधिका के सापेक्ष माध्य विचलन M.D. (M) = $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^k f_i |x_i - M| = \frac{1}{50} \times 508 = 10.16$ है।

11. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात कीजिए:

x_i	4	8	11	17	20	24	32
f_i	3	5	9	5	4	3	1

- आँकड़ों को सारणी के रूप में लिखने पर हमें निम्नलिखित सारणी 15.8 प्राप्त होती है : सारणी-

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i (x_i - \bar{x})^2$
4	3	12	-10	100	300
8	5	40	-6	36	180
11	9	99	-3	9	81
17	5	85	3	9	45
20	4	80	6	36	144
24	3	72	10	100	300
32	1	32	18	324	324
	30	420			1374

$$\therefore \sum_{i=1}^k f_i x_i = 420, \sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2 = 1374$$

$$\text{अतः प्रसरण } (\sigma^2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{N} \right)^2 = \frac{1}{30} \times 1374 = 45.8$$

$$\text{और मानक विचलन } \sigma = \sqrt{45.8} = 6.77$$

12. निम्नलिखित वंटन के लिए माध्य, प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए:

वर्ग	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
आवृत्ति	3	7	12	15	8	3	2

दिए गए आँकड़ों से निम्नलिखित सारणी 15.9 बनाते हैं।

सारणी

वर्ग	आवृत्ति (f_i)	माध्य - बिंदु (x_i)	$f_i x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i (x_i - \bar{x})^2$
0-10	3	35	105	729	2187
0-50	7	45	315	289	2023
0-60	12	55	660	49	588
0-70	15	65	975	9	135
0-80	8	75	600	169	1352
0-90	3	85	255	529	1587
1-100	2	95	190	1089	2178
	50		3100		10050

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k f_i x_i = \frac{3100}{50} = 62$$

$$\text{प्रसरण } (\sigma^2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{50} (10050) = 201$$

$$\text{और मानक विचलन } \sigma = \sqrt{201} = 14.18$$

अभ्यास-16

दरपेक्षा प्रश्नोत्तर

प्रायिकता

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिये-

(i) यदि A और B दो असंयुक्त समुच्चय हों तो $A \cap B$ का मान होगा -

- (अ) \emptyset (ब) A (स) B (द) ϕ

(ii) यदि $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ तथा A और B परस्पर अपवर्ती घटनाएँ हैं, तो $P(A \cup B)$ का मान होगा:

- (अ) $\frac{5}{6}$ (ब) $\frac{1}{6}$ (स) $\frac{1}{3}$ (द) $\frac{2}{3}$

उत्तर-(i)-(अ), (ii)-(अ).

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

(i) $P(A) + P(A^c) = \dots\dots\dots$

(ii) यदि किसी यादृच्छिक परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि S है तो $P(S) = \dots\dots\dots$

उत्तर-(i) 1, (ii) 1.

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए -

(i) यदि किसी घटना A की प्रायिकता $\frac{9}{11}$ है तो घटना A^c की प्रायिकता $\frac{2}{11}$ होगी।

(ii) प्रतिदर्श समष्टि S का कोई उपसमुच्चय एक घटना कहलाता है।

(iii) एक प्रतिदर्श समष्टि की सतत घटनाएँ सदैव परस्पर अपवर्ती होती हैं।

उत्तर-(i) सत्य, (ii) सत्य, (iii) सत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए -

(i) दो सिक्कों को एक बार उछाला गया है। प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।

(ii) एक सिक्के को दो बार उछाला गया है। प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।

(iii) तीन सिक्कों को एक बार उछाला गया है। प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।

(iv) एक सिक्के को तीन बार उछाला गया है। प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।

(v) एक सिक्का उछाला गया है और केवल उस दशा में, जब सिक्के पर चित्र प्रकट होता है एक पासा फेंका जाता है। प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।

उत्तर-(i) S = {HH, HT, TH, TT} (ii) S = {HH, HT, TH, TT} (iii) S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT} (iv) S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT} (v) S = {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T} (vi) S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

प्रश्न 5. दो सिक्कों (एक 1 रु. तथा दूसरा 2 रु. का) को एक बार उछाला गया है। प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

हल- स्पष्टतः सिक्के इस अर्थ में विभेद्य हैं कि हम उनका पहला सिक्का और दूसरा सिक्का संयोजित कर सकते हैं क्योंकि दोनों सिक्कों में से किसी पर चित्र (H) या पट्ट (T) प्रकट हो सकते हैं, इसलिए संभव परिणाम निम्नलिखित हैं।

पहले सिक्के पर चित्र और दूसरे पर पट्ट = (H, T) = HT

पहले सिक्के पर पट्ट और दूसरे पर चित्र = (T, H) = TH

दोनों सिक्कों पर पट्ट = (T, T) = TT

अतएव, दिए हुए परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

S = {HH, HT, TH, TT} है।

प्रश्न 6. पासों के जोड़े (जिसमें एक लाल रंग का और दूसरा नीले रंग का है) को एक बार फेंकने के परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए। प्रतिदर्श समष्टि के अवयवों को संख्या भी ज्ञात कीजिए।

हल- मान लीजिए कि नीले रंग के पासे पर 1 और लाल रंग पर 2 प्रकट होता है। हम इस परिणाम को क्रमित युग्म (1, 2) द्वारा निरूपित करते हैं। इसी प्रकार, यदि नीले पासे पर 3 और लाल पर 5 प्रकट होता है, तो इस परिणाम को (3, 5) द्वारा निरूपित करते हैं। व्यापक रूप से प्रत्येक परिणाम को क्रमित युग्म (x, y) द्वारा निरूपित किया जा सकता है जहाँ x नीले रंग के पासे पर और y लाल पासे पर प्रकट होने वाली संख्याएँ हैं। अतएव, प्रतिदर्श समष्टि निम्नलिखित है:

S = {(x, y): x नीले पासे पर प्रकट संख्या और y लाल पासे पर प्रकट संख्या है} इस प्रतिदर्श समष्टि के अवयवों को संख्या $6 \times 6 = 36$ है और प्रतिदर्श समष्टि नीचे प्रदत्त है:

{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

प्रश्न 7. एक सिक्का उछाला गया है और केवल उस दशा में, जब सिक्के पर चित्र प्राप्त होता है एक पासा फेंका जाता है।

हल- प्रतिदर्श समष्टि S = {H1, H2, H3, H4, H5, H6}

जहाँ, H सिक्के पर चित्र प्रदर्शित करता है।

प्रश्न 8. एक पासा फेंका जाता है। मान लीजिए घटना E 'पासे पर संख्या 4 दर्शाता' है और घटना F 'पासे पर सम संख्या दर्शाता' है। क्या E और F परस्पर अपवर्ती घटनाएँ हैं?

हल- नहीं।



1
2
3
4
5
6

E = पासे पर संख्या 4 दर्शाता है। = {4}

F = पासे पर सम संख्या दर्शाता है।

= {2, 4, 6}

n(F) = 4 ≠ ∅

और F परस्पर अपवर्ती घटनाएँ नहीं हैं।

एक सिक्का दो बार उछाला जाता है। कम-से-कम घटना होने की क्या प्रायिकता है?

दिए गए समष्टि, S = {HH, HT, TH, TT}

घटना E कम-से-कम एक घटना प्रदर्शित करती है।

{HT, TH, TT}

अनुकूल परिणामों की संख्या

घटना प्रायिकता, P = $\frac{\text{कुल संभावित परिणामों की संख्या}}{n(S)}$

= $\frac{3}{4}$

(i) संख्याओं का योग 3 होने की घटना E है, तब

E = {1, 2}

n(E) = 1

∴ प्रायिकता P(E) = $\frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{12}$

(ii) संख्याओं का योग 12 होने की घटना E है, तब

E' = {6, 6}

n(E') = 1

∴ प्रायिकता P(E') = $\frac{n(E')}{n(S)} = \frac{1}{12}$

प्रश्न 12. यदि E और F घटनाएँ इस प्रकार हैं कि P(E) = $\frac{1}{4}$, P(F) = $\frac{1}{2}$ और P(E और F) = $\frac{1}{8}$, तो ज्ञात कीजिए

(i) P(E या F) (ii) P(E नहीं और F नहीं)

हल- दिया है,

P(E) = $\frac{1}{4}$, P(F) = $\frac{1}{2}$, P(E और F) = $\frac{1}{8}$

(i) P(E या F) = P(E) + P(F) - P(E ∩ F)

= $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} + \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

(∵ A या B का अर्थ है A ∪ B)

(ii) P(E नहीं और F नहीं)

= P(E' ∩ F') [∵ द्विगोचर विधि से, E' ∩ F' = (E ∪ F)']

= P(E ∪ F)' = 1 - P(E ∪ F) = 1 - $\frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

प्रश्न 13. घटनाएँ A और B इस प्रकार हैं कि

P(A) = 0.42, P(B) = 0.48, P(A और B) = 0.16

ज्ञात कीजिए-

(i) P(A नहीं), (ii) P(B नहीं) और (iii) P(A या B)

हल- दिया है, P(A) = 0.42, P(B) = 0.48

P(A और B) = P(A ∩ B) = 0.16

(i), P(A नहीं) = P(A') = 1 - P(A)

किसी घटना तथा उसके पूरक घटना का ग सदैव 1 होता है।

P(A) + P(A') = 1

= 1 - 0.42 = 0.58

(ii) P(B नहीं) = P(B') = 1 - P(B) [∵ P(B) + P(B') = 1]

= 1 - 0.48 = 0.52

(iii) P(A या B) = P(A ∪ B)

= P(A) + P(B) - P(A ∩ B)

= 0.42 + 0.48 - 0.16 = 0.90 - 0.16 = 0.74

प्रश्न 14. A तथा B दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि

P(A) = 0.54, P(B) = 0.69 और P(A ∩ B) = 0.35

ज्ञात कीजिए- (i) P(A ∪ B) (ii) P(A' ∩ B')

(iii) P(A ∩ B') (iv) P(B ∩ A')

हल- यहाँ हम निम्न सूत्रों का प्रयोग करेंगे

(a) P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)

(b) P(A' ∩ B) = P(A ∪ B)' = 1 - P(A ∪ B)

(c) P(A' ∩ B') = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)

= 0.54 + 0.69 - 0.35 = 1.23 - 0.35 = 0.88

(ii) P(A' ∩ B) = P(A ∪ B)'

= 1 - P(A ∪ B) = 1 - 0.88 = 0.12

(iii) P(A ∩ B') = P(A ∩ B)

= P(A) - P(A ∩ B)

= 0.54 - 0.35 = 0.19

(iv) P(B ∩ A') = P(A ∩ B)

= P(B) - P(A ∩ B)

= 0.69 - 0.35 = 0.34

प्रश्न 15. P(A) = $\frac{3}{5}$ और P(B) = $\frac{1}{5}$ दिया गया है यदि A और B परस्पर अपवर्ती घटनाएँ हैं, तो P(A या B) ज्ञात कीजिए

हल- A और B अपवर्ती घटनाएँ हैं।

∴ P(A या B) = P(A ∪ B) = P(A) + P(B)

P(A ∪ B) = $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

उत्तर

प्रश्न 16. एक पासा फेंकने के परीक्षण पर विचार कीजिए। घटना 'एक अभाज्य संख्या प्राप्त होना' को A से और घटना 'एक विषम संख्या प्राप्त होना' को B से निरूपित किया गया है। निम्नलिखित घटनाओं (i) A या B (ii) A और B (iii) A किंतु B नहीं (iv) 'A-नहीं' को निरूपित करने वाले समुच्चय लिखिए।

हल- यहाँ S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, A = {2, 3, 5} और B = {1, 3, 5}

अर्थात्

(i) A या B' = A ∪ B = {1, 2, 3, 5}

(ii) 'A और B' = A ∩ B = {3, 5}

(iii) 'A किंतु B नहीं' = A - B = {2}

(iv) 'A-नहीं' = A' = {1, 4, 6}

प्रश्न 17. एक पासा फेंका जाता है। निम्नलिखित घटनाओं का वर्णन कीजिए।

(i) A: संख्या 7 से कम है।

(ii) B: संख्या 7 से बड़ी है।

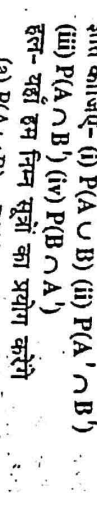
(iii) C: संख्या 3 का गुणज है।

(iv) D: संख्या 4 से कम है।

(v) E: 4 से बड़ी सम संख्या है।

(vi) F: संख्या 3 से कम नहीं है।

साथ ही A ∪ B, A ∩ B, B ∪ C, E ∩ F, D ∪ E, A - C, D - E, E ∩ F, F' भी ज्ञात कीजिए।



(ii) B: संख्या से बड़ी है। = {} = ∅

(चूँकि पासे पर अधिकतम 6 संख्याएँ होती हैं इसलिए पासे पर 7 से बड़ी संख्या नहीं हो सकती।)

(iii) C: संख्या का गुणज है। = {3, 6}

(iv) D: संख्या 4 से कम है। = {1, 2, 3}

(v) E: 4 से बड़ी सम संख्या है। = {6}

(vi) F: संख्या 3 से कम नहीं है। = {3, 4, 5, 6}

अब, A ∪ B = अवयवों का समुच्चय जो या तो A में हो या B में हो = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ∪ ∅ = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A ∩ B = अवयवों का समुच्चय जो A और B में हो या C में हो = {} ∪ {3, 6} = {3, 6}

B ∪ E = अवयवों का समुच्चय जो D और E दोनों में तयस्थित हो। = {1, 2, 3} ∪ {6} = ∅

A - C = अवयवों का समुच्चय A में हो किंतु C में नहीं हो = {1, 2, 3, 4, 5, 6} - {3, 6} = {1, 2, 4, 5}

D - E = अवयवों का समुच्चय जो D में हो किंतु E में नहीं हो। = {1, 2, 3} - {6} = {1, 2, 3}

E ∩ F = E ∪ (U - F) = E ∪ {1, 2, 3, 4, 5, 6} - {3, 4, 5, 6}

[∵ U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}]

= {6} ∩ {1, 2} = ∅

और F' = (U - F) = {1, 2, 3, 4, 5, 6} - {3, 4, 5, 6} = {1, 2}

प्रश्न 18. एक पासा फेंका जाता है। निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(i) एक अभाज्य संख्या प्राप्त होना।

(ii) 3 या 3 से बड़ी संख्या प्राप्त होना।

(iii) 1 या 1 से छोटी संख्या प्राप्त होना।

(iv) छ: से बड़ी संख्या प्राप्त होना।

(v) छ: से छोटी संख्या प्राप्त होना।

हल- जब एक पासा फेंका जाता है, तब 1 से 6 तक कोई भी संख्या प्राप्त होगी। अतः पासे का प्रतिदर्श समष्टि, S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

(i) माना घटना E एक अभाज्य संख्या प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।

E = {2, 3, 5}

∴ अभाज्य संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता, P

= $\frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल संभावित परिणामों की संख्या}} = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(ii) माना E3 या 3 से बड़ी संख्या प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।

E = {3, 4, 5, 6}

∴ 3 या 3 से बड़ी संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता,

P = $\frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(iii) माना घटना E1 या 1 से छोटी संख्या प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।

E = {1}

∴ 1 या 1 से छोटी संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता,

(ii) B: संख्या से बड़ी है। = {} = ∅

(चूँकि पासे पर अधिकतम 6 संख्याएँ होती हैं इसलिए पासे पर 7 से बड़ी संख्या नहीं हो सकती।)

(iii) C: संख्या का गुणज है। = {3, 6}

(iv) D: संख्या 4 से कम है। = {1, 2, 3}

(v) E: 4 से बड़ी सम संख्या है। = {6}

(vi) F: संख्या 3 से कम नहीं है। = {3, 4, 5, 6}

अब, A ∪ B = अवयवों का समुच्चय जो या तो A में हो या B में हो = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ∪ ∅ = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A ∩ B = अवयवों का समुच्चय जो A और B में हो या C में हो = {} ∪ {3, 6} = {3, 6}

B ∪ E = अवयवों का समुच्चय जो D और E दोनों में तयस्थित हो। = {1, 2, 3} ∪ {6} = ∅

A - C = अवयवों का समुच्चय A में हो किंतु C में नहीं हो = {1, 2, 3, 4, 5, 6} - {3, 6} = {1, 2, 4, 5}

D - E = अवयवों का समुच्चय जो D में हो किंतु E में नहीं हो। = {1, 2, 3} - {6} = {1, 2, 3}

E ∩ F = E ∪ (U - F) = E ∪ {1, 2, 3, 4, 5, 6} - {3, 4, 5, 6}

[∵ U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}]

= {6} ∩ {1, 2} = ∅

और F' = (U - F) = {1, 2, 3, 4, 5, 6} - {3, 4, 5, 6} = {1, 2}

प्रश्न 18. एक पासा फेंका जाता है। निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(i) एक अभाज्य संख्या प्राप्त होना।

(ii) 3 या 3 से बड़ी संख्या प्राप्त होना।

(iii) 1 या 1 से छोटी संख्या प्राप्त होना।

(iv) छ: से बड़ी संख्या प्राप्त होना।

(v) छ: से छोटी संख्या प्राप्त होना।

हल- जब एक पासा फेंका जाता है, तब 1 से 6 तक कोई भी संख्या प्राप्त होगी। अतः पासे का प्रतिदर्श समष्टि, S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

(i) माना घटना E एक अभाज्य संख्या प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।

E = {2, 3, 5}

∴ अभाज्य संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता, P

= $\frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल संभावित परिणामों की संख्या}} = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(ii) माना E3 या 3 से बड़ी संख्या प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।

E = {3, 4, 5, 6}

∴ 3 या 3 से बड़ी संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता,

P = $\frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(iii) माना घटना E1 या 1 से छोटी संख्या प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।

E = {1}

∴ 1 या 1 से छोटी संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता,

(ii) B: संख्या से बड़ी है। = {} = ∅

(चूँकि पासे पर अधिकतम 6 संख्याएँ होती हैं इसलिए पासे पर 7 से बड़ी संख्या नहीं हो सकती।)

(iii) C: संख्या का गुणज है। = {3, 6}

(iv) D: संख्या 4 से कम है। = {1, 2, 3}

(v) E: 4 से बड़ी सम संख्या है। = {6}

(vi) F: संख्या 3 से कम नहीं है। = {3, 4, 5, 6}

अब, A ∪ B = अवयवों का समुच्चय जो या तो A में हो या B में हो = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ∪ ∅ = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A ∩ B = अवयवों का समुच्चय जो A और B में हो या C में हो = {} ∪ {3, 6} = {3, 6}

B ∪ E = अवयवों का समुच्चय जो D और E दोनों में तयस्थित हो। = {1, 2, 3} ∪ {6} = ∅

A - C = अवयवों का समुच्चय A में हो किंतु C में नहीं हो = {1, 2, 3, 4, 5, 6} - {3, 6} = {1, 2, 4, 5}

D - E = अवयवों का समुच्चय जो D में हो किंतु E में नहीं हो। = {1, 2, 3} - {6} = {1, 2, 3}

E ∩ F = E ∪ (U - F) = E ∪ {1, 2, 3, 4, 5, 6} - {3, 4, 5, 6}

[∵ U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}]

= {6} ∩ {1, 2} = ∅

और F' = (U - F) = {1, 2, 3, 4, 5, 6} - {3, 4, 5, 6} = {1, 2}

प्रश्न 18. एक पासा फेंका जाता है। निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(i) एक अभाज्य संख्या प्राप्त होना।

(ii) 3 या 3 से बड़ी संख्या प्राप्त होना।

(iii) 1 या 1 से छोटी संख्या प्राप्त होना।

(iv) छ: से बड़ी संख्या प्राप्त होना।

(v) छ: से छोटी संख्या प्राप्त होना।

हल- जब एक पासा फेंका जाता है, तब 1 से 6 तक कोई भी संख्या प्राप्त होगी। अतः पासे का प्रतिदर्श समष्टि, S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

(i) माना घटना E एक अभाज्य संख्या प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।

E = {2, 3, 5}

∴ अभाज्य संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता, P

= $\frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल संभावित परिणामों की संख्या}} = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(ii) माना E3 या 3 से बड़ी संख्या प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।

E = {3, 4, 5, 6}

∴ 3 या 3 से बड़ी संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता,

P = $\frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(iii) माना घटना E1 या 1 से छोटी संख्या प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।

E = {1}

∴ 1 या 1 से छोटी संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता,

$P = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{6}$
 मान घटना E 6 से बड़ी संख्या प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।
 $n(S) = 6$
 $n(E) = 1$
 $P = \frac{1}{6}$
 6 से बड़ी संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता

$P = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0$
 मान घटना E 6 से छोटी संख्या प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।
 $n(S) = 6$
 $n(E) = 0$
 $P = 0$
 5 से छोटी संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता,
 $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $n(S) = 6$
 $n(E) = 5$
 $P = \frac{5}{6}$

प्रश्न 19. तीन सिक्के एक बार उछाले जाते हैं। निम्नलिखित प्रायिकता ज्ञात कीजिए-
 (i) 3 चित प्राप्त होना (ii) 2 चित प्राप्त होना (iii) च्युनतम चित प्राप्त होना (iv) अधिकतम 2 चित प्राप्त होना
 (v) एक भी चित प्राप्त न होना (vi) 3 पट प्राप्त होना
 (vii) तथ्यतः 2 पट प्राप्त होना (viii) कोई भी पट न प्राप्त होना (ix) अधिकतम 2 पट प्राप्त होना
 ल- यदि तीन सिक्के एक बार उछाले जाते हैं, तब कुल संभव परिणामों की संख्या = $2^3 = 8$ है, जो निम्न है,
 $(HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT)$
 (i) यदि घटना E तीन चित प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।
 $\Rightarrow n(E) = 1$

∴ दो चित प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।
 अनुकूल परिणामों की संख्या = $n(E) = 1$
 कुल परिणामों की संख्या = $n(S) = 8$
 $P = \frac{1}{8}$
 यदि घटना E दो चित प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।
 $n(E) = 3$

∴ दो चित प्राप्त होने की प्रायिकता, $P = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{8}$
 यदि घटना E च्युनतम 2 चित प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।
 च्युनतम 2 का अर्थ हम 2 या 2 से अधिक के रूप में लेते हैं।
 $n(E) = 2$ चित + 3 चित = $3 + 1 = 4$
 \Rightarrow च्युनतम 2 चित प्राप्त होने की प्रायिकता,
 $P = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(iv), यदि घटना E अधिकतम 2 चित प्राप्त होना प्रदर्शित करती है।
 $n(E) = 2$ चित + 1 चित + 0 चित
 (अधिकतम 2 का अर्थ हम 2 से अधिक के रूप में नहीं लेते हैं।)
 $= 3 + 3 + 1 = 7$
 ∴ अधिकतम 2 चित प्राप्त होने की प्रायिकता,
 $P = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{7}{8}$

(v) यदि घटना E एक भी चित प्राप्त न होना प्रदर्शित करती है।
 $n(E) = 1$
 $n(S) = 8$
 $P = \frac{1}{8}$

प्रश्न 20. ताप का 52 पत्तों की एक बत्ती - भाँति फेंटी गई गद्दी से एक पत्ता निकाला गया है। निकाले गए पत्ते की प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि
 (i) पत्ता ईट का है (ii) पत्ता इक्का नहीं है।
 (iii) पत्ता काले रंग का है (अर्थात् चिड़ड़ी या हुकुम का),
 (iv) पत्ता ईट का नहीं है। (v) पत्ता काले रंग का नहीं है।
 हल- जब 52 पत्तों की बत्ती-भाँति फेंटी गई गद्दी में एक पत्ता निकाला जाता है तो संभव परिणामों की संख्या 52 है।
 (i) मान लीजिए घटना 'निकाला गया पत्ता ईट का है' को A से दर्शाया गया है। स्पष्टतया A में अवयवों की संख्या 13 है।
 इसलिए, $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

अर्थात्, एक ईट का पत्ता निकालने की प्रायिकता = $\frac{1}{4}$
 (ii) मान लीजिए कि घटना 'निकाला गया पत्ता इक्का है' को B से दर्शाते हैं। इसलिए 'निकाला गया पत्ता इक्का नहीं है' B से दर्शाया जाएगा।
 अथ $P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{4}{52} = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$
 (iii) मान लीजिए घटना 'निकाला गया पत्ता काले रंग का है' को C से दर्शाते हैं। इसलिए 'समुच्चय C में अवयवों की संख्या = 26 अर्थात् $P(C) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

इस प्रकार काले रंग का पत्ता निकालने की प्रायिकता = $\frac{1}{2}$
 (iv) हमने उपर्युक्त (i) से माना है कि घटना 'निकाला गया पत्ता ईट का है' को A से दर्शाते हैं। इसलिए घटना 'निकाला गया पत्ता ईट का नहीं है' को A' या 'A- नहीं' से दर्शाएँ।
 अथ $P(A- \text{ नहीं}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
 (v) घटना 'निकाला गया पत्ता काले रंग का नहीं है' को C'

'C- नहीं' से दर्शाया जा सकता है। अथ हमें त है कि $P(C- \text{ नहीं}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
 इसलिए पत्ता काले रंग का न होने की प्रायिकता = $\frac{1}{2}$

प्रश्न 21. एक थैले में 9 डिस्क हैं जिनमें से 4 लाल रंग की, 3 नीले रंग की और 2 पीले रंग की हैं। डिस्क आकार एवं भार में समरूप हैं। थैले में से एक डिस्क यादृच्छया निकाली जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाली गई डिस्क (i) लाल रंग की है (ii) पीले रंग की है (iii) नीले रंग की है (iv) पीले रंग की नहीं है (v) लाल रंग की है या नीले रंग की है।
 हल- डिस्क की कुल संख्या 9 है। इसलिए संभव परिणामों की कुल संख्या 9 हुई। मान लीजिए घटनाओं A, B व C को इस प्रकार से परिभाषित किया गया है।
 A: निकाली गई डिस्क लाल रंग की है।
 B: निकाली गई डिस्क पीले रंग की है।
 C: निकाली गई डिस्क नीले रंग की है।
 (i) लाल रंग की डिस्क की संख्या = 4 अर्थात् $n(A) = 4$
 $n(S) = 9$
 $P(A) = \frac{4}{9}$

अतः
 (ii) पीले रंग की डिस्क की संख्या = 2, अर्थात् $n(B) = 2$
 $n(S) = 9$
 $P(B) = \frac{2}{9}$

(iii) नीले रंग की डिस्क की संख्या = 3, अर्थात् $n(C) = 3$
 $n(S) = 9$
 $P(C) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

(iv) स्पष्टतया घटना 'डिस्क नीले रंग की नहीं है' 'C- नहीं' है। हम जानते हैं कि $P(C- \text{ नहीं}) = 1 - P(C)$
 $= 1 - \frac{3}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
 इसलिए $P(C- \text{ नहीं}) = 1 - \frac{3}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

(v) घटना 'लाल रंग की डिस्क या पीले रंग की डिस्क' का समुच्चय 'A, B, C' से वर्गीकृत किया जा सकता है।
 प्रश्न 22. दो पुरुषों व दो स्त्रियों के समूह में से दो व्यक्तिवों को एक सभितन का गठन करना है। प्रायिकता क्या है कि गठित सभितन में (a) कोई पुरुष न हो? (b) एक पुरुष हो? (c) दोनों ही पुरुष हों?

हल- समूह में व्यक्तिवों की कुल संख्या = $2 + 2 = 4$ । इन चार व्यक्तिवों में से दो को 4C_2 तरीके से चुना जा सकता है।
 (a) सभितन में कोई पुरुष न होने का अर्थ है कि सभितन में दो स्त्रियाँ हैं। दो स्त्रियों में से दोनों के चुनने के ${}^2C_2 = 1$ तरीका है।
 इसलिए P (कोई पुरुष नहीं) = $\frac{{}^2C_2}{{}^4C_2} = \frac{1 \times 2 \times 1}{4 \times 3} = \frac{1}{6}$

(b) सभितन में एक पुरुष होने का तात्पर्य है कि इसमें एक स्त्री है। 2 पुरुषों में से एक पुरुष चुने के 2C_1 तरीके हैं तथा दो स्त्रियों में से एक चुने के भी 2C_1 तरीके हैं। दोनों चुनानों को एक साथ करने के ${}^2C_1 \times {}^2C_1 = 2 \times 2 = 4$ तरीके हैं।
 इसलिए P (एक पुरुष) = $\frac{{}^2C_1 \times {}^2C_1}{{}^4C_2} = \frac{2 \times 2}{4 \times 3} = \frac{2}{3}$

(c) दो पुरुषों को 2C_2 तरीकों से चुना जा सकता है।
 अतः P (दो पुरुष) = $\frac{{}^2C_2}{{}^4C_2} = \frac{1}{6}$

प्रश्न 23. एक डिब्बे में 10 लाल, 20 नीली व 30 हरी गोलियाँ रखी हैं। डिब्बे से 5 गोलियाँ यादृच्छया निकाली जाती हैं। प्रायिकता क्या है? (i) सभी गोलियाँ नीली हैं, (ii) कम-से-कम एक गोली हरी है।
 हल- डिब्बे में 10 लाल, 20 नीली तथा 30 हरी गोलियाँ हैं। गोलियों की संख्या = $10 + 20 + 30 = 60$
 (i) 60 गोलियों में से 5 गोलियाँ चुनने के लिए कुल तरीके $n(S) = {}^{60}C_5$
 नीली गोलियाँ चुनने की घटना E है, तब
 $n(E) = {}^{20}C_5$

अतः प्रायिकता = $\frac{n(E)}{n(S)} = \frac{{}^{20}C_5}{{}^{60}C_5}$
 उत्तर

(ii) P (कम-से-कम एक गोली हरी)
 $= 1 - P$ (कोई हरी नहीं)
 $= 1 - \frac{{}^{60}C_5}{{}^{60}C_5}$
 उत्तर

प्रश्न 24. ताप का 52 पत्तों की एक अच्छी तरह फेंटी गई गद्दी में से 4 पत्ते निकाले जाते हैं। इस बात की क्या प्रायिकता है कि निकाले गये पत्तों में 3 ईट और एक हुकुम का पत्ता है?
 हल- माना प्रतिस्थापन सभितन S है।
 52 पत्तों में से 4 पत्तों को निकालने के कुल तरीके $n(S) = {}^{52}C_4$
 3 ईट और 1 हुकुम का पत्ता निकालने की घटना E है, तब
 $n(E) = {}^{13}C_3 \times {}^{13}C_1$

प्रायिकता $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{{}^{13}C_3 \times {}^{13}C_1}{{}^{52}C_4}$
 उत्तर

प्रश्न 25. दो विद्यार्थियों अनिल और आशिमा एक परीक्षा में प्रविष्ट हुए। अनिल के परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.05 है और आशिमा के परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.10 है। दोनों के परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.02 है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि
 (a) अनिल और आशिमा दोनों परीक्षा में उत्तीर्ण नहीं हो पाएंगे।
 (b) दोनों में से कम से कम एक परीक्षा में उत्तीर्ण नहीं होगा।
 (c) दोनों में से केवल एक परीक्षा में उत्तीर्ण होगा।
 हल- मान लीजिए E तथा F घटनाओं 'अनिल परीक्षा उत्तीर्ण कर लेगा' और 'आशिमा परीक्षा उत्तीर्ण कर लेगी' को क्रमशः दर्शाते हैं।
 इसलिए $P(E) = 0.05$, $P(F) = 0.10$ और $P(E \cap F) = 0.02$ ।
 तब (a) घटना 'दोनों परीक्षा उत्तीर्ण नहीं होंगे' को $E' \cap F'$ से दर्शाया जा सकता है। क्योंकि E' : घटना 'E- नहीं' अर्थात् 'अनिल परीक्षा उत्तीर्ण नहीं करेगा' तथा F' : घटना 'F- नहीं' अर्थात् 'आशिमा परीक्षा उत्तीर्ण नहीं करेगी' दर्शाते हैं।

साथ ही $E' \cap F' = (E \cup F)'$ (द्वि-संगणक नियम द्वारा)

अब $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

या $P(E \cup F) = 0.05 + 0.10 - 0.02 = 0.13$

इसलिए $P(E' \cap F') = P(E \cup F)' = 1 - P(E \cup F)$
 $= 1 - 0.13 = 0.87$

(b) P (दोनों में से कम से कम एक उत्तीर्ण नहीं होगा)
 $= 1 - P(\text{दोनों उत्तीर्ण होंगे}) = 1 - 0.02 = 0.98$

(c) घटना 'दोनों में से केवल एक उत्तीर्ण होगा' निम्नलिखित घटना के समरूप है :

'अनिल उत्तीर्ण होगा और आशिमा उत्तीर्ण नहीं होगी'

या 'अनिल उत्तीर्ण नहीं होगा और आशिमा उत्तीर्ण होगी'

अर्थात् $E \cap F'$ या $E' \cap F$ जहाँ $E \cap F'$ और $E' \cap F$ परस्पर अपवर्जों हैं। इसलिए, P (दोनों में से केवल एक उत्तीर्ण होगा)

$= P(E \cap F' \text{ या } E' \cap F) = P(E \cap F') + P(E' \cap F) =$
 $P(E) - P(E \cap F) + P(F) - P(E \cap F)$
 $= 0.05 - 0.02 + 0.10 - 0.02 = 0.11$

प्रश्न 26. एक पाठशाला की कक्षा XI के 40% विद्यार्थी गणित पढ़ते हैं और 30% जीव विज्ञान पढ़ते हैं। कक्षा के 10% विद्यार्थी गणित और जीव विज्ञान दोनों पढ़ते हैं। यदि कक्षा का एक विद्यार्थी यादृच्छया चुना जाता है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह गणित या जीव विज्ञान पढ़ता होगा।

हल- माना गणित पढ़ने वाले विद्यार्थियों को M तथा जीव विज्ञान पढ़ने वाले विद्यार्थियों को B से प्रदर्शित करते हैं। तब, प्रश्नानुसार,

$$P(M) = 40\% = \frac{40}{100}$$

$$P(B) = 30\% = \frac{30}{100}$$

$$P(M \cap B) = 10\% = \frac{10}{100}$$

$$\therefore P(M \cup B) = P(M) + P(B) - P(M \cap B)$$

$$= \frac{40}{100} + \frac{30}{100} - \frac{10}{100}$$

$$= \frac{60}{100} = 60\% = 0.6. \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 27. एक प्रवेश परीक्षा को दो परीक्षणों (Tests) के आधार पर श्रेणीबद्ध किया जाता है। किसी यादृच्छया चुने गये विद्यार्थी की पहले परीक्षण में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.8 है और दूसरे परीक्षण में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.7 है। दोनों में से कम-से-कम एक परीक्षण में उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.95 है। दोनों परीक्षणों में उत्तीर्ण करने की प्रायिकता क्या है?

हल- माना कि पहले परीक्षण में उत्तीर्ण होने की घटना A तथा दूसरे परीक्षण में उत्तीर्ण करने की घटना B है, तब

$P(A) = 0.8, P(B) = 0.7, P(A \cup B) = 0.95, P(A \cap B) = ?$
हम जानते हैं कि, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 $0.95 = 0.8 + 0.7 - P(A \cap B)$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 1.5 - 0.95$$

$$\therefore P(A \cap B) = 0.55.$$

उत्तर
प्रश्न 28. एक विद्यार्थी के अंतिम परीक्षा के अंग्रेजी और हिन्दी दोनों विषयों को उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.5 है और दोनों में से कोई भी विषय उत्तीर्ण न करने की प्रायिकता 0.1 है। यदि अंग्रेजी की परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.75 हो तो हिन्दी की परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता क्या है?

हल- चूँकि हिन्दी अथवा अंग्रेजी में पास होने की प्रायिकता $P(H \cup E)$ और हिन्दी अथवा अंग्रेजी में पास नहीं होने की प्रायिकता $P(H \cup E)'$ के योग सदैव 1 के समान होगा।

$$\therefore P(H \cup E) = 1 - P(H \cup E)' = 1 - 0.1 = 0.9$$

दिया है, $P(E) = 0.75$

$$\Rightarrow P(H \cup E) = P(H) + P(E) - P(H \cap E)$$

$$\Rightarrow 0.9 = P(H) + 0.75 - 0.5$$

$$0.9 = P(H) + 0.25$$

$$\Rightarrow P(H) = 0.9 - 0.25 = 0.65$$

प्रश्न 29. एक कक्षा के 60 विद्यार्थियों में से 30 ने एनसीसी (NCC), 32 ने एनएसएस (NSS) और 24 ने दोनों को चुना है। यदि इनमें से एक विद्यार्थी यादृच्छया चुना गया है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि- (i) विद्यार्थी ने एनसीसी या एनएसएस को चुना है। (ii) विद्यार्थी ने न तो एनसीसी और न ही एनएसएस को चुना है। (iii) विद्यार्थी ने एनएसएस को चुना है किंतु एनसीसी को नहीं चुना है।

हल- (i) माना A तथा B क्रमशः एनसीसी तथा एनएसएस चुनने करने वाले छात्रों को प्रदर्शित करते हैं।

$$\text{यहाँ, } n(A) = 30, n(B) = 32$$

$$\text{तथा } n(A \cap B) = 24$$

(चूँकि 24 विद्यार्थियों ने एनसीसी तथा एनएसएस दोनों को चुना है इसलिए ये दोनों में उभयनिष्ठ हैं)

$$\therefore P(A) = \frac{30}{60}$$

$$P(B) = \frac{32}{60} \quad \text{तथा } P(A \cap B) = \frac{24}{60}$$

P (विद्यार्थी ने एनसीसी या एनएसएस को चुना है)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$[\because P(A \cup B) = P(A \text{ या } B)]$$

$$= \frac{30}{60} + \frac{32}{60} - \frac{24}{60} = \frac{30 + 32 - 24}{60} = \frac{62 - 24}{60} = \frac{38}{60} = \frac{19}{30}$$

(ii) P (विद्यार्थी ने न तो एनसीसी और न ही एनएसएस को चुना है) $= 1 - P(\text{विद्यार्थी ने एनसीसी या एनएसएस को चुना है})$

$$= 1 - \frac{19}{30} = \frac{30 - 19}{30} = \frac{11}{30}$$

(iii) P (विद्यार्थी ने एनएसएस को चुना है किंतु एनसीसी को नहीं चुना है)

$$= P(B) - P(A \cap B) = \frac{32}{60} - \frac{24}{60} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15} \quad \square$$

शालाओं के समय-समय पर विभागीय अधिकारियों द्वारा किये गये निरीक्षण के दौरान यह देखा गया है कि छात्र-छात्राओं को विषय में ज्ञान का स्तर संतोषजनक नहीं है।

आगामी परीक्षा की तैयारी एवं श्रेष्ठ परीक्षा परिणाम हेतु यह प्रश्न बैंक तैयार किया गया है। जिसके उपयोग से शिक्षक अपने समस्त छात्रों को बेहतर अंक प्राप्त करने एवं अगली कक्षा में जाने हेतु समर्थ बना सकेंगे।

इस प्रश्न बैंक को ब्लूप्रिन्ट के अनुसार उन महत्वपूर्ण पाठ्य वस्तुओं का समावेश कर तैयार किया गया है जो कि प्रभावी शिक्षण एवं छात्र-छात्राओं के सभी विषय में औसत दक्षता विकसित करने एवं परीक्षा परिणाम में सुधार हेतु लाभकारी सिद्ध होगा।

यदि आपके स्कूल में एक से अधिक सेक्शन है तो विद्यार्थियों के ग्रेड के आधार पर सेक्शन में विद्यार्थियों का पुनर्वितरण कर दें। तथा एक ग्रेड के विद्यार्थियों को एक सेक्शन में रखें ताकि उन विद्यार्थियों को उनके स्तर के अनुरूप पढ़ाया जाये।

प्रदेश के समस्त हाई/हायर सेकेण्डरी स्कूलों के प्राचार्य एवं संबंधित शिक्षकों से अपेक्षा ही नहीं बल्कि पूर्ण विश्वास है कि वे इस प्रश्न बैंक से शाला के छात्र-छात्राओं को सभी विषय का नियमित अभ्यास करायेंगे ताकि प्रत्येक विद्यार्थी परीक्षा में सफल हो सके।

- शिक्षकों से अपेक्षित कार्यवाही -

डी एवं ई ग्रेड के विद्यार्थियों को आगामी 2 माह तक इस प्रश्न बैंक के अनुसार अभ्यास कराएं। विद्यार्थियों को प्रत्येक प्रश्न को किस तरह लिखना है इसे समझाएं। विद्यार्थियों द्वारा की जा रही गलतियों को सुधारें।

असली प्रश्न बैंक
की पहचान

कच्हर एवं प्रत्येक पृष्ठ पर

G P H®

देखकर ही खरीदें।

मेरिट में आप के लिए पढ़ें...

G P H®

प्राप्त बुकस

कक्षा 9-10-11-12 के लिए

कक्षा 9 से 12 के लिए हिन्दी एवं अंग्रेजी माध्यम में उपलब्ध

www.gphbooks.com | gph_india@rediffmail.com | facebook.com/gphind

G P H® | Dinesh-G

GUPTA PUBLISHING HOUSE

116, Pologround, Industrial Estate, Indore
Khajuri Bazar, (16, Juna Pitha, Mata mandir ke pass), Indore
Ph.: (O) 0731-2424121, 2425121, 2454121

Rs.65.00/-

MP BOARD OFFICIAL

MP BOARD OFFICIAL