17/07/18

Page

-: पाठ-5 :-

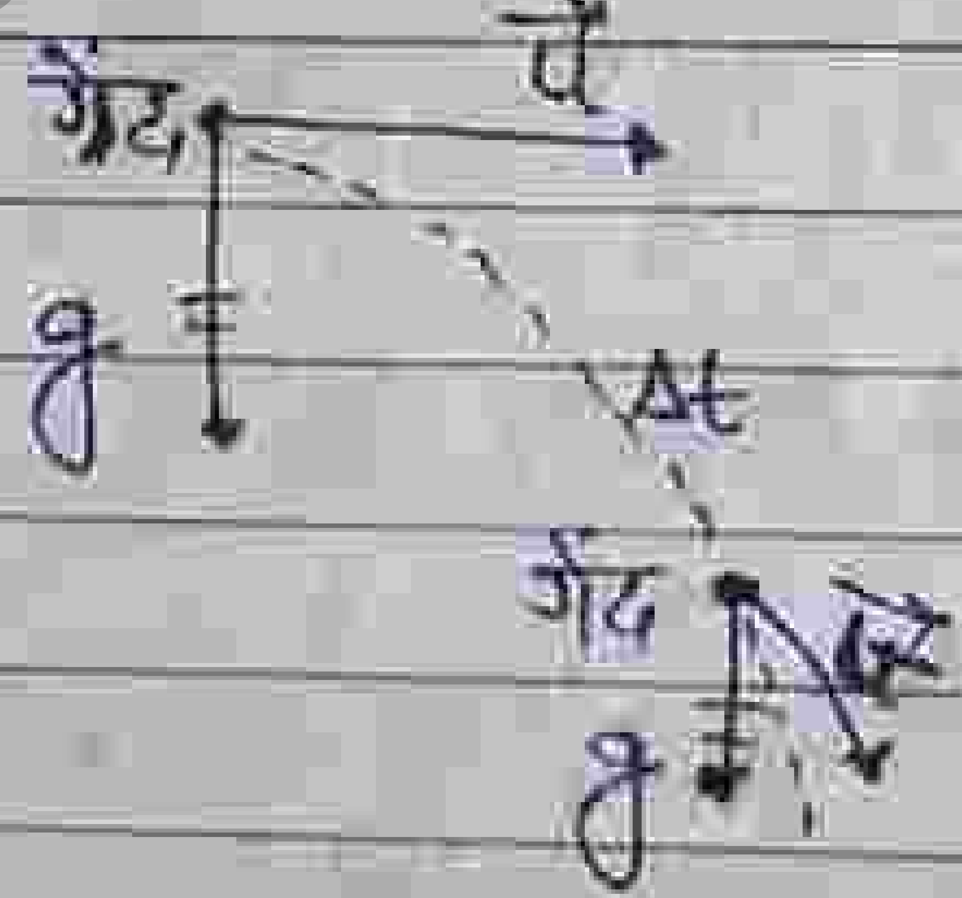
-: प्रक्षेप्य गति :-

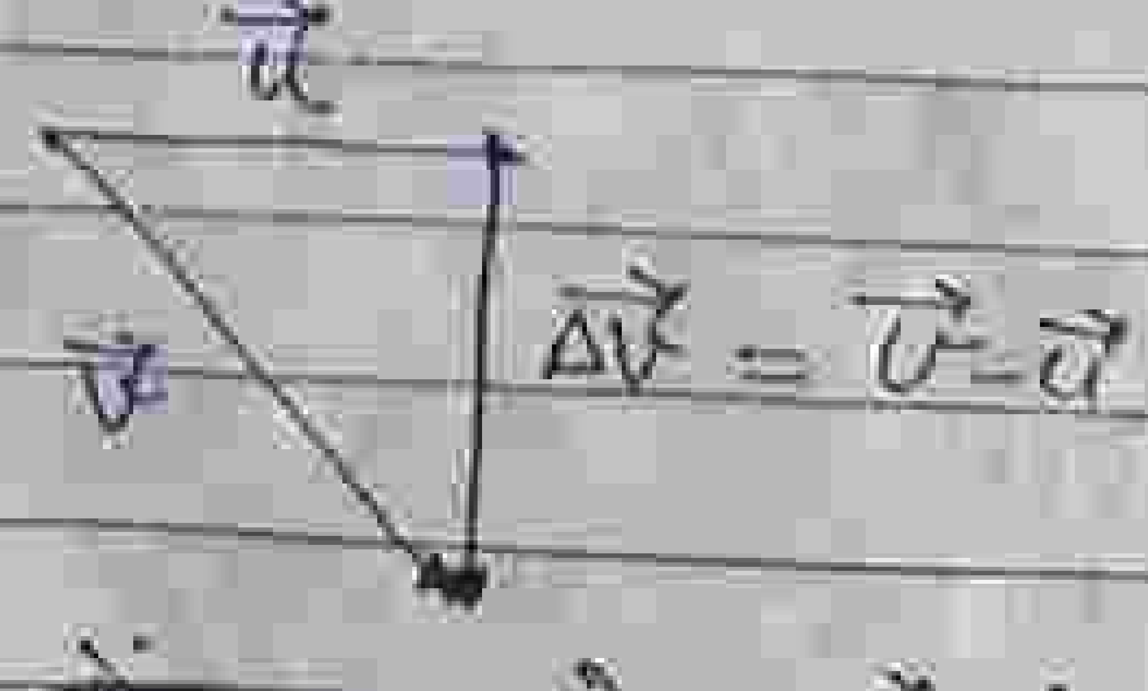
-: Projectile motion :-

→ जब किसी पिण्ड को किसी प्रारम्भिक वेग से ऊर्ध्व दिशा से किसी भिन्न किसी दिशा में फेंका जाता है तो वह गुरुत्वी त्वरण के अन्तर्गत ऊर्ध्वाधर तल में वक्र पथ पर गति करती है। वस्तु की इस गति को ही प्रक्षेप्य गति कहते हैं।

जैसे →
1. तोप से छूटे गोले की गति।
2. ईंधन समाप्त होने के बाद रॉकेट की गति।
3. हवाई जहाज से गिराये गये बम्ब की गति।
4. छत पर खड़े होकर क्षैतिज दिशा में फेंकी गई गेंद की गति।

→ प्रक्षेप्य गति का वेक्टर स्वरूप →
माना एक गेंद किसी ऊँचाई से क्षैतिज दिशा में $\vec{v}$ वेग से फेंकी जाती है।



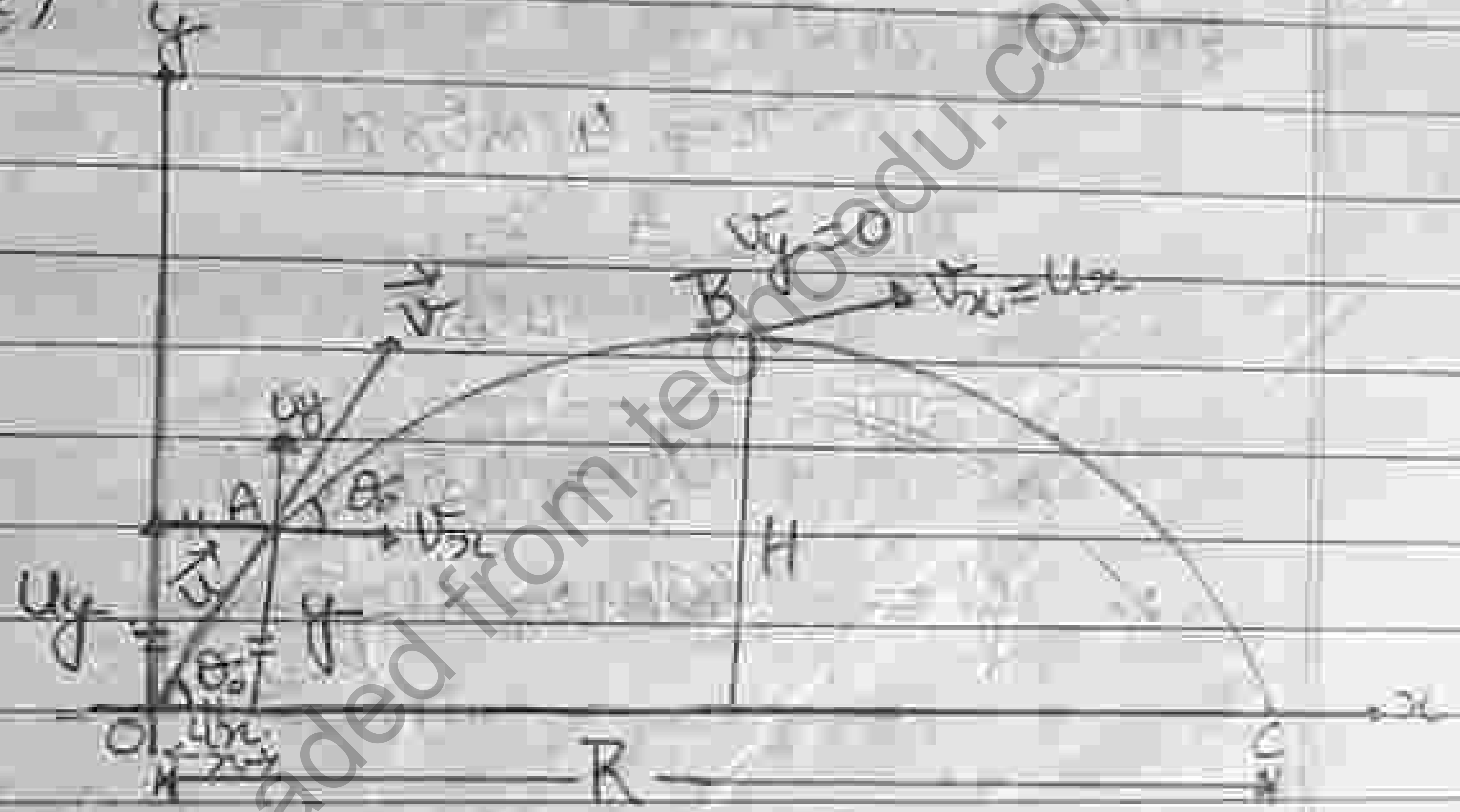


Δt समय पश्चात गेंद का वेग $\vec{v'}$ हो जाता है। अतः Δt समयान्तराल में वेग परिवर्तन –

$$\vec{\Delta v} = \vec{v} - \vec{u}$$
$$\therefore \vec{v} = \vec{\Delta v} + \vec{u}$$

चित्र में Δv की दिशा ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर है।

प्रश्न सिद्ध कीजिए प्रक्षेप्य का पथ परवलयाकार होता है।
माना एक वस्तु (जैसे गेंद) क्षैतिज से किसी कोण θ_0 पर प्रारम्भिक वेग u से फेंकी जाती है।
प्रक्षेपण बिन्दु, मूलबिन्दु O है। गेंद का प्रक्षेपण पथ OABC है।



प्रारम्भिक वेग u को क्षैतिज तथा ऊर्ध्व घटकों में वियोजित करने पर –

क्षैतिज घटक $u_x = u\cos\theta_0$

ऊर्ध्वाधर घटक $u_y = u\sin\theta_0$

माना वायु का घर्षण नगण्य हो-
तो गुरुत्वी त्वरण g का अचर मान रहता है।
माना t समय बाद गेंद का वेग v है

$\therefore$ क्षैतिज विस्थापन = क्षैतिज वेग × समय

$\therefore x = u_x \times t$

$x = u\cos\theta_0 \times t$

$x = u\cos\theta_0 \times t$ —— (1)

अतः गति के द्वितीय समीकरण से -

$$s = ut + \frac{1}{2}gt^2$$

बिन्दु A के लिए →

$$s = y$$

$$u = u_y$$

त्वरण $a = -g$

$$\therefore \; y = u_y t - \frac{1}{2}gt^2$$

समीकरण ① से -

$$x = u\cos\theta_0 \times t$$

या $$t = \frac{x}{u\cos\theta_0}$$

तथा

$$u_y = u\sin\theta_0$$

$$\therefore \; y = \cancel{u}\sin\theta_0 \times \frac{x}{\cancel{u}\cos\theta_0} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{u\cos\theta_0}\right)^2$$

$$= x\tan\theta_0 - \frac{1}{2}\left[\frac{gx^2}{u^2\cos^2\theta_0}\right]$$

माना $\tan\theta_0 = b$ तथा $\frac{g}{2u^2\cos^2\theta_0} = c$

$$\therefore \; y = bx - cx^2$$

यह समीकरण परवलय का समीकरण है। जहाँ b तथा c नियतांक हैं।

अतः प्रक्षेप्य का पथ परवलयाकार होता है।

प्रक्षेप्य के उड़ान का समय → (उड्डयन काल) चित्र सं. (2)
प्रक्षेप्य के उड़ान का समय वह समयान्तराल है जिसमें वस्तु प्रक्षेपण के पश्चात पुनः उसी तल पर (जैसे- पृथ्वी से पृथ्वी पर, छत से छत पर) वापिस आ जाती है। इस समय को ही उड्डयन काल कहते हैं। इसे T से प्रदर्शित करते हैं।

वस्तु पथ OABC द्वारा बिन्दु O से C तक पहुँचती है। बिन्दु B पर वेग का ऊर्ध्व घटक $u_y = 0$

गति के द्वितीय समीकरण से-

$$S = ut + \frac{1}{2}at^2$$

$$S = -h$$

$$u = u_y = u\sin\theta$$

$$a = -g$$

$$t = T$$

$$\therefore -h = u_yT + \frac{1}{2}(-g)T^2$$

$$h = u_yT - \frac{1}{2}gT^2$$

उड्डयन काल (T) पर, $h = 0$
ऊर्ध्व विस्थापन

$$\therefore 0 = u_yT - \frac{1}{2}gT^2$$

या

$$u_yT = \frac{1}{2}gT^2$$

$$u_y = \frac{1}{2}gT$$

या

$$T = \frac{2u_y}{g} \quad \text{या} \quad \boxed{T = \frac{2u\sin\theta_0}{g}}$$

→ प्रक्षेप्य को बिन्दु O से उच्चतम बिन्दु B तक जाने मे लगा समय →

चित्र के अनुसार -

गेंद का उच्चतम बिन्दु B है। बिन्दु B पर वेग का ऊर्ध्व घटक $(v_y) = 0$

माना बिन्दु O से B तक जाने का समय t है।

$\therefore$ $v = u + at$ से -

चित्रानुसार -

$$v = v_y = 0$$

तथा $u = u_y = u\sin\theta_0$

$$a = -g$$

$$\therefore \quad v_y = u_y - gt$$

$$0 = u_y - gt$$

या $gt = u_y$

या $t = \frac{u_y}{g}$

$$t = \left(\frac{u\sin\theta_0}{g}\right) \times \frac{2}{2}$$

या

$$t = \frac{1}{2}\left(\frac{2u\sin\theta_0}{g}\right)$$

$$\boxed{t = \frac{T}{2}}$$

अर्थात

O से B तक जाने का समय = B से C तक नीचे आने का समय

$$\therefore \quad t = \frac{T}{2} = \frac{u\sin\theta_0}{g}$$

प्रक्षेप्य की अधिकतम ऊँचाई :- चित्र नं. ①

प्रक्षेप्य गति में वस्तु के पथ के उच्चतम बिंदु की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई को ही प्रक्षेप्य की महत्तम ऊँचाई कहते हैं। इसे H से प्रदर्शित करते हैं।

चित्रानुसार
उच्चतम बिंदु B पर वेग का ऊर्ध्व घटक $v_y = 0$
अतः

$v^2 = u^2 + 2as$ से-

$V = V_y = 0$
$u = u_y = u\sin\theta_0$
$a = -g$

तथा $S = H$

$\therefore \quad 0 = u_y^2 - 2gH$

या

$2gH = u_y^2$

$H = \frac{u_y^2}{2g}$

$$\therefore \boxed{H = \frac{u^2 \sin^2\theta_0}{2g}}$$

विशेष नोट :- For Num./Obj

1. महत्तम ऊँचाई H के अधिकतम के लिए -

$\theta_0 = 90$

$\therefore \sin^2\theta_0 = \sin^2 90 = (1)^2 = 1$

$\therefore H_{max} = \frac{u^2 \times 1}{2g}$

या $\boxed{H_{max} = \frac{u^2}{2g}}$

Range

2 ऊँची कूद में खिलाड़ी अपने शरीर को ऊर्ध्व दिशा (y-अक्ष) में उछालने की कोशिश करता है।

→ प्रक्षेप्य का परास :-
वस्तु द्वारा अपने कुल उड्डयन काल में तय की गई क्षैतिज दूरी को प्रक्षेप्य का क्षैतिज परास कहते हैं इसे R से ~~प्रदर्शि~~ प्रदर्शित करते हैं।

चित्रानुसार
गेंद का क्षैतिज परास OC है।

∵ हम जानते हैं

दूरी = चाल × समय

∴ क्षैतिज परास = क्षैतिज वेग × उड्डयन काल

$$\therefore R = \cancel{u_x}\ u_x \times T \quad \text{--- (1)}$$

∵ हम जानते हैं

$$u_x = u\cos\theta_0$$

तथा

$$T = \frac{2u\sin\theta_0}{g}$$

समीकरण (1) से -

$$R = u\cos\theta \times \frac{2u\sin\theta_0}{g}$$

$$R = \frac{u^2(2\sin\theta_0 \cdot \cos\theta_0)}{g}$$

$$\boxed{R = \frac{u^2(\sin 2\theta_0)}{g}}$$

क्षैतिज परास R के अधिकतम मान के लिए-

$$\therefore \theta_0 = 45$$

$\therefore \sin 2\theta_0 = \sin 2\times 45 = \sin 90^\circ = 1$

$$\therefore R_{max} = \frac{u^2 \times 1}{g}$$

$$R_{max} = \frac{u^2}{g}$$

लम्बी कूद में खिलाड़ी क्षैतिज से 45° के कोण पर ही उछलने का प्रयास करता है।

→ एक ही परास के लिए दो प्रक्षेपण कोण ज्ञात करना।

हम जानते हैं -

प्रक्षेप्य का परास $R = \frac{u^2 \sin 2\theta_0}{g}$ —— (1)

यदि प्रक्षेपण कोण $(90-\theta_0)$ के लिए परास R' हो तो समीकरण (1) के अनुसार -

$$R' = \frac{u^2 \sin 2(90-\theta_0)}{g}$$

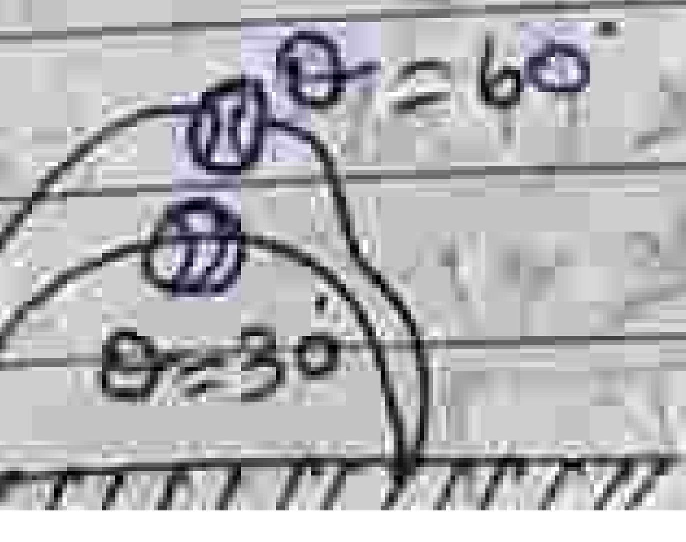
$$R' = \frac{u^2 \sin(180^\circ - 2\theta_0)}{g}$$

$$\therefore R' = \frac{u^2 \sin 2\theta_0}{g} \quad \text{—— (2)}$$

$\{\sin(180-2\theta_0) = \sin 2\theta_0\}$

समीकरण (1) व (2) से -

$$\underline{R = R'}$$



Page

* प्रक्षेप्य पथ के उच्चतम बिन्दु पर पिण्ड की ऊर्जा –
प्रक्षेप्य पथ के उच्चतम बिन्दु पर पिण्ड का ऊर्ध्वाधर वेग ($v_y = 0$) होता है।
पिण्ड का क्षैतिज वेग $u_x = u\cos\theta_0$
∴ उच्चतम बिन्दु B पर पिण्ड की गतिज ऊर्जा –

$$K.E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mu_x^2$$

$$K.E = \frac{1}{2}m(u\cos\theta_0)^2$$

$$\therefore K.E = \frac{1}{2}mu^2\cos^2\theta_0 \quad \text{--- (1)}$$

∴ गतिज ऊर्जा $(K.E) = K\cos^2\theta$
∵ प्रक्षेपण बिन्दु O पर स्थितिज ऊर्जा $U = mgh$

$$U = mg \times 0$$

$$U = 0$$

∴ कुल ऊर्जा (बिन्दु O पर) $E = K.E + U$

$$E = \cancel{K\cos^2\theta_0} + 0$$

$$E = \frac{1}{2}mu^2 \quad \text{--- (2)}$$

उच्चतम बिन्दु B पर पिण्ड की स्थितिज ऊर्जा

$$U = E - K = \frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}mu^2\cos^2\theta_0$$

$$U = \frac{1}{2}mu^2[1 - \cos^2\theta_0]$$

$$U = \frac{1}{2}mu^2 \cdot \sin^2\theta_0 \quad \text{--- (3)}$$

∴ बिन्दु B पर कुल ऊर्जा –

$$E = K + U$$

$$E = K(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$E = K \times 1$$

$$\therefore \boxed{E = K}$$

Page

→ प्रक्षेप्य पथ के परवलयाकार होने की सीमायें →

- प्रक्षेप्य पथ परवलयाकार तभी होगा जब प्रक्षेप्य का त्वरण अचर हो। इसकी निम्नलिखित शर्तें हैं।

1. प्रक्षेप्य पथ बहुत अधिक ऊँचाई तक नहीं जाना चाहिए अन्यथा गुरुत्वी त्वरण g का मान घट जायेगा।

2. प्रक्षेप्य का परास बहुत अधिक नहीं होना चाहिए अन्यथा g गुरुत्वी त्वरण का मान बदल जायेगा।

3. प्रक्षेप्य का प्रारम्भिक वेग बहुत अधिक न हो जिससे कि वायु का घर्षण नगण्य रहे।

→ Points to be noted :

1. $y = bx - cx^2$

2. $T = \frac{2u\sin\theta_0}{g}$

3. $t = \frac{T}{2}$

4. $H = \frac{u^2 \sin^2\theta_0}{2g}$

5. $H_{max} = \frac{u^2}{2g}$

6. $R = \frac{u^2(\sin 2\theta_0)}{g}$

7. $R = R'$

8. $E = K$

अध्याय → 5

समाप्त

Page → 10