

अभ्यास प्रश्न-पत्र 2022-23

सेट-C

विषय : गणित

कक्षा : 12

समय : 3 घंटे

पूर्णांक : 80

निर्देश :

1. सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है |
2. प्रश्नों के लिए आवंटित अंक उनके सम्मुख अंकित हैं |
3. प्रश्न क्र. 1 से प्रश्न क्र. 5 तक वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं |
4. प्रश्न क्र. 6 से प्रश्न 23 तक प्रत्येक प्रश्न में आंतरिक विकल्प दिया गया है |
5. प्रश्न क्र. 6 से 15 तक प्रत्येक प्रश्न 2 अंक का है |
6. प्रश्न क्र. 16 से 19 तक प्रत्येक प्रश्न 3 अंक का है |
7. प्रश्न क्र. 20 से 23 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है |

प्र.1. सही विकल्प चुनकर लिखिए |

1 × 6 = 6

- (i). यदि समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में $R = (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)$ द्वारा प्रदत्त संबंध है:
(a) केवल सममित (b) केवल स्वतुल्य (c) केवल संक्रामक (d) एक तुल्यता संबंध
- (ii). यदि $A = \{1, 2, 3\}$ हो तो अवयव (1, 2) वाले तुल्यता संबंधों की संख्या है-
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4
- (iii). $\cos^{-1}\left(\cos \frac{7\pi}{6}\right) =$
(a) $\frac{7\pi}{6}$ (b) $\frac{5\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{6}$
- (iv). $A = [a_{ij}]_{m \times 1}$ एक आव्यूह है।
(a) पंक्ति आव्यूह (b) स्तंभ आव्यूह (c) वर्ग आव्यूह (d) विकर्ण आव्यूह
- (v). एक विषम सममित आव्यूह के विकर्ण का प्रत्येक अवयव होता है:
(a) शून्य (b) धनात्मक (c) ऋणात्मक (d) अवास्तविक
- (vi). x^6 का x^3 के सापेक्ष अवकल गुणांक होगा:
(a) $6x^3$ (b) $3x^2$ (c) $2x^3$ (d) $2x^2$

प्र.2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिये :

1 × 7 = 7

- (i). यदि $f(x) = \cos^{-1}(\sin x)$, तब $f'(x)$ का मान है |
- (ii). अवकल समी. $\frac{dy}{dx} = 4$ का हल है।
- (iii). अवकल समीकरण $(1-y^2)\frac{dx}{dy} + yx = ay$ ($-1 < y < 1$) का समाकलन गुणक है |
- (iv). $\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$ का मान है |
- (v). $\cos(\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x) |x| \geq 1$ का मान है |
- (vi). यदि A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं तो $P(A \cup B) = \dots\dots\dots$
- (vii). $f(x) = \sin x$ से प्रदत्त फलन अंतराल में निरंतर हासमान है

प्र.3. सही जोड़ी मिलाइए :

1 × 6 = 6

- (i) $\int_{-2}^1 \frac{|x|}{x} dx$ (a) $\log \sec x$
- (ii) $\int_0^\infty e^{-x} dx$ (b) -1
- (iii) $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$ (c) $\log : |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$
- (iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ (d) $\frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$
- (v) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ (e) $\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$
- (vi) $\int \tan x$ (f) 1

प्र.4. एक वाक्य/शब्द में उत्तर लिखिए :

1 × 7 = 7

- (i). $\begin{vmatrix} \cos 15 & \sin 15 \\ \sin 75 & \cos 75 \end{vmatrix}$ मान है ?
- (ii). $[x(x-1)+1]^{\frac{1}{3}}$, $0 \leq x \leq 1$ का उच्चतम मान क्या है ?
- (iii). यदि किसी सारणिक की कोई पंक्ति या स्तंभ के सभी अवयव शून्य हों तो सारणिक का मान क्या होता है ?
- (iv). सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश एक मात्रक सदिश लिखिए ।
- (v). दो बिन्दुओं $(0,0,0)$ एवं (a,b,c) को मिलाने वाली रेखा के दिक् अनुपात लिखिए ।
- (vi). दो घटनाओं E और F को क्या कहते हैं यदि $P(E \cap F) = 0$
- (vii). फलन $y = \cos^{-1}x$ का प्रान्त लिखिए ।

प्र.5. निम्नलिखित के लिए सत्य/असत्य लिखिए :

1 × 6 = 6

- (i). यदि $f: X \rightarrow Y$ एक फलन है X में $R = \{(a,b): f(a) = f(b)\}$ द्वारा प्रदत्त एक सम्बन्ध है तो R एक तुल्यता सम्बन्ध है ।
- (ii). $\sec^{-1}x$ की मुख्य मान शाखा $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ है ।
- (iii). प्रत्येक अदिश आव्यूह एक विकर्ण आव्यूह होता है।
- (iv). $y^2 dx + (x^2 - xy - y^2) dy$ एक समघातीय अवकल समीकरण नहीं है ।
- (v). त्रिभुज की तीनों भुजाओं को क्रम में लेने पर उनका सदिश योग 0 होता है ।
- (vi). दो आव्यूहों का योग ज्ञात करने के लिये यह आवश्यक नहीं है कि उनकी कोटियाँ समान हों।

प्र.6. यदि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ तथा $f = \{(1, 4) (2, 5) (3, 6)\}$ A से B पर एक फलन है तो दिखाइए कि f एकैकी है

2

अथवा

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में $R = \{(1, 2) (2, 1)\}$ द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध R सममित है ।

- प्र.7. सरल $\cos\theta \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} + \sin\theta \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ 2
अथवा
X का मान ज्ञात कीजिए यदि $Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ और $2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
- प्र.8. k का मान ज्ञात कीजिए यदि फलन $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right); & x \neq 0 \\ k & ; x = 0 \end{cases}$ $x = 0$ पर सतत है 2
अथवा
क्या फलन $f(x) = x^2 - \sin x + 5$, $x = \pi$ पर सतत है ?
- प्र.9. वृत्त के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिये जबकि $r = 5\text{cm}$ 2
अथवा
वह अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 2x^2 - 3x$ से प्रदत्त फलन f निरंतर वर्धमान है ।
- प्र.10. $\int \frac{\sec^2(\log x)}{x} dx$ का मान ज्ञात कीजिये । 2
अथवा
 $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ का मान ज्ञात कीजिये ।
- प्र.11. $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \frac{\pi}{4}$ को हल कीजिए । 2
अथवा .
सिद्ध कीजिए कि $2\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{31}{17}$
- प्र.12. सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिये । 2
अथवा
सदिशों $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, और $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच कोण ज्ञात कीजिए ।
- प्र.13. एक रेखा की दिक् कोज्याएँ ज्ञात कीजिए जो निर्देशाक्षों के साथ समान कोण बनाती है । 2
अथवा
रेखा $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+6}{2}$ का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए ।
- प्र.14. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ है तो दर्शाइए कि $(AB)' = B'A'$ 2
अथवा
वर्ग आव्यूह $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ को सममित एवं विषम सममित आव्यूहों के योग के रूप में प्रदर्शित कीजिए ।
- प्र.15. फलन $\sin x + \cos x$ का महत्तम मान ज्ञात करो । 2
अथवा
सिद्ध कीजिए कि एक दिए हुए वृत्त में खींचे गए सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल उच्चिष्ठ होता है ।

प्र.16. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए 3

अथवा

रेखा $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ व वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के छोटे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

प्र.17. अवकल समीकरण $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए । 3

अथवा

अवकल समीकरण $(\tan^{-1}y - x)dy + (1 + y^2)dx = 0$ को हल कीजिए ।

प्र.18. $P(A/B)$ का मान क्या होगा यदि $P(B)=0.5$ और $P(A \cap B) = 0.32$ 3

अथवा

यदि A और B स्वतंत्र घटनाएँ दी गई हैं $P(A) = 0.3, P(B) = 0.6 P(A \cap B)$ ज्ञात कीजिए ।

प्र.19. निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत, $Z = 3x + 2y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए 3

$$x + y \geq 8$$

$$3x + 5y \leq 15$$

$$x \geq 0, y \geq 0,$$

अथवा

निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत, $Z = 3x + 4y$ का अधिकतमीकरण कीजिए

$$x + y \leq 4, \quad x \geq 0, y \geq 0,$$

प्र.20. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि - 4

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

अथवा

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $A \cdot (\text{adj}A) = |A| \cdot I$

प्र.21. x के सापेक्ष फलन $x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$ का अवकलन कीजिये । 4

अथवा

यदि $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

प्र.22. रेखाएँ जिनके सदिश समीकरण 4

$$\vec{r} = i + 2j - 4k + \lambda(2i + 3j + 6k) \text{ और}$$

$$\vec{r} = 3i + 3j - 5k + \mu(2i + 3j + 6k) \text{ हैं, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए ।}$$

अथवा

रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{z} = \frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए ।

प्र.23. $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ का मान ज्ञात कीजिये । 4

अथवा

$\int_0^{\pi/2} \log \sin x dx$ का मान ज्ञात कीजिये ।