

अभ्यास प्रश्न-पत्र 2022 - 23

सेट B

विषय : गणित

कक्षा : 12

समय : 3 घंटे

पूर्णांक : 80

निर्देश :

1. सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है ।
2. प्रश्नों के लिए आवंटित अंक उनके सम्मुख अंकित हैं ।
3. प्रश्न क्र. 1 से प्रश्न क्र. 5 तक वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं ।
4. प्रश्न क्र. 6 से प्रश्न 23 तक प्रत्येक प्रश्न में आंतरिक विकल्प दिया गया है ।
6. प्रश्न क्र. 16 से 19 तक प्रत्येक प्रश्न 3 अंक का है ।
7. प्रश्न क्र. 20 से 23 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है ।

प्र.1. सही विकल्प चुनकर लिखिए ।

1 × 6 = 6

- (i). यदि $A = \{1, 2, 3\}$ हो तो ऐसे संबंध जिनमें अवयव (1,2) तथा (1,3) हो और जो स्वतुल्य तथा सममित है किंतु संक्रामक नहीं है की संख्या है :
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4
- (ii). X में सम्बंध R जो स्वतुल्य सममित तथा संक्रामक है वह सम्बंध कहलाता है -
(a) तुल्यता सम्बंध (b) सार्वत्रिक सम्बंध (c) रिक्त सम्बंध (d) सममित सम्बंध
- (iii). यदि $\sin^{-1} \frac{1}{x} = y$ तब
(a) $0 \leq y \leq \pi$ (b) $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ (c) $0 < y < \pi$ (d) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
- (iv) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ एक वर्ग आव्यूह है यदि
(a) $m < n$ (b) $m > n$ (c) $m = n$ (d) इनमें से कोई नहीं
- (v). यदि A एक वर्ग आव्यूह है तो A सममित आव्यूह होगा यदि
(a) $A^2 = A$ (b) $A^2 = I$ (c) $A' = A$ (d) $A' = -A$
- (vi). 5^x का x के सापेक्ष अवकल गुणांक होगा।
(a) $5^x \log_e 5$ (b) $5^x \log_5 e$ (c) 5^x (d) $\frac{5^x}{\log_e a}$

प्र.2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिये :

1 × 7 = 7

- (i). $\sin x^3$ का अवकल गुणांक, होता है ।
- (ii). अवकल समी. $\frac{dy}{dx} = \sin x$ का हल है।
- (iii). अवकल समीकरण $2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + y = 0$ की कोटि..... है ।
- (iv). $\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$ का मान है ।
- (v). $\cos(\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x) |x| \geq 1$ का मान है ।
- (vi). यदि A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ है तो $P(A \cup B) = \dots\dots\dots$
- (vii). एक दिए हुए वृत्त में खींचे गए सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल होता है।

प्र.3. सही जोड़ी मिलाइए :

1 × 6 = 6

- (i) $\int \frac{[10x^9 + 10^x \log 10] dx}{x^{10} + 10^x}$ (a) $\tan x - \cot x + c$
- (ii) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ (b) $\log(10^x + x^{10}) + C$
- (iii) $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ (c) $\tan(xe^x) + C$
- (iv) $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(e^x x)} dx$ (d) $\tan x + \cot x + c$
- (v) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x + \sqrt{\cos x}}} dx$ (e) 1
- (vi) $\int_0^1 x e^x dx$ (f) $\frac{\pi}{4}$

प्र.4. एक वाक्य/शब्द में उत्तर लिखिए :

1 × 7 = 7

- (i). $\left| \begin{matrix} x & 2 \\ 18 & x \end{matrix} \right|$ में x का मान क्या है ?
- (ii). x के सभी वास्तविक मानों के लिए $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ का न्यूनतम क्या है ?
- (iii). यदि किसी सारणिक की कोई पंक्ति या स्तंभ के सभी अवयव शून्य हों तो सारणिक का मान क्या होता है ?
- (iv). सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश एक मात्रक सदिश लिखिए ।
- (v). सदिश $a\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ व $3\hat{i} + 6\hat{j} - 5\hat{k}$ परस्पर लम्बवत हो तो a का मान होगा ।
- (vi). दो घटनाओं E और F को क्या कहते हैं यदि $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$
- (vii). फलन $y = \sin^{-1}x$ का प्रान्त लिखिए ।

प्र.5. निम्नलिखित के लिए सत्य/असत्य लिखिए :

1 × 6 = 6

- (i). $f: X \rightarrow Y$ एकैकी कहलाता है यदि $x_1, x_2 \in X$ के लिए $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- (ii). $\cos^{-1}x$ का प्रान्त $R - (-1, 1)$ है ।
- (iii). प्रत्येक अदिश आव्यूह एक विकर्ण आव्यूह होता है।
- (iv). $(4x + 6y + 5) \frac{dy}{dx} = 3x + 2y + 4$ एक समघातीय अवकल समीकरण है ।
- (v). सदिश $(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ का परिमाण $\sqrt{3}$ है ।
- (vi). आव्यूहों में गुणन की संक्रिया के क्रम विनिमेय नियम का पालन होता है।

प्र.6. सिद्ध कीजिए कि $f(1) = f(2) = 1$ तथा $x > 2$ के लिए $f(x) = x - 1$ द्वारा प्रदत्त फलन $f: N \rightarrow N$ एकैकी नहीं है।

2

अथवा

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध R सममित है ।

- प्र.7.** एक 2×2 आव्यूह $A = [a_{ij}]$ की रचना कीजिए जबकि $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$ 2
- अथवा
 3×3 कोटि के विकर्ण आव्यूह का कोई एक उदाहरण लिखिए ।
- प्र.8.** $x^2 + 2x + 3$ फलन का द्वितीय कोटि का अवकलज ज्ञात कीजिए 2
- अथवा
क्या फलन $f(x) = 2x^2 - 1$, $x = 3$ पर सतत है ?
- प्र.9.** दो धनात्मक संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए जिनका योग 35 और गुणनफल महतम हो। 2
- अथवा
वह अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = x^2 - 2x + 1$ से प्रदत्त फलन f वर्धमान है ।
- प्र.10.** $\int \frac{dx}{x^2-16}$ का मान ज्ञात कीजिये । 2
- अथवा
 $\int xe^x dx$ का मान ज्ञात कीजिये ।
- प्र.11.** $\cot^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \right]$, $|x| > 1$ को सरलतम रूप में लिखिये । 2
- अथवा .
 $\sin^{-1} \left[\sin \frac{2\pi}{3} \right]$ का मान ज्ञात कीजिए ।
- प्र.12.** सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिये । 2
- अथवा
सदिशों $\hat{i} \pm 2\hat{j} + 3\hat{k}$, और $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच कोण ज्ञात कीजिए ।
- प्र.13.** एक रेखा के दिक् कोज्याएँ ज्ञात कीजिए जो निर्देशाक्षों के साथ समान कोण बनाती है । 2
- अथवा
रेखा $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+6}{2}$ का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए ।
- प्र.14.** सदिश $\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$ का सदिश $7\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिये। 2
- अथवा
दो सदिशों \vec{a} तथा \vec{b} के परिमाण क्रमशः $\sqrt{3}$ एवं 2 हैं और $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{6}$ है तो \vec{a} तथा \vec{b} के बीच कोण ज्ञात कीजिए।
- प्र.15.** फलन $\sin x + \cos x$ का महतम मान ज्ञात कीजिए । 2
- अथवा
सिद्ध कीजिए कि एक दिए हुए वृत्त में खींचे गए सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल उच्चिष्ठ होता है
- प्र.16.** प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 32$, रेखा $y = x$ एवं x -अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 3
- अथवा
वक्र $y^2 = 4x$, एवं रेखा $x = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।
- प्र.17.** अवकल समीकरण $(x + y) \frac{dy}{dx} = 1$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए । 3
- अथवा
अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = (1 + x^2)(1 + y^2)$ को हल कीजिए ।

प्र.18. एक बीमा कंपनी 2000 स्कूटर चालकों, 4000 कार चालकों और 6000 ट्रक चालकों का बीमा करती है। दुर्घटनाओं की प्रायिकताएं क्रमशः 0.01, 0.03 और 0.15 हैं। बीमाकृत व्यक्तियों (चालकों) में से एक दुर्घटनाग्रस्त हो जाता है। उस व्यक्ति के स्कूटर चालक होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ? 3

अथवा

दर्शाएँ यदि A और B स्वतंत्र घटनाएं हैं तो A या B में से न्यूनतम एक के होने की प्रायिकता = $1 - P(A') \cdot P(B')$

प्र.19. $z = 3x + 4y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए जबकि यह 3
 $x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$ द्वारा प्रतिबंधित है।

अथवा

आलेखीय विधि द्वारा उद्देश्य फलन $Z = -50x + 20y$ का न्यूनतमान निम्न व्यवरोधो के अंतर्गत ज्ञात कीजिए।

$$2x - y \geq -5, \quad 3x + y \geq 3,$$

$$2x - 3y \leq 12, \quad x \geq 0, y \geq 0$$

प्र.20. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि - 4

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$$

अथवा

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $A \cdot (\text{adj}A) = |A| \cdot I$

प्र.21. $\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$ का $\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$ के सापेक्ष अवकलन कीजिये। 4

अथवा

यदि $y = x^x - 2^{\sin x}$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए

प्र.22. रेखाएँ जिनके सदिश समीकरण 4

$$\vec{r} = (2i - 5j + k) + \lambda(3i + 2j + 6k) \text{ और}$$

$$\vec{r} = (7i - 6k) + \mu(i + 2j + 2k)$$

के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए

अथवा

बिन्दु (1, 2, -4) से जाने वाली और दोनों रेखाओं $\frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7}$

और $\frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$ पर लम्ब रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।।

प्र.23. $\int \frac{(3x+1)dx}{2x^2-2x+3}$ का मान ज्ञात कीजिये। 4

अथवा

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^5 x}{\sin^5 x + \cos x} dx \text{ का मान ज्ञात कीजिये।}$$
