Date
Page

-{ पाठ ⇒ 2 }-

-{ विमीय विश्लेषण }-

→ व्युत्पन्न राशियाँ ⇒ वे राशियाँ जिन्हें मूल राशियों की सहायता से प्राप्त करते हैं। व्युत्पन्न राशियाँ कहलाती हैं।

जैसे ⇒ चाल, वेग, त्वरण, बल, कार्य, शक्ति, घनत्व, ऊर्जा आदि

→ व्युत्पन्न मात्रक ⇒ वे मात्रक जो मूल मात्रकों की सहायता से प्राप्त किया जाता है। व्युत्पन्न मात्रक कहलाता है।

जैसे ⇒ घनत्व का व्युत्पन्न मात्रक

$$\text{घनत्व} = \frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}}$$

$$= \frac{kg}{m^3}$$

$$= \text{किग्रा} / \text{मीटर}^3$$

→ भौतिक राशियों की विमायें ⇒ किसी भौतिक राशि की विमायें वे घातें होती हैं जिन्हें उस राशि के मात्रक को व्यक्त करने के लिए मूल मात्रकों पर लगाते या चढ़ाते हैं।

$$\text{वेग} = \frac{\text{विस्थापन}}{\text{समय}} = \frac{\text{लम्बाई का मात्रक}}{\text{समय का मात्रक}}$$

$$= \frac{\text{मीटर}}{\text{सेकण्ड}} = \text{मीटर}^{+1} \times \text{सेकण्ड}^{-1}$$

प्राप्त घातें = (1, −1) विमायें

Date

Page

Imp.

भौतिक राशि का विमीय सूत्र →

भौतिक राशियों की विमायें ज्ञात करने के लिए लम्बाई, द्रव्यमान, समय तथा ताप के मूलमात्रकों को क्रमशः L.M.T. θ से प्रदर्शित करते हैं।

यदि भौतिक राशि की विमायें लम्बाई में a, द्रव्यमान में b, समय में c, तथा ताप d हो तो उस राशि की विमाओं को निम्न प्रकार लिखेंगे।

$$[L^a M^b T^c \theta^d]$$

— इस सूत्र को ही राशि का विमीय सूत्र कहलाते हैं।

कुछ महत्वपूर्ण राशियों के विमीय सूत्र →

1. क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

$$= L \times L$$
$$= [L^2]$$

2. आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई

$$= L \times L \times L$$
$$= [L^3]$$

3. चाल = $\frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$ = $\frac{\text{लम्बाई}}{\text{सेकण्ड}}$ = $\frac{L}{T}$

$$= [LT^{-1}]$$

4. वेग = $\frac{\text{विस्थापन}}{\text{समय}}$ = $\frac{\text{लम्बाई}}{\text{समय}}$ = $\frac{L}{T}$

$$= [LT^{-1}]$$

5. त्वरण = $\frac{\text{वेग परिवर्तन}}{\text{समय}}$ = $\frac{\text{लम्बाई}}{\text{समय}}$ = $\frac{LT^{-1}}{T}$

$$= [LT^{-2}]$$

28/05/1

6. बल = द्रव्यमान × त्वरण = $M \times LT^{-2}$

$= [MLT^{-2}]$

7. कार्य = बल × विस्थापन = $F \times d$ = $Ma \cdot d = ML$

$= [ML^2T^{-2}]$

8. गतिज ऊर्जा (K) = $\frac{1}{2} mv^2 = M[LT^{-2}]^2$

$= [ML^2T^{-2}]$

9. स्थितिज ऊर्जा (U) = द्रव्यमान × त्वरण × ऊँचाई = mgh

$= MLT^{-2} \times L$

$= [ML^2T^{-2}]$

10. बल आघूर्ण = बल × क्रिया रेखा से लम्बवत दूरी = $F \times r$

$= mar = M \times LT^{-2} \times L$

$= [ML^2T^{-2}]$

Amp

11. शक्ति (P) = $\frac{\text{कार्य}}{\text{समय}} = \frac{W}{T} = \frac{ML^2T^{-2}}{T}$

$= [ML^2T^{-2}]$

Amp

12. घनत्व (d) = $\frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}} = \frac{M}{V} = \frac{M}{L^3}$

$= [ML^{-3}]$

13. संवेग (P) = द्रव्यमान × वेग = $m \times v = m \times LT^{-1}$

$= [MLT^{-1}]$

14. दाब (P) = $\frac{\text{बल}}{\text{क्षेत्रफल}} = \frac{MLT^{-2}}{L^2}$

$= [ML^{-1}T^{-2}]$

Date
Page

15. आवेग = बल × समयान्तराल = $F \times t$ = $MLT^{-2} \times T$

$= [MLT]$

Ans
16. प्रतिबल = $\frac{\text{बल}}{\text{क्षेत्रफल}} = \frac{F}{a} = \frac{MLT^{-2}}{L^2}$

$= [ML^{-1}T^{-2}]$

Ans
17. विकृति = $\frac{\text{लम्बाई में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई}} = \frac{\Delta l}{L} = \frac{L}{L} = L^1 \times L^{-1} = L^0$

$= [1]$ विमाहीन राशि

Ans
18. प्रत्या स्थता गुणांक (y) = $\frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}} = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{1}$

$= [ML^{-1}T^{-2}]$

Ans
19. पृष्ठतनाव (S) = $\frac{\text{बल}}{\text{लम्बाई}} = \frac{MLT^{-2}}{L} = ML^{-2}$

$= [ML^{-2}]$

Ans
20. गुरुत्वाकर्षण नियतांक (G) = $\frac{Fr^2}{m_1 m_2} = \frac{MLT^{-2} \times L^2}{MM}$

जहाँ

$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ $= [M^{-1}L^3T^{-2}]$

Ans
21. गुरुत्वी क्षेत्र की तीव्रता (गुरुत्वी बल क्षेत्र) F_g = $\frac{\text{गुरुत्वाकर्षण बल}}{\text{द्रव्यमान}}$

$= \frac{MLT^{-2}}{L}$

$= [MT^{-2}]$

Ans
22. गुरुत्वी विभव = $\frac{\text{कार्य}}{\text{द्रव्यमान}} \Rightarrow V_g = \frac{ML^2T^{-2}}{M}$

$= [L^2T^{-2}]$

Page

23. स्प्रिंग का बल नियतांक (k) = $\frac{\text{आरोपित बल}}{\text{खिंचाव}} = \frac{MLT^{-2}}{L}$

$= \boxed{MT^{-2}}$

24. आवर्ती (n) = $\frac{1}{\text{आवर्तकाल } t} = \frac{1}{T}$

$= \boxed{T^{-1}}$

Imp.
25. कोण θ = $\frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}} = \frac{x}{r} = \frac{L}{L} = L^1 \times L^{-1} = L^0$

$= [L]$ विमाहीन राशि

Imp.
26. कोणीयवेग (ω) = $\frac{\text{कोणीयविस्थापन}}{\text{समय}} = \frac{\theta}{t} = \frac{L^0}{t} = \frac{1}{t}$

$= \boxed{T^{-1}}$

Imp.
27. कोणीय त्वरण (α) = $\frac{\text{कोणीयवेग परिवर्तन}}{\text{समयान्तराल}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{T^{-1}}{T}$

$= \boxed{T^{-2}}$

28. जणत्वआघूर्ण (I) = द्रव्यमान · (दूरी)^2 = Mr^2

$= \boxed{ML^2}$

Imp.
29. विशिष्ट उष्मा (S) = $\frac{\text{उष्मीय ऊर्जा}}{\text{द्रव्यमान} \times \text{ताववृद्धि}} = \frac{Q}{M \cdot \Delta t} = \frac{ML^2T^{-2}}{M \cdot \theta}$

$= \boxed{L^2T^{-2}\theta^{-1}}$

30. उष्मा धारता = द्रव्यमान × विशिष्ट उष्मा = $M \times S$

$= M \times L^2 \times T^{-2}\theta^{-1}$

$= \boxed{ML^2T^{-2}\theta^{-1}}$

31. गुप्त ऊष्मा (L) = $\frac{\text{ऊष्मीय ऊर्जा}}{\text{द्रव्यमान}} = \frac{Q}{m} = \frac{\cancel{M}L^2T^{-2}}{\cancel{M}}$

$= \boxed{L^2T^{-2}}$

32. रेखीय प्रसार गुणांक (α) = $\frac{\text{लम्बाई में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक ताप में वृद्धि}} = \frac{\Delta L}{L\Delta t} = \frac{L}{L\theta}$

$= \boxed{\theta^{-1}}$

Imp

33. सार्वत्रिक गैस नियतांक R = $\frac{\text{दाब} \times \text{आयतन}}{\text{परम ताप}} = \frac{PV}{t} = \frac{ML^{-1}T^{-2} \times L^3}{\theta}$

$= \boxed{ML^{+2}T^{-2}\theta^{-1}}$

Imp

34. प्लांक नियतांक (h) = $\frac{\text{ऊर्जा}}{\text{विकिरण आवृत्ति}} = \frac{E}{\nu} = \frac{ML^2T^{-2}}{T^{-1}}$

$= \boxed{ML^2T^{-1}}$

35. विद्युत आवेश (q) = धारा × समय ⇒ $q = I \cdot t$

$= \boxed{AT}$

36 विभवान्तर (V) = $\frac{\text{प्रतिकार्य}}{\text{आवेश}} = \frac{W}{q} = \frac{ML^2T^{-2}}{AT}$

$= \boxed{ML^2T^{-3}A^{-1}}$

37. विद्युत प्रतिरोध (R) = $\frac{\text{विभवान्तर}}{\text{धारा}} = \frac{V}{I} = \frac{W}{qI} = \frac{ML^2T^{-2}}{AT \cdot A}$

$= \boxed{ML^2T^{-3}A^{-2}}$

→ विशेष नोट → किसी शुद्ध संख्या तथा शुद्ध अनुपात की कोई विमा नही होती है ऐसी राशि को विमाहीन को विमाहीन कहते हैं।

जैसे → कोण, विकृति, पाई, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, आपेक्षिक घनत्व आदि।

Page

→ विमाओं के उपयोग →

Imp

1. एक पद्धति के मात्रकों को दूसरी पद्धति के मात्रकों में बदलना →
किसी भौतिक राशि के आंकिक मान तथा उसके संगत मात्रक का गुणनफल सदैव नियतांक रहता है।
यदि किसी भौतिक राशि P के आंकिक मान दो विभिन्न पद्धतियों में n_1 व n_2 हो तथा मात्रक u_1 व u_2 हो तो

$$n[u] = \text{नियतांक}$$

$$\therefore \text{राशि } P = n_1[u_1] = n_2[u_2] = \text{नियतांक} \quad \text{——— (1)}$$

माना भौतिक राशि की विमायें द्रव्यमान में A, लम्बाई में B तथा समय में C हो तो राशि का विमीय सूत्र -

$$\text{राशि का विमीय सूत्र} = M^a L^b T^c$$

माना प्रथम पद्धति में मूल मात्रकों की मापें क्रमशः $M_1 L_1 T_1$ हैं

$$\therefore P = n_1[M_1^a L_1^b T_1^c]$$

इसी प्रकार.
माना द्वितीय पद्धति में मूल मात्रकों की मापें क्रमशः $M_2 L_2 T_2$ हैं

$$\therefore P = n_2[M_2^a L_2^b T_2^c]$$

समीकरण (1) व (2) को बराबर करने पर -

$$n_1[M_1^a L_1^b T_1^c] = n_2[M_2^a L_2^b T_2^c]$$

$$\therefore n_2 = \frac{n_1[M_1^a L_1^b T_1^c]}{[M_2^a L_2^b T_2^c]}$$

$$n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a \cdot \left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b \cdot \left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c \quad \text{——— (2)}$$

प्रश्न. गुरुत्वीय त्वरण g का मान 9.8 मीटर/सेकण्ड² है। यदि लम्बाई को किलोमीटर तथा समय को मिनट में नापें तो g का आंकिक मान विमीय विधि से ज्ञात कीजिए।

Date
Page

गुरुत्वी त्वरण का विमीय सूत्र = LT^{-2}
माना L_1 तथा T_1 मीटर व सेकण्ड को तथा L_2 व T_2 किलोमीटर व मिनट को प्रदर्शित करते हैं।

∴ प्रथम पद्धति में गुरुत्वी त्वरण का मात्रक = $L_1T_1^{-2}$

द्वितीय पद्धति में गुरुत्वी त्वरण का मात्रक = $L_2T_2^{-2}$

यदि आंकिक मान n_1 व n_2 हों तो -

$$\therefore \quad n(u) = \text{नियतांक}$$

$$\therefore \quad n_1[L_1T_1^{-2}] = n_2[L_2T_2^{-2}]$$

$$\therefore \quad n_2 = n_1\left[\frac{L_1T_1^{-2}}{L_2T_2^{-2}}\right]$$

$$n_2 = n_1\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^{1}\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^{-2} \quad \text{——— (1)}$$

प्रश्नानुसार

$$g = 9.8 \; m/sec^2$$
$$g = (\ldots) \; km/m^2$$

$$n_1 = 9.8 \quad , \quad n_2 = ?$$
$$L_1 = \text{मीटर} \quad , \quad L_2 = \text{किलोमीटर}$$
$$T_1 = \text{सेकण्ड} \quad , \quad T_2 = \text{मिनट}$$

समी (1) से-

$$n_2 = n_1\left[\frac{L_1}{L_2}\right]\cdot\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^{-2}$$

$$n_2 = 9.8\left[\frac{\text{मीटर}}{\text{किलोमी०}}\right]\cdot\left[\frac{\text{सेकण्ड}}{\text{मिनट}}\right]^{-2}$$

$$n_2 = 9.8\left[\frac{1\text{मी०}}{1000\text{मी०}}\right]\cdot\left[\frac{1\text{सेकण्ड}}{60\text{सेकण्ड}}\right]^{-2}$$

$$n_2 = 9.8\left[\frac{1}{1000}\right]\cdot\left[\frac{1}{60}\right]^{-2}$$

$$n_2 = 9.8 \times \frac{1}{1000} \times \frac{1}{60}^{-2}$$

$$n_2 = 9.8 \times \frac{1}{1000} \times \frac{(60)^2}{1}$$

$$n_2 = 9.8 \times \frac{1}{\cancel{1000}_{5}} \times \frac{\cancel{3600}}{18}$$

$$n_2 = 9.8 \times \frac{18}{5}$$

$$n_2 = 9.8 \times 3.6 \text{ km/m}^2$$

$$n_2 = 35.3 \text{ km/m}^2$$

2. **किसी भौतिक समीकरण की सत्यता की जाँच करना →** भौतिकी में प्रत्येक समीकरण में विमीय सन्तुलन विमीय अति आवश्यक होता है। अर्थात समीकरण के दोनों ओर के पदों की विमायें ठीक एक जैसी होनी चाहिए। क्योंकि एक ही प्रकार की राशियों में समानता हो सकती है। विभिन्न प्रकार की राशियों में नहीं।

विशेष नोट → समान प्रकार की विमाओं को ही आपस में जोड़ा या घटाया जा सकता है। यदि समीकरण में यदि दोनों पक्षों की विमायें समान आती हैं तो समीकरण विमीय विधि से सत्य होता है। तथा यदि विमायें समान न हुई हों तो समीकरण विमीय विधि से असत्य होता है।

अर्थात

बायें पक्ष की विमा = दायें पक्ष की विमा

इस स्थिति में समीकरण विमीय विधि से सत्य होता है।

यदि बायें पक्ष की विमा ≠ दायें पक्ष की विमा

इस स्थिति में समीकरण विमीय विधि से असत्य होता है।

जैसे → स्वतंत्रता पूर्वक गिरते हुए किसी पिण्ड द्वारा H ऊँचाई से अर्जित वेग $v = \sqrt{2gh}$ का परीक्षण, विमीय विधि से कीजिए।

हल → वेग $v = \sqrt{2gh}$ —— (1)

बाँया पक्ष-

वेग v की विमा $= LT^{-1}$

दाँया पक्ष

गुरुत्वीय त्वरण g की विमा $= LT^{-2}$

ऊँचाई h की विमा $= L$

$\therefore \sqrt{2gh}$ की विमा $= \sqrt{LT^{-2} \times L}$

$= \sqrt{L^2T^{-2}}$

$= LT^{-1}$

स्पष्ट है

वेग v की विमा $=$ $\sqrt{2gh}$ की विमा

L.H.S. = R.H.S.

अतः

समीकरण विमीय विधि से सत्य है।

3. Imp विभिन्न भौतिक राशि के बीच सम्बन्ध स्थापित करना ⇒

माना कोई भौतिक राशि P विभिन्न राशियों x, y, z पर निर्भर करती है।

तो

$$P \propto x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}$$

$$P = k \cdot x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} \quad \text{---} (1)$$

दोनों पक्षों की विमायें लिखकर उनकी घातों को तुलना करेंगे तथा गणना द्वारा राशियों के बीच अभीष्ट सम्बन्ध प्राप्त हो जाएगा।

प्रश्न- एक कण वृत्तीय कक्षा मे परिक्रमा कर रहा है। उस पर लगने वाला अभिकेंद्र बल F कण के द्रव्यमान m, वृत्त की त्रिज्या r तथा कण की चाल v पर निर्भर करता है। विमीय विधि से अभिकेन्द्र बल F का सूत्र कीजिए।

हल- माना अभिकेन्द्र बल F, द्रव्यमान m, वृत्त की त्रिज्या r तथा ~~कण~~ m की घात α, वेग v की घात β, r की घात γ पर निर्भर करती है।

$$\therefore F \propto m^{\alpha} v^{\beta} r^{\gamma}$$

$$F = k \cdot m^{\alpha} v^{\beta} r^{\gamma} \quad \text{---} (1)$$

जहाँ k = विमाहीन या विमीय नियतांक

- दोनों पक्षों की विमीय सूत्र लिखने पर -

$$[MLT^{-2}] = k \cdot [M]^{\alpha} [LT^{-1}]^{\beta} [L]^{\gamma}$$

या

$$[MLT^{-2}] = k \cdot [M]^{\alpha} \cdot [L^{\beta+\gamma}] \cdot [T^{-\beta}]$$

- दोनों पक्षों की घातों की तुलना करने पर -

$\alpha = 1$ —— ②

$\beta + \gamma = 1$ —— ③

$-\beta = -2$ —— ④

$\because -\beta = -2$

$\therefore \underline{\beta = 2}$

β का मान समी० ③ में रखने पर -

$2 + \gamma = 1$

$\gamma = 1 - 2$

$\therefore \underline{\gamma = -1}$

$\underline{\alpha = 1}$

α, β व γ का मान समीकरण में रखने पर -

$$F = k \cdot m^{1} v^{+2} r^{-1}$$

$$F = k \cdot m^{1} v^{2} r^{-1}$$

$$F = k \cdot \frac{mv^2}{r}$$

$\because$ प्रयोगों के आधार पर $k = 1$

$$\therefore F = 1 \cdot \frac{mv^2}{r}$$

$$\boxed{F = \frac{mv^2}{r}}$$

→ विमाओं की सीमायें →

इसकी निम्नलिखित सीमायें होती हैं।

1. इस विधि से किसी सूत्र में उपस्थित विमाहीन नियतांक का मान ज्ञात नहीं किया जा सकता है।

2. इस विधि से केवल भौतिक राशियों की घातों के गुणनफल पर आधारित सूत्र ज्ञात किये जा सकते हैं, जोडने व घटाने सम्बन्धी पदों वाले सूत्र स्थापित नहीं किए जा सकते हैं। केवल उनकी क्रियाओं की सत्यता की जाँच कर सकते हैं।

जैसे $v = u + at$ तथा

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

3. यदि कोई भौतिक राशि तीन से अधिक राशियों पर निर्भर करती है तो उनके बीच इस विधि से सम्बन्ध स्थापित नहीं किया जा सकता क्योंकि m, L तथा T की घातों की तुलना में बराबर करने पर केवल तीन समी० ही प्राप्त होते हैं। और उनसे तीन घातों के मान प्राप्त किये जा सकते हैं।

4. इस विधि से त्रिकोणमितीय अनुपात ($\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ ----) लघुगणकीय ($\log x$), चरघातांकी (e^x) पदों वाले समीकरणों का विश्लेषण नहीं किया जा सकता है।

Points to be noted !

1. समान प्रकार की विमाओं को ही आपस में जोडा या घटाया जा सकता है।

$$L + L = L$$
$$L - L = L$$

2. $n[u]$ = नियतांक

3. कोई भी राशि हो जिसका विमीय सूत्र 1 हो वह राशि विमाहीन राशि कहलाती है।

4. $$\text{घनत्व} = \frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}}$$

अध्याय द्वितीय समाप्त

Page - 12