



लोक शिक्षण संचालनालय, म.प्र. भोपाल  
द्वारा वर्ष 2022 के लिए जारी प्रश्न बैंक

# प्रश्न बैंक

(रेमेडियल माड्यूल के प्रश्न-उत्तर सहित)

उत्तर सहित

वाणित

कक्षा  
11



नई ब्लू प्रिंट  
सहित



लोक शिक्षण संचालनालय, म.प्र. भोपाल द्वारा जारी, प्रश्न बैंक उत्तर सहित

जी पी एच®

प्रश्न बैंक

गणित - कक्षा-11वीं

समय : 3 घण्टे |

प्रश्न पत्र प्रिंट (Blind Print of Question Paper)

| पूर्णांक : 80

क्र.	विषय एवं विषय क्षेत्र	इकाई पर आवंटित अंक	वस्तुनिष्ठ प्रश्न	अंकवार प्रश्नों की संख्या				कुल प्रश्न
				1 अंक	2 अंक	3 अंक	4 अंक	
1.	अध्याय-1 समुच्चय	08	05	-	01	-	01	
2.	अध्याय-2 संबंध एवं फलन	05	01	02	-	-	02	
3.	अध्याय-3 त्रिकोणमितीय फलन	10	05	01	01	-	02	
4.	अध्याय-5 सम्मिश्र संख्याएँ और द्विघातीय समीकरण	07	03	-	-	01	01	
5.	अध्याय-6 रैखिक असमिकाएँ	04	02	01	-	-	01	
6.	अध्याय-7 क्रमचय और संचय	05	02	-	01	-	01	
7.	अध्याय-8 द्विपद प्रमेय	04	02	01	-	-	01	
8.	अध्याय-9 अनुक्रम तथा श्रेणी	08	02	01	-	01	02	
9.	अध्याय-10 सरल रेखाएँ	05	01	-	-	01	01	
10.	अध्याय-11 शंकु परिच्छेद	04	01	-	01	-	01	
11.	अध्याय-12 त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय	04	02	01	-	-	01	
12.	अध्याय-13 सीमा और अवकलज	06	04	01	-	-	01	
13.	अध्याय-15 सांख्यिकी	05	01	-	-	01	01	
14.	अध्याय-15 प्रायिकता	05	01	02	-	-	02	
	कुल योग	80	32	20	12	16	18+5=23	

निर्देश- प्रश्न पत्र निर्माण हेतु विशेष निर्देश- (1) प्रश्न क्रमांक 1 से 5 तक 32 वस्तुनिष्ठ प्रश्न होंगे। सही विकल्प 06 अंक, रिक्त स्थान 07 अंक, सही जोड़ी 06 अंक, एक वाक्य में उत्तर 07 अंक, सत्य / असत्य 06 अंक, संबंधी प्रश्न होंगे। प्रत्येक प्रश्न पर 01 अंक निर्धारित है। (2) वस्तुनिष्ठ प्रश्नों को छोड़कर अन्य सभी प्रश्नों में आंतरिक विकल्प का प्रावधान होगा। यह विकल्प समान इकाई / उप इकाई से तथा समान कठिनाई स्तर वाले होंगे। इन प्रश्नों की उत्तर सीमा निम्नानुसार होगी-

- अति लघु उत्तरीय प्रश्न (2 अंक) शब्द सीमा अधिकतम 30 शब्द।
- लघु उत्तरीय प्रश्न (3 अंक) शब्द सीमा अधिकतम 75 शब्द।
- विश्लेषणात्मक प्रश्न (4 अंक) शब्द सीमा अधिकतम 120 शब्द।

(3) कठिनाई स्तर- 40 प्रतिशत वस्तुनिष्ठ प्रश्न, 40 प्रतिशत पाठ्यवस्तु पर आधारित प्रश्न, 20 प्रतिशत विश्लेषणात्मक प्रश्न होंगे। पाठ्यवस्तु पर आधारित प्रायोजना कार्य हेतु 20 अंक आवंटित हैं।

# गणित-11वीं

## कम किए गए पाठ्यक्रम की विषय वस्तु

क्र.	अध्याय	कम किये गये अध्याय/विषय वस्तु का नाम
1.	3.	3.5 त्रिकोणमितीय
2.	4.	गणितीय आगमन का सिद्धान्त
3.	5.	5.5 आर्गंड तल और ध्रुवीय निरूपण
4.	9.	9.7 विशेष अनुक्रमों के पदों का योगफल
5.	11.	11.6 अतिपरवलय
6.	14.	गणितीय विवेचना
7.	15.	15.5 प्रसरण और मानक विचलन 15.6 बारं प्रति चंटा का विलेख

### अध्याय-1

### समुच्चय

#### वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए-

- (1) किसी कक्षा में बुद्धिमान छात्रों का समुच्चय है-
- (अ) रिक्त समुच्चय (ब) एकक समुच्चय  
(स) परिमित समुच्चय (द) सुपरिभाषित संग्रह नहीं है
- (2) किसी अरिक्त समुच्चय A के लिए (A')' बराबर है-
- (अ) A' (ब) A (स)  $\phi$  (द) U
- (3) यदि A = {1, 2, 3, 4} और B = {3, 4, 5, 6} तो A  $\cap$  B का मान है-
- (अ) {1, 2, 3, 4, 5, 6} (ब) {3, 4, 5, 6}  
(स) {1, 2, 3, 4} (द) {3, 4}
- (4) समुच्चय {} के उपसमुच्चयों की संख्या होगी-
- (अ) 1 (ब) 2 (स) 3 (द) 0
- (5) समुच्चय {1} के उपसमुच्चयों की संख्या होगी-
- (अ) 1 (ब) 2 (स) 3 (द) 4
- (6) समुच्चय B  $\subset$  A तो A  $\cap$  B बराबर होगा-
- (अ)  $\phi$  (ब) A (स) B (द) U
- (7) समुच्चय B  $\subset$  A तो A  $\cup$  B बराबर होगा-
- (अ)  $\phi$  (ब) A (स) B (द) U
- उत्तर-(1)-(द), (2)-(ब), 3.(द), 4.(अ), 5.(ब), 6.(स), 7.(ब)।

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

- (1) यदि X = {1, 3, 5} तथा Y = {1, 2, 3} तब X  $\cap$  Y = .....
- (2) एक समुच्चय जिसमें एक भी अवयव नहीं होता है, ..... कहलाता है।

(3) A  $\cup$  A' = .....

(4)  $\phi$   $\cap$  A = .....

(5) A  $\cap$  A' = .....

(6) U'  $\cap$  A = .....

उत्तर-(1) (1, 3), (2) रिक्त समुच्चय, (3) y, (4) A, (5)  $\phi$  (6)  $\phi$ .

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए-

- (1) यदि A = {a, b} तथा B = {a, b, c} तो A  $\subset$  B.  
(2) { $\phi$ } एक रिक्त समुच्चय है।  
(3) परिमित समुच्चय में अवयवों की संख्या निश्चित होती है।  
(4) अपरिमित समुच्चय में अवयवों की संख्या निश्चित होती है।
- उत्तर-(1) सत्य, (2) असत्य, (3) सत्य, (4) असत्य

प्रश्न 4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए-

- (1) यदि समुच्चय A में n अवयव हों तो समुच्चय A के कितने उपसमुच्चय होंगे।  
(2) यदि समुच्चय A में n अवयव हों तो समुच्चय A के घात समुच्चय P(A) में कितने अवयव होंगे।  
(3) यदि A = {2, 4, 6, 8} और B = {6, 8, 10, 12} तो A  $\cup$  B ज्ञात कीजिए।  
(4) यदि U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} और A = {1, 3, 7, 9} तो A का पूरक समुच्चय (A)' लिखिए।  
(5) समीकरण  $x^2 + x - 2 = 0$  का हल समुच्चय रोस्टर रूप में लिखिए।

उत्तर-(1) 2<sup>n</sup> (2) 2<sup>n</sup>, (3) {2, 4, 6, 8, 10, 12} (4) {2, 4, 5, 6, 8}, (5) (-2, 1)।

प्रश्न 5. यदि A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} तथा B = {2, 4, 6, 8} तो A - B तथा B - A के मान ज्ञात कीजिए।

हल- हम प्राप्त करते हैं कि, A - B = {1, 3, 5}, क्योंकि अवयव 1, 3, 5 समुच्चय A में हैं किंतु B में नहीं हैं तथा B



Amarwah unity



HOME

VIDEOS

PLAYLISTS

COMMUN

Amarwah unity



Amarwah unity

SUBSCRIBED



174 videos

Stand with unity, an educational channel for the helping students & providing study materials

Uploads

Subscribe

$-A = \{8\}$ , क्योंकि अवयव 8, B में किंतु A में नहीं है। हम देखते हैं कि  $A - B \neq B - A$

प्रश्न 6. घात समुच्चय को परिभाषित कीजिए एवं  $A = \{1, 2\}$  का घात समुच्चय ज्ञात कीजिए।

हल- परिभाषा- समुच्चय A के उपसमुच्चयों के संग्रह को A का घात समुच्चय कहते हैं। इसे  $P(A)$  से निरूपित करते हैं।  $P(A)$  का प्रत्येक अवयव एक समुच्चय होता है।

अतः उपर्युक्त विवरण में, यदि  $A = \{1, 2\}$ , तो

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

यह भी नोट कीजिए कि  $n[P(A)] = 4 = 2^2$

प्रश्न 7. यदि  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A = \{2, 3\}$ ,  $B = \{4, 5\}$  तो  $(A \cup B)'$  तथा  $A - B$  के मान ज्ञात कीजिए।

हल: स्पष्टतया  $A' = \{1, 4, 5, 6\}$ ,  $B' = \{1, 2, 6\}$ । अतः

$$A' \cap B' = \{1, 6\}$$

पुनः  $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$  है। इसलिए  $(A \cup B)' = \{1, 6\}$

$$(A \cup B)' = \{1, 6\}$$

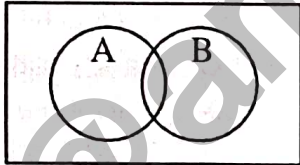
$A - B = \{2\}$ , क्योंकि अवयव 2 समुच्चय A है किन्तु B में नहीं है।

प्रश्न 8. समुच्चय  $\{1, 2, 3\}$  के सभी उपसमुच्चय लिखिए।

हल: अभीष्ट उपसमुच्चय हैं:  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$

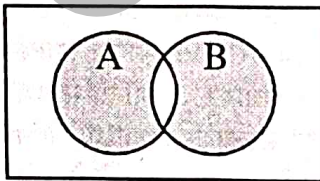
प्रश्न 9.  $(A \cup B)'$  का वेन आरेख खींचिए।

हल:



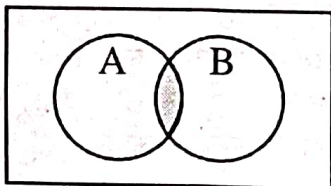
प्रश्न 10.  $A' \cap B'$  का वेन आरेख खींचिए।

हल:



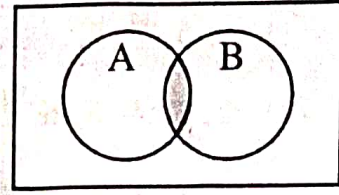
प्रश्न 11.  $(A \cap B)'$  का वेन आरेख खींचिए।

हल:



प्रश्न 12.  $A' \cup B'$  का वेन आरेख खींचिए।

हल:



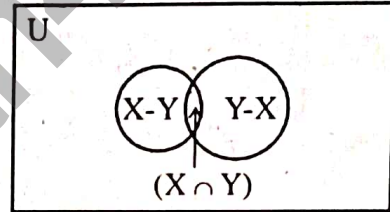
प्रश्न 13. यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि  $X \cup Y$  में 50 अवयव हैं, X में 28 अवयव हैं और Y में 32 अवयव हैं, तो  $X \cap Y$  में कितने अवयव हैं?

हल: दिया है कि  $n(X \cup Y) = 50$ ,  $n(X) = 28$ ,

$$n(Y) = 32, n(X \cap Y) = ?$$

सूत्र  $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$  के प्रयोग द्वारा हम देखते हैं कि

$$\begin{aligned} n(X \cap Y) &= n(X) + n(Y) - n(X \cup Y) \\ &= 28 + 32 - 50 = 10 \end{aligned}$$



विकल्पतः मान लीजिए कि  $n(X \cap Y) = k$ , तो

$n(X - Y) = 28 - k$ ,  $n(Y - X) = 32 - k$  (आकृति 1.12 के वेन आरेख द्वारा)

इससे मिलता है कि

$$\begin{aligned} 50 &= n(X \cup Y) = n(X - Y) + n(X \cap Y) + n(Y - X) \\ &= (28 - k) + k + (32 - k) \end{aligned}$$

अतः  $k = 10$

प्रश्न 14. यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि  $n(X) = 17$ ,  $n(Y) = 23$  तथा  $n(X \cup Y) = 38$ , हो तो  $n(X \cap Y)$  ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ  $n(X \cap Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cup Y)$

$$= 17 + 23 - 38$$

$$= 40 - 38 = 2$$

उत्तर

प्रश्न 15. यदि  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $A = \{2, 4, 6, 8\}$  और  $B = \{2, 3, 5, 7\}$  तो सत्यापित कीजिए कि  $(A \cap B)' = A' \cap B'$

हल: यहाँ  $A \cup B = \{2, 4, 6, 8\} \cup \{2, 3, 5, 7\}$

$$= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\text{बायाँ पक्ष} = (A \cup B)' = U - (A \cup B)$$

$$\begin{aligned} &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\ &= \{1, 9\} \end{aligned}$$

$$A^1 = U - A$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$- \{2, 4, 6, 8\}$$

#### 4 / जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

$$= \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$B^1 = \cup - B$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{2, 3, 5, 7\}$$

$$= \{1, 4, 6, 8, 9\}$$

दायाँ पक्ष =  $A' \cap B'$

$$= \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{1, 4, 6, 8, 9\}$$

$$= \{1, 9\}$$

अतः  $(A \cup B)' = A' \cap B'$

प्रश्न 16. यदि  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $A = \{2, 4, 6, 8\}$  और  $B = \{2, 3, 5, 7\}$  तो सत्यापित कीजिए कि  $(A \cap B)' = A' \cap B'$

हल: बायाँ पक्ष =  $(A \cap B)'$

$$(A \cap B) = \{2, 4, 6, 8\} \cap \{2, 3, 5, 7\}$$

$$= \{2\}$$

$$(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{2\}$$

$$= \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

दायाँ पक्ष =  $A' \cup B' = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{1, 4, 6, 8, 9\}$

$$= \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

अतः  $(A \cap B)' = A' \cup B'$

प्रश्न 17. एक विद्यालय में 20 अध्यापक हैं जो गणित या भौतिकी पढ़ाते हैं। इनमें से 12 गणित पढ़ाते हैं और 4 भौतिकी और गणित दोनों पढ़ाते हैं। कितने अध्यापक भौतिकी ही पढ़ाते हैं?

हल: मान लीजिए कि  $M$  उन अध्यापकों का समुच्चय निरूपित करता है, जो गणित पढ़ाते हैं और  $P$  उन अध्यापकों का समुच्चय निरूपित करता है, जो भौतिकी पढ़ाते हैं। हमें प्रश्न के कथन में आने वाले शब्द 'या' से सम्मिलन तथा शब्द 'और' से सर्वनिष्ठ का संकेत मिलता है। इसलिए

$$n(M \cup P) = 20, n(M) = 12 \text{ और } n(M \cap P) = 4$$

हम  $n(P)$  ज्ञात करना चाहते हैं।

परिणाम

$$n(M \cup P) = n(M) + n(P) - n(M \cap P), \text{ के प्रयोग द्वारा,}$$

$$20 = 12 + n(P) - 4$$

अतः  $n(P) = 12$

अतएव 12 अध्यापक भौतिकी पढ़ाते हैं।

प्रश्न 18. 35 विद्यार्थियों की एक कक्षा में, 24 क्रिकेट खेलना पसंद करते हैं और 16 फुटबाल खेलना पसंद करते हैं। इसके अतिरिक्त प्रत्येक विद्यार्थी कम से कम एक खेल अवश्य खेलना पसंद करता है। कितने विद्यार्थी क्रिकेट और फुटबाल दोनों खेलना पसंद करते हैं?

उत्तर- मानलो कि क्रिकेट खेलने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय  $x$  है। मानलो कि फुटबाल खेलना पसंद करने वाले विद्यार्थियों का समुच्चय  $y$  है। इस प्रकार  $x \cup y$  उन विद्यार्थियों का समुच्चय है, जो कम से कम एक खेलना पसंद करते हैं और  $x \cap y$  उन विद्यार्थियों का समुच्चय है, जो दोनों ही खेल खेलना पसंद करते हैं। दिया है कि  $n(x) = 24$ ,  $n(y) = 16$ ,  $n(x \cup y) = 35$

$$n(x \cap y) = ?$$

सूत्र-  $n(x \cup y) = n(x) + n(y) - n(x \cap y)$  से,

$$35 = 24 + 16 - n(x \cap y)$$

अतः  $n(x \cap y) = 5$

अर्थात् 5 विद्यार्थी दोनों खेल खेलना पसंद करते हैं। उत्तर

प्रश्न 19. किसी स्कूल के 400 विद्यार्थियों के सर्वेक्षण में 100 विद्यार्थी सेब का रस, 150 विद्यार्थी संतरे का रस और 75 विद्यार्थी सेब तथा संतरे दोनों का रस पीने वाले पाए जाते हैं। ज्ञात कीजिए कि कितने विद्यार्थी न तो सेब का रस पीते हैं और न संतरे का ही?

उत्तर- मान लो कि  $U$  सर्वेक्षण किए गए विद्यार्थियों का समुच्चय है तथा  $A$  सेब का रस पीने वाले और  $B$  संतरे का रस पीने वाले विद्यार्थियों के समुच्चयों को निरूपित करते हैं। इस प्रकार,

$$n(U) = 400, n(A) = 100, n(B) = 150 \text{ और } n(A \cap B) = 75$$

अब  $n(A' \cap B') = n(A \cup B)'$

$$= n(U) - n(A \cup B)$$

$$= n(U) - n(A) - n(B) + n(A \cap B)$$

$$= 400 - 100 - 150 + 75 = 225$$

अतः 225 विद्यार्थी न तो सेब का और न ही संतरे का रस पीते हैं।

उत्तर-

प्रश्न 20. 200 व्यक्ति किसी चर्म रोग से पीड़ित हैं, इनमें 120 व्यक्ति रसायन  $C_1$ , 50 व्यक्ति रसायन  $C_2$ , और 30 व्यक्ति रसायन  $C_1$  और  $C_2$  दोनों ही से प्रभावित हुए हैं, तो ऐसे व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए जो प्रभावित हुए हों-

- रसायन  $C_1$  किन्तु रसायन  $C_2$  से नहीं
- रसायन  $C_2$  किन्तु रसायन  $C_1$  से नहीं
- रसायन  $C_1$  अथवा रसायन  $C_2$  से प्रभावित हुए हैं।

हल: मान लीजिए कि  $U$ , चर्म रोग से पीड़ित व्यक्तियों के सार्वत्रिक समुच्चय को निरूपित करता है,  $A$ , रसायन  $C_1$  से प्रभावित व्यक्तियों के समुच्चय को तथा  $B$ , रसायन  $C_2$  से प्रभावित व्यक्तियों के समुच्चय को निरूपित करते हैं। यहाँ पर  $n(U) = 200$ ,  $n(A) = 120$ ,  $n(B) = 50$  तथा  $n(A \cap B) = 30$

(i) दिए हुए वेन आरेख (आकृति) में हम देखते हैं कि

$$A = (A-B) \cup (A \cap B)$$

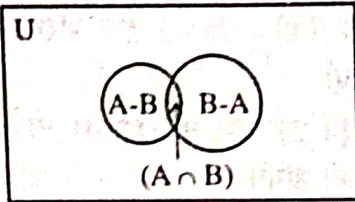
अतः  $n(A) = n(A-B) + n(A \cap B)$

(क्योंकि  $A-B$  और  $A \cap B$  असंयुक्त हैं)

अथवा  $n(A-B) = n(A) - n(A \cap B) =$

$$120 - 30 = 90$$

अतः रसायन  $C_1$  किंतु रसायन  $C_2$  से नहीं प्रभावित व्यक्तियों की संख्या 90 है।



आकृति

(ii) उपरोक्त आकृति में  $B = (B-A) \cup (A \cap B)$ .

इसलिए  $n(B) = n(B-A) + n(A \cap B)$

(क्योंकि  $A-B$  तथा  $A \cap B$  असंयुक्त हैं।)

अथवा  $n(B-A) = n(B) - n(A \cap B)$

$$= 50 - 30 = 20$$

अतः रसायन  $C_2$  किंतु रसायन  $C_1$  से नहीं प्रभावित व्यक्तियों की संख्या 20 है।

(iii) रसायन  $C_1$  अथवा रसायन  $C_2$  से प्रभावित व्यक्तियों की संख्या अर्थात्

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 120 + 50 - 30 = 140.$$

प्रश्न 21. 400 व्यक्तियों के समूह में, 250 हिन्दी तथा 200 अंग्रेजी बोल सकते हैं। कितने व्यक्ति हिन्दी तथा अंग्रेजी दोनों बोल सकते हैं।

हल: यहाँ,  $n(H) = 250$ ,  $n(E) = 200$  और  $n(H \cap E)$

$$= 450. \text{ अब,}$$

$$n(H \cup E) = n(H) + n(E) - n(H \cap E)$$

इसलिए,  $n(H \cup E) = 250 + 200 - 450 = 0$  उत्तर

प्रश्न 22. 70 व्यक्तियों के समूह में 37 कॉफी, 52 चाय पसंद करते हैं तथा प्रत्येक व्यक्ति कम-से-कम एक पेय पसंद करता है, तो कितने व्यक्ति कॉफी और चाय दोनों को पसंद करते हैं?

हल: यहाँ,  $n(C) = 37$ ,  $n(T) = 52$  और  $n(C \cup T) = 70$ .

अब,

$$n(C \cap T) = n(C) + n(T) - n(C \cup T)$$

इसलिए,  $n(C \cap T) = 37 + 52 - 70 = 19.$  उत्तर

प्रश्न 23. 65 व्यक्तियों के समूह में, 40 व्यक्ति क्रिकेट और 10 व्यक्ति क्रिकेट और टेनिस दोनों को पसंद करते हैं, तो बताइए कि कितने लोग टेनिस को पसंद करते हैं किन्तु क्रिकेट को नहीं? कितने व्यक्ति टेनिस को पसंद करते हैं?

हल: दिया है कि,  $n(C) = 40$ ,  $(C \cap T) = 10$  और  $n(C \cup T) = 65$ .

अब,  $n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T)$

इसलिए,  $n(T) = n(C \cup T) + n(C \cap T) - n(C)$

$$= 65 + 10 - 40 = 35.$$

-उत्तर

साथ ही,  $n(T - C) = n(T) - n(C \cap T)$

$$= 35 - 10 = 25.$$

-उत्तर

प्रश्न 24. एक कमेटी में, 50 व्यक्ति फ्रेंच, 20 व्यक्ति स्पेनिश तथा 10 व्यक्ति फ्रेंच व स्पेनिश दोनों ही भाषाएँ बोल सकते हैं। कितने व्यक्ति दोनों भाषाओं में से कम-से-कम एक भाषा बोल सकते हैं?

हल: दिया है कि  $n(F) = 50$ ,  $n(S) = 20$  और  $n(F \cap S) = 10$ . इसलिए,

$$n(F \cup S) = n(F) + n(S) - n(F \cap S)$$

$$= 50 + 20 - 10 = 60.$$

उत्तर

प्रश्न 25. किसी विद्यालय के 600 विद्यार्थियों के सर्वेक्षण से ज्ञात हुआ कि 150 विद्यार्थी चाय, 225 विद्यार्थी कॉफी तथा 100 विद्यार्थी चाय और कॉफी दोनों पीते हैं। ज्ञात कीजिए कि कितने विद्यार्थी न तो चाय पीते हैं और न कॉफी पीते हैं।

उत्तर- मान लीजिए T और C चाय तथा कॉफी पीने वाले विद्यार्थियों के समुच्चय हों तब

$$n(T) = 150, n(C) = 225, n(T \cap C) = 100$$

$$n(T \cup C) = n(T) + n(C) - n(T \cap C)$$

$$= 150 + 225 - 100 = 275$$

= उन विद्यार्थियों की संख्या जो चाय या

कॉफी पीते हैं या चाय और कॉफी दोनों पीते हैं।

विद्यार्थियों की कुल संख्या = 600

∴ उन विद्यार्थियों की संख्या जो चाय या कॉफी कुछ भी नहीं

$$\text{पीते} = 600 - 275 = 325$$

-उत्तर ■

## अध्याय-2

## संबंध एवं फलन

### वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए-

(1) फलन  $f(x) = x$  कहलाता है-

(अ) तत्समक फलन (ब) अचर फलन

(स) मापांक फलन (द) चिन्ह फलन

(2) फलन  $f(x) = c$ , जहाँ c एक अचर है, कहलाता है-

(अ) तत्समक फलन

(ब) अचर फलन

(स) मापांक फलन

(द) चिन्ह फलन

## 6 / जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

(3) फलन  $f(x) = |x|$  कहलाता है-

- (अ) तत्समक फलन (ब) अचर फलन  
(स) मापांक फलन (द) चिन्ह फलन

(4) यदि  $(a+1, b-2) = (3, 1)$  तो  $a$  व  $b$  के मान क्रमशः होंगे-

- (अ) 2, 3 (ब) -2, -3  
(स) 2, -3 (द) -2, 3

(5) यदि  $A = \{1, 2\}$  और  $B = \{3, 4\}$  तब  $A$  से  $B$  पर संबंधों की संख्या होगी-

- (अ) 2 (ब) 4  
(स) 8 (द) 16

(6) दो परिभाषित समुच्चय  $A$  तथा  $B$  इस प्रकार हैं कि  $n(A) = 2$ ,  $n(B) = 3$  तब  $A$  से  $B$  में संबंधों की संख्या होगी।

- (अ) 64 (ब) 4  
(स) 8 (द) 16

(7) यदि  $A$  तथा  $B$  दो समुच्चय हैं, तब  $A \times B = B \times A$  यदि और केवल यदि-

- (अ)  $A \subseteq B$  (ब)  $B \subseteq A$   
(स)  $A = B$  (द)  $A \supseteq B$

उत्तर- (1)-(अ), (2)-(ब), (3)-(स), (4)-(अ), (5)-(द), (6)-(अ), (7)-(स)।

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

- (1)  $A \times \phi = \dots\dots\dots$   
(2)  $A$  या  $B$  में से कोई अपरिमित समुच्चय है तो  $A \times B \dots\dots\dots$  समुच्चय होता है।  
(3) किसी अरिक्त समुच्चय  $A$  से अरिक्त समुच्चय  $B$  में संबंध  $(R)$ , कार्तीय गुणन  $A \times B$  का  $\dots\dots\dots$  होता है।  
(4) किसी अरिक्त समुच्चय  $A$  से अरिक्त समुच्चय  $B$  में संबंध  $R$  के सभी क्रमित युग्मों के प्रथम घटकों के समुच्चय को संबंध  $R$  का  $\dots\dots\dots$  कहते हैं।

उत्तर- (1)  $\phi$  (2) अपरिमित, (3) उपसमुच्चय, (4) प्रांत।

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए:

- (1)  $A \times \phi = A$  (2)  $A \times \phi = \phi$   
(3) दो क्रमित युग्म समान होते हैं, यदि और केवल यदि उनके संगत प्रथम घटक समान हों और संगत द्वितीय घटक भी समान हों।  
(4)  $A \times A \times A = \{(a, b, c) : a, b, c, \in A\}$ . यहाँ  $(a, b, c)$  एक क्रमित त्रिक कहलाता है।  
(5) किसी संबंध  $R$  का परिसर (Range) उस संबंध के सह-प्रांत (Co-domain) का उपसमुच्चय (Subset) होता है, अर्थात् परिसर (Range)  $\subseteq$  सह-प्रांत (Co-domain)।

(6) यदि  $n(A) = p$  तथा  $n(B) = q$  तो  $n(A \times B) = pq$  तथा  $A$  से  $B$  में संबंधों की कुल संख्या  $= 2pq$ .

उत्तर- (1) असत्य, (2) सत्य, (3) सत्य, (4) सत्य, (5) सत्य, (6) सत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए-

(1) यदि  $A = \{1, 2\}$  और  $B = \{3, 4\}$  तो समुच्चय  $A \times B$  ज्ञात कीजिए।

(2) एक फलन  $f(x) = 2x - 5$  द्वारा परिभाषित है तो  $f(-3)$  का मान लिखिए।

(3) यदि  $A = \{1, 2\}$  और  $B = \{3, 4\}$  तो  $A$  से  $B$  में संबंधों की संख्या कितनी होगी।

उत्तर- (1)  $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$   
(2) -11, (3) 16.

प्रश्न 5. यदि  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ ,  $C = \{5, 6\}$  तथा  $D = \{5, 6, 7, 8\}$  सत्यापित कीजिए कि  $A \times C$ ,  $B \times D$  का एक उपसमुच्चय है।

उत्तर- यहाँ  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ ,  $C = \{5, 6\}$  तथा  $D = \{5, 6, 7, 8\}$  कार्तीय गुणन की परिभाषा से,

$A \times C = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$   
तथा  $B \times D = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8)\}$

अतः  $A \times C$  के सभी अवयव  $B \times D$  में हैं अतः  $A \times C$ ,  $B \times D$  का एक उपसमुच्चय है।

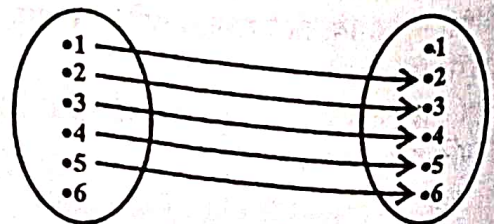
प्रश्न 6. यदि  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $R = \{x, y) : y = x + 1\}$  द्वारा  $A$  से  $A$  में एक संबंध परिभाषित कीजिए।

(i) इस संबंध को एक तीर आरेख द्वारा दर्शाइए।

(ii)  $R$  के प्रांत, सह-प्रांत तथा परिसर लिखिए।

हल: (i) परिभाषा द्वारा

$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$ . संगत तीर आरेख आकृति में प्रदर्शित है।



(ii) हम देख सकते हैं कि प्रथम घटकों का समुच्चय अर्थात् प्रांत  $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$  इसी प्रकार, द्वितीय घटकों का समुच्चय अर्थात् परिसर  $= \{2, 3, 4, 5, 6\}$  तथा सहप्रांत  $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .



प्रश्न 7. यदि  $A = \{1, 2, 3, \dots, 14\}$ .  $R = \{(x, y) : 3x - y = 0, x, y \in A\}$  द्वारा, A से A का एक संबंध R लिखिए। इसके प्रांत, सह-प्रांत और परिसर लिखिए।

हल:  $R = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12)\}$   
 R का प्रान्त = R के क्रमित युग्मों के प्रथम घटक  
 $= \{1, 2, 3, 4\}$   
 R का सह-प्रान्त = समुच्चय A अर्थात्  $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$   
 R का परिसर = R के क्रमित युग्मों के द्वितीय घटक  
 $= \{3, 6, 9, 12\}$ . उत्तर

प्रश्न 8. प्राकृत संख्याओं के समुच्चय पर  $R = \{(x, y) : y = x + 5, x \text{ संख्या } 4 \text{ से कम, एक प्राकृत संख्या है, } x, y \in \mathbb{N}\}$  द्वारा एक संबंध R परिभाषित कीजिए। इस संबंध को (i) रोस्टर रूप में लिखिए (ii) इसके प्रांत और परिसर लिखिए।

हल: यहाँ, जब  $x = 1$ , तो  $y = 6$ ; जब  $x = 2$ , तो  $y = 7$ ; जब  $x = 3$ , तो  $y = 8$  अतः,

$$R = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}.$$

R का प्रान्त = R के क्रमित युग्मों के प्रथम घटक  
 $= \{1, 2, 3\}$   
 R का परिसर = R के क्रमित युग्मों के द्वितीय घटक  
 $= \{6, 7, 8\}$ . उत्तर

प्रश्न 9. यदि  $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$  और R, A पर  $\{(a, b) : a, b \in A, \text{ संख्या } a \text{ संख्या } b \text{ को यथावय विभाजित करती है}\}$  द्वारा परिभाषित एक संबंध है। (i) R को रोस्टर रूप में लिखिए (ii) R का प्रांत ज्ञात कीजिए। (iii) R का परिसर ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ,  $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$$(A \times A) \leq S$$

$$R = \{(a, b) : a \in A, b \in A$$

$a, b \text{ को यथावय विभाजित करता है।}$

$$(i) R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (1, 1), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 6), (3, 3), (4, 4), (6, 6)\}$$

$$(i) \text{ प्रान्त} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

$$(ii) \text{ प्रान्त} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

प्रश्न 10.  $R = \{(x, x+5) : x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$  द्वारा परिभाषित संबंध R के प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए।  
 हल: यहाँ,  $R = \{(0, 5), (1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 10)\}$ .

इसलिए, R का प्रान्त =  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  और R का परिसर =  $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  उत्तर

प्रश्न 11. यदि N प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है और N पर परिभाषित एक संबंध R इस प्रकार है कि  $R = \{(x, y) :$

$y = 2x, x, y \in \mathbb{N}\}$ . R के प्रांत, सह-प्रांत और परिसर क्या हैं? क्या यह संबंध, एक फलन है?

हल: R का प्रांत, प्राकृत संख्याओं का समुच्चय N है। इसका सहप्रांत भी N है। इसका परिसर सम प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है।

क्योंकि प्रत्येक प्राकृत संख्या n का एक और केवल एक ही प्रतिबिंब है, इसलिए यह संबंध एक फलन है।

प्रश्न 12. यदि  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  क्रमशः  $f(x) = x + 1, g(x) = 2x - 3$  द्वारा परिभाषित है।  $f + g, f - g, f \cdot g$  और  $\frac{f}{g}$  ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: } f(x) = x + 1, g(x) = 2x - 3$$

$$(f + g) = f(x) + g(x) = x + 1 + 2x - 3 = 3x - 2.$$

$$(f - g) = f(x) - g(x) = x + 1 - 2x + 3 = -x + 4$$

$$\text{तथा } \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x + 1}{2x - 3} \text{ जबकि } x \neq \frac{3}{2}$$

$$f \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) = (x + 1)(2x - 3) = 2x^2 - 3x + 2x - 3 = 2x^2 - x - 3$$

प्रश्न 13. यदि  $f(x) = x^2$  तथा  $g(x) = 2x + 1$  हो तो  $(f + g)(x), (f - g)(x), (f \cdot g)(x)$  और  $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$  ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: यहाँ, } (f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 2x - 1.$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2(2x + 1) = 2x^3 + x^2.$$

$$\text{और } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{2x + 1}, x \neq -\frac{1}{2}. \text{ -उत्तर}$$

प्रश्न 14. यदि  $f(x) = \sqrt{x}$  तथा  $g(x) = x$  ऋणोत्तर वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित दो फलन हैं तो  $(f + 2)(x), (f - g)(x), (f \cdot g)(x)$  और  $\left(\frac{f}{x}\right)(x)$  ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: यहाँ, } (f + 2)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + x.$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - x.$$

8 / जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = x \cdot \sqrt{x} = x^{3/2}.$$

$$\text{और } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}, x \neq 0.$$

-उत्तर

प्रश्न 15. फलन  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$  का प्रांत (Domain) तथा परिसर (Range) ज्ञात कीजिए।

हल:  $f(x)$  वास्तविक होगा, यदि  $9-x^2 \geq 0$ , अब

$$9-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3.$$

इसलिए  $f(x)$  का प्रांत (domain)  $-3 \leq x \leq 3$ . अर्थात् [3.3] है।

प्रश्न 16. फलन  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$  द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन  $f$  का प्रांत (Domain) तथा परिसर (Range) ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: दिया गया है } f(x) = \sqrt{(x-1)}$$

सभी  $x \geq 1$  वास्तविक संख्याओं के लिये फलन  $f$  परिभाषित है।

अतः  $f$  का प्रांत होगा  $[1, \infty)$

सभी  $x \geq 1$  के लिए  $(x-1) \geq 0$  है, अर्थात्  $f(x) = \sqrt{(x-1)} \geq 0$  है।

अतः  $f$  का परिसर होगा  $[0, \infty)$ .

प्रश्न 17. फलन  $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-8x+12}$  का प्रांत ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: दिया गया है } f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-8x+12}$$

$$\text{अतः } f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-8x+12} = \frac{(x+1)^2}{(x-2)(x-6)}$$

प्रश्न 18. फलन  $f(x) = \frac{x^2+3x+5}{x^2-5x+4}$  का प्रांत ज्ञात कीजिए।

हल: क्योंकि  $x^2-5x+4 = (x-4)(x-1)$ , इसलिए फलन  $f$ ,  $x=4$  और  $x=1$  के अतिरिक्त अन्य सभी वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित है। अतः  $f$  का प्रांत  $R - \{1, 4\}$  है।

प्रश्न 19. यदि  $f = \{(1,1), (2,3), (0,-1), (-1,-3)\}$ ,  $Z$  से  $Z$  में एक रैखिक फलन है तो  $f(x)$  ज्ञात कीजिए।

अथवा

यदि  $f = \{(1,1), (2,3), (0,-1), (-1,-3)\}$ ,  $Z$  से में,  $f(x) = ax + b$ , द्वारा परिभाषित एक फलन जहाँ  $a, b$ ,

कोई दो पूर्णांक हैं तो  $a, b$ , को निर्धारित करते हुए  $f(x)$  ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए कि दत्त रैखिक फलन,

$$f(x) = ax + b \text{ है।}$$

$$\text{प्रश्नानुसार, } f(1) = a \cdot 1 + b = 1 \quad \dots(1)$$

$$\text{और } f(2) = 2a + b = 3. \quad \dots(2)$$

(1) को (2) में से घटाने पर,  $a=2$ , तब (1) से,  $b=-1$ .

इसलिए,  $f(x) = 2x - 1$ .

यहाँ नोट करें कि,

$$f(0) = -1 \text{ और } f(-1) = -3. \quad \text{-उत्तर}$$

प्रश्न 20. यदि  $f(x) = x^2 + 2x - 3$  हो तो  $f(0)$ ,  $f(-1)$ ,

$f\left(\frac{1}{3}\right)$   $f(\sin x)$  के मान ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ,  $f(x) = x^2 + 2x - 3$  इसलिए,

$$f(0) = 0 + 0 - 3 = -3;$$

$$f(-1) = 1 - 2 - 3 = -4;$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3} - 3$$

$$= \frac{20}{9} = -2 \frac{2}{9}.$$

$$f(\sin x) = \sin^2 x + 25 \sin x - 3 \quad \text{-उत्तर}$$

प्रश्न 21. फलन 't' सेल्सियस तापमान का फारेनहाइट

तापमान में प्रतिचित्रण करता है, जो  $t(C) = \frac{9c}{5} + 32$  द्वारा

परिभाषित है, निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए:

$$(i) t(0) \quad (ii) t(28)$$

$$(iii) t(-10) \quad (iv) C \text{ का मान जब } t(C) = 212.$$

$$\text{हल: दिया है: } t(C) = \frac{9C}{5} + 32$$

$$(i) \quad t(0) = \frac{9}{5} \times 0 + 32 = 0 + 32 = 32 \quad \text{-उत्तर}$$

$$(ii) \quad t(28) = \frac{9 \times 28}{5} + 32 = \frac{252}{5} + 32 = \frac{252 + 160}{5} = \frac{412}{5} \quad \text{-उत्तर}$$

$$(iii) \quad t(-10) = \frac{9}{5} \times (-10) + 32 = -18 + 32 = 14$$

(iv)  $l(C) = 212$   
 $\therefore 212 = \frac{9}{5} \times C + 32$   
 $\therefore \frac{9}{5} \times C = 212 - 32 = 180$   
 $C = \frac{180 \times 5}{9} = 100$

प्रश्न 22. यदि  $f(x) = x^2$  हो तो  $\frac{f(1.1) - f(1)}{(1.1 - 1)}$  का मान

ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया है-

$$f(x) = x^2$$

अतः  $\frac{f(1.1) - f(1)}{1.1 - 1} = \frac{(1.1)^2 - (1)^2}{1.1 - 1} = \frac{1.21 - 1}{0.1} = 2.1$   
 $= 2.1$  - उत्तर ■

### अध्याय-3 त्रिकोणमितीय फलन

#### वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. सही जोड़ी मिलाइए-

- |  |                                     |
|--|-------------------------------------|
| स्तम्भ-(अ)                               | स्तम्भ-(ब)                          |
| (1) $\sec^2 x - 1$                       | (अ) $\cos x$                        |
| (2) $\tan 2x$                            | (ब) $\frac{180}{\pi}$ डिग्री माप    |
| (3) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ | (स) $\sin x$                        |
| (4) रेडियन माप                           | (द) $\tan^2 x$                      |
| (5) $\sin(2n\pi + x)$                    | (इ) $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ |

उत्तर- 1.(स), 2.(इ), 3.(अ), 4.(ब), 5.(द)।

प्रश्न 2. सही जोड़ी मिलाइए:

- |                         |                                   |
|-------------------------|-----------------------------------|
| स्तम्भ-(अ)              | स्तम्भ-(ब)                        |
| (1) $180^\circ$         | (अ) $\tan \theta$                 |
| (2) $\cos \pi$          | (ब) $-\tan \theta$                |
| (3) $\tan(-\theta)$     | (स) $\pi^c$                       |
| (4) $\sec(90 - \theta)$ | (द) $-1$                          |
| (5) $\cot 30^\circ$     | (इ) $1$                           |
|                         | (फ) $\operatorname{cosec} \theta$ |

उत्तर- 1.(स), 2.(द), 3.(ब), 4.(ई), 5.(फ)।

प्रश्न 3. सही जोड़ी मिलाइए-

- |                                       |                    |
|---------------------------------------|--------------------|
| स्तम्भ-(अ)                            | स्तम्भ-(ब)         |
| (1) $2 \sin A \cos A$                 | (अ) $\sin 3\theta$ |
| (2) $1 - 2 \sin^2 A$                  | (ब) $\cos 3\theta$ |
| (3) $\frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$   | (स) $\sin 2A$      |
| (4) $3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ | (द) $\cos 2A$      |
| (5) $4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ | (इ) $\tan 2A$      |
- उत्तर- 1.(स), 2.(द), 3.(इ), 4.(अ), 5.(ब)।

प्रश्न 4. सही जोड़ी मिलाइए-

- |                     |   |
|---------------------|---|
| स्तम्भ-(अ)          | स्तम्भ-(ब)                              |
| (1) $\sin 15^\circ$ | (अ) $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$     |
| (2) $\sin 2x$       | (ब) $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ |
| (3) $\tan 2x$       | (स) $\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$     |
| (4) $\cos 2x$       | (द) $\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$    |
| (5) $\cos 15^\circ$ | (इ) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$    |

उत्तर- 1.(इ), 2.(स), 3.(अ), 4.(ब), 5.(अ)।

प्रश्न 5. उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसमें  $60^\circ$  का केंद्रीय कोण परिधि पर 37.4 सेमी लंबाई का चाप काटता है। ( $\pi = \frac{22}{7}$  का प्रयोग करें)

हल: यहाँ  $J = 37.4$  सेमी तथा  $\theta = 60^\circ = \frac{60\pi}{180}$

$$\text{रेडियन} = \frac{\pi}{3}$$

अतः  $r = \frac{1}{\theta}$ , से हम पाते हैं

$$r = \frac{37.4 \times 3}{\pi} = \frac{37.4 \times 3 \times 7}{22} = 35.7 \text{ सेमी}$$

प्रश्न 6. एक घड़ी में मिनट की सुई 1.5 सेमी लंबी है। इसकी नोक 40 मिनट में कितनी दूर जा सकती है?

हल: 60 मिनट में घड़ी की मिनट वाली सुई एक परिक्रमण पूर्ण करती है, अतः 40 मिनट में मिनट की सुई एक परिक्रमण का  $\frac{2}{3}$  भाग पूरा करती है। इसलिए

10 / जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

$$\theta = \frac{2}{3} \times 360^\circ \text{ या } \frac{4\pi}{3} \text{ रेडियन}$$

अतः तय की गई वांछित दूरी

$$J = r\theta = 1.5 \times \frac{4\pi}{3} \text{ सेमी}$$

$$= 2\pi \text{ सेमी} = 2 \times 3.14 \text{ सेमी} = 6.28 \text{ सेमी}$$

प्रश्न 7. एक वृत्त, जिसका व्यास 40 सेमी है, की एक जीवा 20 सेमी लंबाई की है तो इसके संगत छोटे चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल: व्यास = 40 सेमी

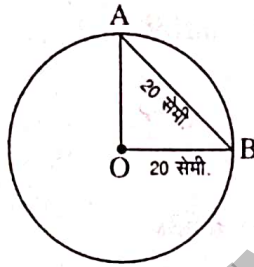
त्रिज्या = 20 सेमी

त्रिभुज OAB एक समबाहु त्रिभुज है।

$$\angle AOB = 60^\circ$$

$$= \frac{60 \times \pi}{180} \text{ रेडियन}$$

$$= \frac{\pi}{3} \text{ रेडियन.}$$



मान लीजिए चाप AB = l

केन्द्र O पर चाप द्वारा बना कोण,

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

चाप AB की लम्बाई,  $l = r\theta = 20 \times \frac{\pi}{3}$  रेडियन

$$= \frac{20\pi}{3} \text{ रेडियन}$$

प्रश्न 8. एक पहिया एक मिनट में 360 परिक्रमण करता है तो एक सेकण्ड में कितने रेडियन माप का कोण बनाएगा?

हल: 1 परिक्रमण में पहिया द्वारा बना कोण =  $2\pi$  रेडियन

$\therefore$  360 परिक्रमण में पहिया द्वारा बना कोण =  $360 \times 2\pi$  रेडियन

$\therefore$  1 मिनट अर्थात् 60 सेकण्ड में  $360 \times 2\pi$  रेडियन का कोण बनता है।

$$\therefore 1 \text{ सेकण्ड में पहिया द्वारा बना कोण} = \frac{360 \times 2\pi}{60}$$

$$= 12\pi \text{ रेडियन}$$

प्रश्न 9. यदि दो वृत्तों के चापों की लंबाई समान हो और वे अपने केंद्र पर क्रमशः  $60^\circ$  तथा  $110^\circ$  का कोण बनाते हैं, तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: माना दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः  $r_1$  तथा  $r_2$  हैं तो

$$\theta_1 = 65^\circ = \frac{\pi}{180} \times 65 = \frac{13\pi}{36} \text{ रेडियन}$$

$$\text{तथा } \theta_2 = 110^\circ = \frac{\pi}{180} \times 110 = \frac{22\pi}{36} \text{ रेडियन}$$

माना कि प्रत्येक चाप की लंबाई J है, तो  $J = r_1\theta_1 = r_2\theta_2$ , जिससे

$$\frac{13\pi}{36} \times r_1 = \frac{22\pi}{36} \times r_2, \text{ अर्थात्, } \frac{r_1}{r_2} = \frac{22}{13}$$

इसलिए  $r_1 : r_2 = 22 : 13$ .

प्रश्न 10. यदि दो वृत्तों के चापों की लंबाई समान हो और वे अपने केंद्र पर क्रमशः  $60^\circ$  तथा  $75^\circ$  का कोण बनाते हैं, तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

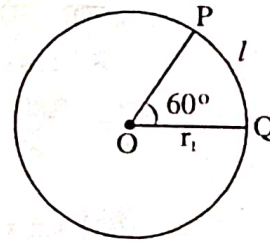
हल: माना चाप की लम्बाई = l

चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण  $\theta_1 = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$  रेडियन मान

लीजिए इसकी त्रिज्या =  $r_1$

$$l = r_1\theta_1 = r_1 \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore r_1 = \frac{3l}{\pi} \quad \dots(i)$$



अब दूसरे वृत्त के लिए, माना त्रिज्या =  $r_2$

चाप की लम्बाई = l

चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण,

$$\theta_2 = 75^\circ$$

$$= 75 \times \frac{\pi}{180} \text{ रेडियन}$$

$$= \frac{5\pi}{12} \text{ रेडियन}$$

$$r_2 = \frac{12}{5\pi} \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) को समीकरण (ii) से विभाजित करने पर,

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{3l}{\pi} \div \frac{12l}{5\pi}$$

$$= \frac{31}{\pi} \times \frac{5\pi}{121} = \frac{5}{4} = 5:4 \quad \text{-उत्तर}$$

प्रश्न 11. 75 सेमी लंबाई वाले एक दोलायमान दोलक का एक सिरे से दूसरे सिरे तक दोलन करने से जो कोण बनता है, उसका माप रेडियन में ज्ञात कीजिए, जबकि उसके नोक द्वारा बनाए गए चाप की लंबाई 21 सेमी है।

हल: त्रिज्या = 75 सेमी

चाप की लंबाई  $l = 21$  सेमी.

यदि, चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण  $\theta$  रेडियन हो, तो

$$l = r\theta$$

$$21 = 75\theta$$

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{21}{75} \text{ रेडियन}$$

$$= \frac{7}{25} \text{ रेडियन}$$

-उत्तर

प्रश्न 12. सिद्ध कीजिए कि-

$$3\sin \frac{\pi}{6} \sec \frac{\pi}{3} - 4\sin \frac{5\pi}{6} \cot \frac{\pi}{4} = 1.$$

हल: बायाँ पक्ष =  $3\sin \frac{\pi}{6} \sec \frac{\pi}{3} - 4\sin \frac{5\pi}{6} \cot \frac{\pi}{4}$

$$= 3 \times \frac{1}{2} \times 2 - 4 \sin \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) \times 1$$

$$= 3 - 4 \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= 3 - 4 \times \frac{1}{2} = 1 = \text{दायाँ पक्ष}$$

प्रश्न 13. सिद्ध कीजिए कि-

$$\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3} - \tan^2 \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}.$$

हल: बायाँ पक्ष =  $\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3} - \tan^2 \frac{\pi}{4}$

$$= \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 - 1^2$$

$$[\because \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \tan \frac{\pi}{4} = 1]$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2} = \text{दायाँ पक्ष}$$

प्रश्न 14. सिद्ध कीजिए कि-

$$2\sin^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}^2 \frac{7\pi}{6} \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$$

हल: बायाँ पक्ष =  $2\sin^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}^2 \frac{7\pi}{6} \cos^2 \frac{\pi}{3}$

$$= 2 \times \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \operatorname{cosec}^2 \left( \pi + \frac{\pi}{6} \right) \times \left( \frac{1}{2} \right)^2$$

$$[\because \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}]$$

$$= \frac{2}{4} + \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{6} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{2^2} \quad [\because \operatorname{cosec} 30^\circ = 2]$$

$$= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} = \text{दायाँ पक्ष}$$

प्रश्न 15.  $\sin 15^\circ$  का मान ज्ञात कीजिए।

हल:  $\sin 15^\circ = \sin (45^\circ - 30^\circ)$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \quad \text{-उत्तर}$$

प्रश्न 16.  $\sin 75^\circ$  का मान ज्ञात कीजिए।

हल:  $\sin 75^\circ = \sin (45^\circ + 30^\circ)$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \quad \text{-उत्तर}$$

प्रश्न 17.  $\tan 15^\circ$  का मान ज्ञात कीजिए।

हल:  $\tan 15^\circ = \tan (60^\circ - 45^\circ)$

$$= \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-(1-\sqrt{3})^2}{1-3} = \frac{1+3-2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 - \sqrt{3}.$$

-उत्तर

12 / जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

प्रश्न 18.  $\tan \frac{13\pi}{12}$  का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } \tan \frac{13\pi}{12} &= \tan \left( \pi + \frac{\pi}{12} \right) = \tan \frac{\pi}{12} \\ &= \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \\ &= 2 - \sqrt{3} \quad \text{-उत्तर} \end{aligned}$$

प्रश्न 19. सिद्ध कीजिए कि  $\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y}$ .

हल: बायाँ पक्ष =  $\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\sin x \cos y - \cos x \sin y}$   
अंश और हर को  $\cos x \cos y$  से विभाजित करने पर, हम पाते हैं,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y} = \text{दायाँ पक्ष}$$

प्रश्न 20. सिद्ध कीजिए कि-  $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \left(\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}\right)^2$

हल: बायाँ पक्ष =  $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$

अब,  $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

और  $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$  से प्रयोग से,

$$\begin{aligned} &\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan x} \\ &= \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \\ &= \frac{1 - \tan x}{1 - \tan x} \cdot \frac{1 + \tan x}{1 + \tan x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \times \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \frac{(1 + \tan x)^2}{(1 - \tan x)^2} \\ &= \text{दायाँ पक्ष} \end{aligned}$$

प्रश्न 21. दर्शाइए कि-

$$\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x.$$

हल: हम जानते हैं कि-

$$3x = 2x + x$$

इसलिए  $\tan 3x = \tan(2x + x)$

या  $\tan 3x = \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$

या  $\tan 3x - \tan 2x \tan x = \tan 2x + \tan x$

या  $\tan 3x - \tan 2x - \tan x = \tan 2x \tan x$

या  $\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

प्रश्न 22. सिद्ध कीजिए कि-  $\frac{\cos 7x + \cos 5x}{\sin 7x - \sin 5x} = \cot x.$

हल: सर्वसमिकाओं 20(i) तथा 20(iv) का उपयोग करने पर, हम पाते हैं,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{2 \cos \frac{7x+5x}{2} \cos \frac{7x-5x}{2}}{2 \cos \frac{7x+5x}{2} \sin \frac{7x-5x}{2}}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x = \text{दायाँ पक्ष}$$

प्रश्न 23. सिद्ध कीजिए कि-  $\frac{\cos 9x - \cos 5x}{\sin 17x - \sin 3x} = \frac{\sin 2x}{\cos 10x}$

हल: बायाँ पक्ष =  $\frac{\cos 9x - \cos 5x}{\sin 17x - \sin 3x}$

$$\begin{aligned} &= \frac{-2 \sin \frac{9x+5x}{2} \sin \frac{9x-5x}{2}}{2 \cos \frac{17x+3x}{2} \sin \frac{17x-3x}{2}} \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{aligned} \because \cos C - \cos D &= -2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \\ \sin C - \sin D &= 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{-\sin 7x \sin 2x}{\cos 10x \sin 7x} = -\frac{\sin 2x}{\cos 10x}$$

= दायों पक्ष

$$= \frac{\sin 2x \cos x}{\cos 2x \cos x}$$

= tan 2x = दायों पक्ष

प्रश्न 24. सिद्ध कीजिए कि-  $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \tan 4x$ .

हल: बायों पक्ष =  $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x}$

$$= \frac{2 \sin \frac{5x+3x}{2} \cos \frac{5x-3x}{2}}{2 \cos \frac{5x+3x}{2} \cos \frac{5x-3x}{2}}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \therefore \sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \\ \text{और } \cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \end{array} \right.$$

$$= \frac{\sin 4x \cos x}{\cos 4x \cos x}$$

= tan 4x = दायों पक्ष

प्रश्न 25. सिद्ध कीजिए कि-  $\frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan \frac{x-y}{2}$

हल: बायों पक्ष =  $\frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \frac{2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}}{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}$

$$\left[ \begin{array}{l} \therefore \sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \\ \cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \end{array} \right.$$

$$\frac{-\sin \frac{x-y}{2}}{\cos \frac{x-y}{2}} = \tan \frac{x-y}{2} = \text{दायों पक्ष}$$

प्रश्न 26. सिद्ध कीजिए कि  $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \tan 2x$ .

हल: बायों पक्ष =  $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \frac{2 \sin \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2}}{2 \cos \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2}}$

प्रश्न 27. यदि  $\cos x = -\frac{3}{5}$  हो और x तृतीय चतुर्थांश में स्थित है, तो अन्य पाँच त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए।

हल: क्योंकि  $\cos x = -\frac{3}{5}$ , हम पाते हैं कि  $\sec x = -\frac{5}{3}$

अब  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  या  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

या  $\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

अतः  $\sin x = \pm \frac{4}{5}$

चूँकि x तृतीय चतुर्थांश में है, तो sin x का मान ऋणात्मक होगा। इसलिए

$$\sin x = -\frac{4}{5}$$

इससे यह भी प्राप्त होता है कि

$$\operatorname{cosec} x = -\frac{5}{4}$$

पुनः, हम पाते हैं

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3} \text{ तथा } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{3}{4}$$

प्रश्न 28. यदि  $\cos x = -\frac{1}{2}$  हो और x तृतीय चतुर्थांश में स्थित है, तो अन्य पाँच त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए।

हल: चूँकि  $\cos x = -\frac{1}{2}$ , अतएव  $\sec x = -2$ . अब,

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4}; \therefore \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

चूँकि x तृतीय चतुर्थांश में स्थित है, अतएव sin x ऋणात्मक होगा। इसलिए,

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ जिससे हमें यह भी प्राप्त होता है: } \operatorname{cosec} x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

14 / जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

साथ ही,  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$= \sqrt{3}$ ; अतएव  $\cot x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  उत्तर

Q 20. यदि  $\sin x = \frac{3}{5}$  हो और  $x$  दूसरे चतुर्थांश में स्थित है, तो अन्य पाँच त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए।

हल: चूँकि  $\sin x = \frac{3}{5}$ , अतएव  $\operatorname{cosec} x = \frac{5}{3}$  अब,

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

इसलिए,  $\cos x = \pm \frac{4}{5}$ .

चूँकि  $x$  द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है, अतएव  $\cos x$  ऋणात्मक होगा।

इसलिए,  $\cos x = -\frac{4}{5}$ , जिससे हमें यह भी प्राप्त होता है:

$\sec x = -\frac{5}{4}$ .

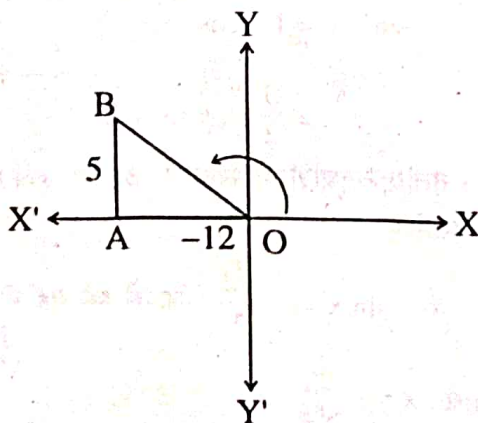
साथ ही,  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{3}{4}$ , अतएव  $\cot x = -\frac{4}{3}$ .

-उत्तर

प्रश्न 30. यदि  $\tan x = -\frac{5}{12}$  हो और  $x$  दूसरे चतुर्थांश में स्थित है, तो अन्य पाँच त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए।

हल:  $\tan x = -\frac{5}{12}$

ΔOAB में,  $\tan x = \frac{AB}{OA}$



यहाँ

∴

∴

AB = 5 इकाई

OA = 12 इकाई

OB = 13

OA = -12 (∵ OX' दिशा में है)

AB = 5 (∵ OY' दिशा में है)

OB = 13

$\sin x = \frac{AB}{OB} = \frac{5}{13}$

$\cos x = \frac{OA}{OB} = \frac{-12}{13} = -\frac{12}{13}$

$\operatorname{cosec} x = \frac{OB}{AB} = \frac{13}{5}$ ,  $\sec x = -\frac{13}{12}$

$\cot x = \frac{OA}{AB} = \frac{-12}{5} = -\frac{12}{5}$

प्रश्न 31. सिद्ध कीजिए कि-

$\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \cos x$ .

हल: सर्वसमिका 20(i) का उपयोग करने पर, हम पाते हैं,

बायाँ पक्ष =  $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

$= 2 \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + x + \frac{\pi}{4} - x}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + x - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{2}\right)$

$= 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos x = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$

$= \sqrt{2} \cos x =$  दायाँ पक्ष

प्रश्न 32. सिद्ध कीजिए कि-

$\frac{\sin 5x - 2 \sin 3x + \sin x}{\cos 5x - \cos x} = \tan x$ .

हल: हम पाते हैं,

बायाँ पक्ष =  $\frac{\sin 5x - 2 \sin 3x + \sin x}{\cos 5x - \cos x}$

$= \frac{\sin 5x + \sin x - 2 \sin 3x}{\cos 5x - \cos x}$

$= \frac{2 \sin 3x \cos 2x - 2 \sin 3x}{-2 \sin 3x \sin 2x}$



$$= -\frac{\sin 3x (\cos 2x - 1)}{\sin 3x \sin 2x}$$

$$= \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x}$$

$$= \tan x = \text{दायाँ पक्ष}$$

प्रश्न 33. सिद्ध कीजिए कि  $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 4 \cos x \cos 2x \sin 4x$ .

हल: बायाँ पक्ष =  $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$

$$= (\sin 7x + \sin x) + (\sin 5x + \sin 3x)$$

$$= 2 \sin \frac{7x+x}{2} \cos \frac{7x-x}{2}$$

$$+ 2 \sin \frac{5x+3x}{2} \cos \frac{5x-3x}{2}$$

$$= 2 \sin 4x \cos 3x + 2 \sin 4x \cos x$$

$$= 2 \sin 4x (\cos 3x + \cos x)$$

$$= 2 \sin 4x \left( 2 \cos \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} \right)$$

$$= 4 \sin 4x \cos 2x \cos x$$

$$= 4 \cos x \cos 2x \sin 4x$$

$$= \text{दायाँ पक्ष}$$

प्रश्न 34. सिद्ध कीजिए कि-

$$\cos 4x = 1 - \sin^2 x \cos^2 x.$$

हल: बायाँ पक्ष =  $\cos 4x$   
हम जानते हैं कि-

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos 2(2x) = 2 \cos^2(2x) - 1$$

$$\cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1$$

$$= 2 (2 \cos^2 x - 1)^2 - 1$$

$$[\because \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1]$$

$$= 2 [(2 \cos^2 x)^2 + (1)^2 - 2 (2 \cos^2 x) \times 1] - 1$$

$$= 2 (4 \cos^4 x + 1 - 4 \cos^2 x) - 1$$

$$= 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 2 - 1$$

$$= 8 \cos^2 x (\cos^2 x - 1) + 1$$

$$= 8 \cos^2 x [-(1 - \cos^2 x)] + 1$$

$$= -8 \cos^2 x [(1 - \cos^2 x)] + 1$$

$$= -8 \cos^2 x \sin^2 x + 1$$

$$[\because \sin^2 x = 1 - \cos^2 x]$$

$$= 1 - 8 \cos^2 x \sin^2 x$$

$$= 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$= \text{दायाँ पक्ष}$$

प्रश्न 35. सिद्ध कीजिए  $\cos 2x \cos \frac{x}{2} - \cos 3x \cos \frac{9x}{2}$

$$= \sin 5x \sin \frac{5x}{2}$$

हल: हम पाते हैं।

बायाँ पक्ष =  $\frac{1}{2} \left[ 2 \cos 2x \cos \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{9x}{2} \cos 3x \right]$

$$= \frac{1}{2} \left[ \cos \left( 2x + \frac{x}{2} \right) + \cos \left( 2x - \frac{x}{2} \right) \right.$$

$$\left. - \cos \left( \frac{9x}{2} + 3x \right) - \cos \left( \frac{9x}{2} - 3x \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{15x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{15x}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ -2 \sin \left\{ \frac{\frac{5x}{2} + \frac{15x}{2}}{2} \right\} \sin \left\{ \frac{\frac{5x}{2} - \frac{15x}{2}}{2} \right\} \right]$$

$$= -\sin 5x \sin \left( -\frac{5x}{2} \right) = \sin 5x \sin \frac{5x}{2} = \text{दायाँ पक्ष} \quad \blacksquare$$

## अध्याय-5 सम्मिश्र संख्याएँ और द्विघातीय समीकरण

### वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए-

(1) यदि  $4x + i(3x-y) = 3 + i(-6)$ , जहाँ  $x$  और  $y$  वास्तविक संख्याएँ हैं, तब  $x$  और  $y$  के मान क्रमशः हैं-

(अ)  $\frac{3}{4}$  और  $\frac{33}{4}$  (ब)  $-\frac{3}{4}$  और  $-\frac{33}{4}$

(स)  $-\frac{3}{4}$  और  $\frac{33}{4}$  (द)  $\frac{3}{4}$  और  $-\frac{33}{4}$

(2)  $i^4$  का मान होगा-

(अ) -1 (ब) 1

(स)  $\sqrt{-1}$  (द) 0

16 / जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

(3)  $3-4i$  का संयुग्मी है-

- (अ)  $-3+4i$  (ब)  $3-4i$   
(स)  $-3-4i$  (द)  $3+4i$

(4)  $2-3i$  का गुणात्मक प्रतिलोम है-

- (अ)  $\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$  (ब)  $-\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$   
(स)  $\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$  (द)  $-\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$

उत्तर- 1.(अ), 2.(ब), 3.(द), 4.(अ)

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

- (1)  $-\sqrt{3} + i$  का मापांक ..... होगा।  
(2)  $i^{4k} = \dots\dots\dots$   
(3)  $i^{4k+1} = \dots\dots\dots$   
(4) सम्मिश्र संख्या  $-2-i$  का संयुग्मी ..... होगा।  
(5)  $-i$  का गुणात्मक प्रतिलोम ..... होगा।

उत्तर- (1) 2, (2) 1, (3)  $i$ , (4)  $-2+i$ , (5)  $i$ ।

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए-

- (1)  $\sqrt{-1} = i$   
(2)  $i^2 = -1$   
(3)  $i^3 = -i$   
(4)  $i^4 = 1$   
(5) दो सम्मिश्र संख्याओं का योगफल एक सम्मिश्र संख्या होती है।

उत्तर- (1) सत्य, (2) सत्य, (3) सत्य, (4) सत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए-

- (1)  $z = -i$  का गुणात्मक प्रतिलोम क्या होगा?  
(2)  $i^{-39}$  को  $a+ib$  के रूप में व्यक्त कीजिए।  
(3)  $z = a+ib$  का संयुग्मी लिखिए।

उत्तर- (1)  $i$ , (2)  $0+i$ , (3)  $a-ib$ ।

प्रश्न 5.  $(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3$  को  $a+ib$  के रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } (-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3 &= 2 \times \frac{1}{8 \times 8 \times 8} \times i^5 \\ &= \frac{1}{256}(i^2)^2 i = \frac{1}{256}i \end{aligned}$$

-उत्तर

प्रश्न 6.  $(-\sqrt{3} + \sqrt{-2})(2\sqrt{3} - i)$  को  $a+ib$  के रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: हमें प्राप्त है } &(-\sqrt{3} + \sqrt{-2})(2\sqrt{3} - i) \\ &= (-\sqrt{3} + \sqrt{-2}i)(2\sqrt{3} - i) \\ &= -6 + \sqrt{3}i + 2\sqrt{6}i - \sqrt{2}i^2 \\ &= (-6 + \sqrt{2}) + \sqrt{3}(1 + 2\sqrt{2})i \end{aligned}$$

-उत्तर

प्रश्न 7.  $\left(\frac{1}{5} + i\frac{2}{5}\right) - \left(4 + i\frac{5}{2}\right)$  को  $a+ib$  के रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } \left(\frac{1}{5} + i\frac{2}{5}\right) - \left(4 + i\frac{5}{2}\right) &= \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i - 4 - \frac{5}{2}i \\ &= \left(-4 + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{5}{2}\right)i = -\frac{19}{5} + \frac{4-25}{10}i \\ &= -\frac{19}{5} - \frac{21}{10}i \end{aligned}$$

उत्तर

प्रश्न 8.  $\frac{(3+i\sqrt{5})(3-i\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+2i)-(\sqrt{3}-i\sqrt{2})}$  को  $a+ib$  के रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } \frac{(3+i\sqrt{5})(3-i\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+2i)-(\sqrt{3}-i\sqrt{2})} \\ &= \frac{9-i^2 \cdot 5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}i-\sqrt{3}+\sqrt{2}i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{9+5}{2\sqrt{2}i} \quad [\because i^2 = -1] \\ &= \frac{14}{2\sqrt{2}i} = \frac{7}{\sqrt{2}i} \times \frac{i}{i} = \frac{7i}{\sqrt{2}i^2} \\ &= -\frac{7i}{\sqrt{2}} = -\frac{7\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

-उत्तर

प्रश्न 9.  $\frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}$  को  $a+ib$  के रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: (i) } \frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} &= \frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} \times \frac{1+\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i} \\ &= \frac{5+5\sqrt{2}i+\sqrt{2}i-2}{1-(\sqrt{2}i)^2} \\ &= \frac{3+6\sqrt{2}i}{1+2} = \frac{3(1+2\sqrt{2}i)}{3} = 1+2\sqrt{2}i \end{aligned}$$

प्रश्न 10.  $\left(\frac{1}{3} + 3i\right)^3$  को  $a + ib$  के रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } \left(\frac{1}{3} + 3i\right)^3 &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 (3i) + 3\left(\frac{1}{3}\right) (3i)^2 + (3i)^3 \\ &= \frac{1}{27} + 9 \times \frac{1}{9}i + 9(-1) + 27i^2 \cdot i \\ &= \frac{1}{27} + i - 9 - 27i \\ &= \left(\frac{1}{27} - 9\right) + (1 - 27)i \\ &= -\frac{242}{27} - 26i \end{aligned}$$

प्रश्न 11.  $\left(-2 - \frac{1}{3}i\right)^3$  को  $a + ib$  के रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } \left(-2 - \frac{1}{3}i\right)^3 &= (-1)^3 \left(2 + \frac{1}{3}i\right)^3 = -\left(2 + \frac{1}{3}i\right)^3 \\ &= -\left[2^3 + 3 \cdot 2^2 \left(\frac{1}{3}i\right) + 3 \cdot 2 \left(\frac{1}{3}i\right)^2 + \left(\frac{1}{3}i\right)^3\right] \\ &= -\left[8 + 3 \cdot 4 \times \frac{1}{3}i + 6 \cdot \frac{i^2}{9} + \frac{1}{27}i^3\right] \\ &= -\left[8 + 4i - \frac{2}{3} + \frac{1}{27}i^2\right] \\ &= \left[\frac{22}{3} - \left(4 - \frac{1}{27}i\right)\right] \\ &= \left[-\frac{22}{3} - \frac{107}{27}i\right] \\ &= -\frac{22}{3} - \frac{107}{27}i \end{aligned}$$

उत्तर

प्रश्न 12.  $(5-3i)^3$  को  $a + ib$  के रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: हमें प्राप्त है, } (5-3i)^3 &= 5^3 - 3 \times 5^2 \times (3i) + 3 \times 5 \\ & (3i)^2 - (3i)^3 \\ &= 125 - 225i - 135 + 27i = -10 - 198i \end{aligned}$$

-उत्तर

प्रश्न 13.  $\left[i^{18} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^3$  का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } \left[i^{18} + \left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^3 &= \left[(i^2)^9 + \frac{1}{(i^2)^{12}i}\right]^3 \\ &= \left[(-1)^9 + \frac{1}{(-1)^{12}i}\right]^3 \\ &= \left[-1 + \frac{1}{i} \times \frac{i}{i}\right]^3 \\ &= [-1 - i]^3 = -(i+i)^3 \\ & \quad [अब (a+b)^3 = [a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3]] \\ &= -(1 + 3i + 3i^2 + i^3) \\ &= -(1 + 3i - 3 + i^2 \cdot i) \\ &= -(-2 + 3i - 1) \\ &= -(-2 + 2i) = 2 - 2i \end{aligned}$$

-उत्तर

प्रश्न 14.  $\left(\frac{1}{1-4i} - \frac{2}{1+i}\right)\left(\frac{3-4i}{5+i}\right)$  को मानक रूप में परिवर्तित कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } \left(\frac{1}{1-4i} - \frac{2}{1+i}\right)\left(\frac{3-4i}{5+i}\right) &= \left(\frac{(1+4i)}{(1+4i)(1-4i)} - \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right) \left[\frac{3-4i}{5+i} \times \frac{5-i}{5-i}\right] \\ &= \left(\frac{1+4i}{1+16} - \frac{2(1-i)}{1+1}\right) \left[\frac{15+4i^2-3i-20i}{25+1}\right] \\ &= \left(\frac{1}{17} - 1 + \left(\frac{4}{17} + 1\right)i\right) \left[\frac{11}{26} + \frac{23}{26}i\right] \\ &= \left[-\frac{16}{17} + \frac{21}{17}i\right] \left[\frac{11}{26} - \frac{23}{26}i\right] \\ &= \left[-\frac{16}{17} \times \frac{11}{26} - \frac{21}{17} \times \frac{23}{26}i^2 + \frac{16}{17} \times \frac{23}{26}i + \frac{21}{17} \times \frac{11}{26}i\right] \end{aligned}$$

$$= \left[-\frac{176}{442} + \frac{483}{442} + \left(\frac{368}{442} + \frac{231}{442}\right)i\right]$$

$$= \frac{307}{442} + \frac{599}{442}i$$

18 / जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

प्रश्न 15.  $2-3i$  का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल: मान लिया  $z = 2 - 3i$

तब  $\bar{z} = 2 + 3i$  और  $|z|^2 = 2^2 + (-3)^2 = 13$

इसलिए,  $2-3i$  का गुणात्मक प्रतिलोम

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i \text{ प्राप्त होता है।}$$

ऊपर दिया गया सारा हल निम्नलिखित ढंग से भी दिखाया जा सकता है:

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{2^2-(3i)^2} \\ &= \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i \end{aligned} \quad \text{-उत्तर}$$

प्रश्न 16.  $\sqrt{5} + 3i$  का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल:  $\sqrt{5} + 3i$  का गुणात्मक प्रतिलोम

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{5}+3i} = \frac{1}{\sqrt{5}+3i} \times \frac{\sqrt{5}-3i}{\sqrt{5}-3i} \\ &= \frac{\sqrt{5}-3i}{5-9i^2} = \frac{\sqrt{5}-3i}{5-9} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{14} - \frac{3}{14}i \end{aligned}$$

प्रश्न 17.  $z = 4 - 3i$  का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल:  $-i$  का गुणात्मक प्रतिलोम  $= \frac{1}{4-3i}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4-3i} \times \frac{4+3i}{4+3i} \\ &= \frac{4+3i}{16-9i^2} = \frac{4+3i}{16+9} \quad (\because i^2 = -1) \\ &= \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i \end{aligned} \quad \text{-उत्तर}$$

प्रश्न 18.  $-i$  का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल:  $-i$  का गुणात्मक प्रतिलोम  $= \frac{1}{-i}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{-i} \times \frac{+i}{+i} = \frac{i}{-i^2} = \frac{i}{-(-1)} \\ &= i = \boxed{0+i} \end{aligned}$$

प्रश्न 19. सम्मिश्र संख्या  $\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}$  का मापांक ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } \frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} &= \frac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{(1+i^2+2i) - (1+i^2-2i)}{1-i^2} \\ &= \frac{(1-1+2i) - (1-1-2i)}{1+1} \\ &= \frac{4i}{2} = 2i \end{aligned}$$

$$\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} = |2i| = \sqrt{4} = 2. \quad \text{-उत्तर}$$

प्रश्न 20. समीकरण  $x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$  को हल कीजिए।

हल- दिया है:  $x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ .

दोनों पक्षों में  $\sqrt{2}$  से गुणा करने पर,

$$\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0.$$

इसकी  $ax^2 - bx - c = 0$  से तुलना करने पर

$$a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}, c = 1$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}\sqrt{1-2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(-1 \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1})}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

उत्तर

प्रश्न 21. समीकरण  $x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$  को हल कीजिए।

-उत्तर

हल: दिया है,  $x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$

दोनों पक्षों में  $\sqrt{2}$  से गुणा करने पर,

$$\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$$

इसकी  $ax^2 + bx + c = 0$  से तुलना करने पर,

$$a = \sqrt{2}, b = 1, c = \sqrt{2}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2\sqrt{2}}$$

-उत्तर

प्रश्न 22. समीकरण  $3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$  को हल कीजिए।

हल:  $3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$  को 3 से गुणा करने पर,

$$9x^2 - 12x + 20 = 0$$

इसकी  $ax^2 - bx - c = 0$  से तुलना करने पर

$$a = 9, b = -12, c = 20$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 9 \cdot 20}}{2 \times 9}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 720}}{18}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{-576}}{18} = \frac{12 \pm 24i}{18}$$

$$= \frac{2 \pm 4i}{3} = \frac{2}{3} \pm \frac{4}{3}i$$

-उत्तर

प्रश्न 23. समीकरण  $x^2 - 2x + \frac{x}{2} = 0$  को हल कीजिए।

उत्तर-  $x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$

$x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$  इसे 2 से गुणा करने पर

$$2x^2 - 4x + 3 = 0$$

$ax^2 + bx + c = 0$  से तुलना करने पर

$$a = 2, b = -4, c = 3$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{4}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}i}{4}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

-उत्तर

प्रश्न 24. समीकरण  $27x^2 - 10x + 1 = 0$  को हल कीजिए।

हल: दिए गए समीकरण  $27x^2 - 10x + 1 = 0$  की  $ax^2 - bx - c = 0$  से तुलना करने पर  $a = 27, b = -10, c = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-10) \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 27 \cdot 1}}{2 \cdot 27}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 108}}{54}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{-8}}{54} = \frac{10 \pm 2\sqrt{2}i}{54}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{2}i}{27} = \frac{5}{27} \pm \frac{\sqrt{2}}{27}i$$

-उत्तर

प्रश्न 25. समीकरण  $21x^2 - 28x + 10 = 0$  को हल कीजिए।

उत्तर-  $21x^2 - 28x - 10 = 0$  की  $bx^2 - bx - c = 0$  से तुलना करने पर

$$a = 21, b = -28, c = 10$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-28) \pm \sqrt{(-28)^2 - 4 \cdot 21 \cdot 10}}{2 \cdot 21}$$

$$= \frac{28 \pm \sqrt{784 - 840}}{42} = \frac{28 \pm \sqrt{-56}}{42}$$

$$= \frac{28 \pm 2\sqrt{14}i}{42} = \frac{14 \pm \sqrt{14}i}{21}$$

$$= \frac{14}{21} \pm \frac{\sqrt{14}}{21}i$$

$$= \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{14}}{21}i$$

-उत्तर

प्रश्न 26. समीकरण  $x^2 + x + 1 = 0$  को हल कीजिए।

हल: यहाँ  $b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$

इसलिए, इसके हल  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$  हैं -उत्तर

प्रश्न 27. समीकरण  $2x^2 + x + 1 = 0$  को हल कीजिए।

हल: दिया गया है:  $2x^2 + x + 1 = 0$ ,

समीकरण  $ax^2 + bx + c = 0$  से तुलना करने पर,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{4}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{4}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{4}$$

-उत्तर

प्रश्न 28. समीकरण  $x^2 + 3x + 9 = 0$  को हल कीजिए।

हल: दिए गए समीकरण  $x^2 + 3x + 9 = 0$  की  $ax^2 + bx + c = 0$  से तुलना करने पर,  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $c = 9$ .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 36}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

-उत्तर

प्रश्न 29. समीकरण  $-x^2 + x - 2 = 0$  को हल कीजिए।

हल: दिया गया है :

$$-x^2 + x - 2 = 0,$$

-1 से दोनों पक्षों में गुणा करने पर

$$x^2x + 2 = 0$$

इसकी  $ax^2 + bx + c = 0$  से तुलना करने पर,

$$a = 1, b = -1, c = 2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

-उत्तर

प्रश्न 30. समीकरण  $\sqrt{5}x^2 + x + \sqrt{5} = 0$  को हल कीजिए।

हल: यहाँ समीकरण का विविक्तकर  $1^2 - 4 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 1 - 20 = -19$  है।

इसलिए हल  $\frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2\sqrt{5}} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}i}{2\sqrt{5}}$  है।

प्रश्न 31. समीकरण  $x^2 + 3x + 5 = 0$  को हल कीजिए।

हल:  $x^2 + 3x + 5 = 0$

यहाँ  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $c = 5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 20}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{11}i}{2}$$

-उत्तर

प्रश्न 32. समीकरण  $x^2 - x + 2 = 0$  को हल कीजिए।

हल: दिया है:

$$x^2x + 2 = 0$$

इसकी  $ax^2 + bx + c = 0$  से तुलना करने पर,

$$\therefore a = 1, b = -1, c = 2$$

$$a = 1, b = -1, c = 2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

-उत्तर

प्रश्न 33. समीकरण  $\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$  को हल कीजिए।

हल: दिया है:

$$\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$$

इसकी  $ax^2 + bx + c = 0$  से तुलना करने पर

$$a = \sqrt{2}, b = 1, c = \sqrt{2}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}}{2 \cdot \sqrt{2}}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2\sqrt{2}}$$

-उत्तर

प्रश्न 34. समीकरण  $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$  को हल कीजिए।

$$\text{हल: दिया है: } \sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$$

इसकी  $ax^2 - bx + c = 0$  से तुलना करने पर

$$a = \sqrt{3}, b = -\sqrt{2}, c = 3\sqrt{3}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 36}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{-34}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{34}i}{2\sqrt{3}}$$

प्रश्न 35. समीकरण  $\frac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$  का संयुग्मी ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: यहाँ } \frac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)} = \frac{6+9i-4i+6}{2-i+4i+2}$$

$$= \frac{12+5i}{4+3i} \times \frac{4-3i}{4-3i}$$

$$= \frac{48-36i+20i+15}{16+9}$$

$$= \frac{63-16i}{25} = \frac{63}{25} - \frac{16}{25}i$$

इसलिए  $\frac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$  का संयुग्मी,  $\frac{63}{25} + \frac{16}{25}i$  है।

प्रश्न 36. समीकरण  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$  में  $m$  का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: } \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}$$

$$= \frac{1+i^2+2i}{1+1}$$

$$= \frac{1-1+2i}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

$$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = i^m = (i^4)^{\frac{m}{4}} = 1$$

$$[\because i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1]$$

$\Rightarrow m$  संख्या 4 का गुणज है।

$\therefore m$  की कम से कम मूल्य = 4

उत्तर

प्रश्न 37. यदि  $x + iy = \frac{a + ib}{a - ib}$  है तो, सिद्ध कीजिए कि  $x^2 + y^2 = 1$ .

हल: हमें ज्ञात है,  $x + iy = \frac{(a + ib)(a + ib)}{(a - ib)(a - ib)}$

$$= \frac{a^2 - b^2 + 2abi}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2}i$$

इसलिए,  $x - iy = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \frac{2ab}{a^2 + b^2}i$

इस प्रकार  $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$

$$= \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2} = 1$$

सिद्ध हुआ।

प्रश्न 38. यदि  $\alpha$  और  $\beta$  भिन्न सम्मिश्र संख्याएँ हैं, जहाँ  $|\beta|$

$= 1$ . तब  $\left| \frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right|$  का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-  $\left| \frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right|^2 = \left( \frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right) \left( \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{1 - \alpha\bar{\beta}} \right)$

$$= \frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta} \times \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{1 - \alpha\bar{\beta}}$$

$$= \frac{\beta\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + \alpha\bar{\alpha}}{1 - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta}}$$

$$= \frac{|\beta|^2 - \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} + |\alpha|^2}{1 - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + |\alpha|^2|\beta|^2}$$

दिया है:  $|\beta| = 1$  हो, तब

$$= \frac{1 + |\alpha|^2 - \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}}{1 - |\alpha|^2 - \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta}}$$

$$= 1$$

अतः  $\left| \frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right|^2 = 1$  या  $\left| \frac{\beta - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\beta} \right| = 1$

-उत्तर ■

**वस्तुनिष्ठ प्रश्नोत्तर**

प्रश्न 1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

(1)  $x$  के उन मानों को जो दिए गए असमिका को एक सत्य कथन बनाते हैं, उन्हें असमिका का ..... कहते हैं।

(2)  $ax + by < c$  एक रैखिक ..... है।

उत्तर- (1) हल, (2) असमिका।

प्रश्न 2. सत्य/असत्य लिखिए-

(1) असमिकाओं के निकाय का हल क्षेत्र, वह उभयनिष्ठ क्षेत्र है जो निकाय में सभी दी गई असमिकाओं को सन्तुष्ट करता है।

(2)  $ax + by \leq c$  एक रैखिक असमिका है।

(3)  $ax + by \leq c$  एक सुनिश्चित असमिका है।

उत्तर- (1) सत्य, (2) सत्य, (3) सत्य।

प्रश्न 3. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए-

(1)  $x \geq 0$  तथा  $y \geq 0$  का हल किस चतुर्थांश में स्थित होगा?

(2) असमिका के हल क्षेत्र को परिभाषित कीजिए।

उत्तर- (1) प्रथम, (2) वह क्षेत्र जिसमें किसी असमिका के सम्पूर्ण हल स्थित हों, उसे असमिका का हल क्षेत्र कहते हैं।

प्रश्न 4.  $30x < 200$  का हल ज्ञात कीजिए जब

(i)  $x$  एक प्राकृत संख्या है। (ii)  $x$  एक पूर्णांक है।

हल: ज्ञात है कि  $30x < 200$

अथवा  $\frac{30x}{30} < \frac{200}{30}$  (नियम 2)

अथवा  $x < \frac{20}{3}$

(i) जब  $x$  एक प्राकृत संख्या है।

स्पष्टतः इस स्थिति में  $x$  के निम्नलिखित मान कथन को सत्य करते हैं।

$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

असमिका का हल समुच्चय  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  है।

(ii) जब  $x$  एक पूर्णांक है

स्पष्टतः इस स्थिति में दिए गए असमिका के हल है:

$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

असमिका का हल समुच्चय  $\{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  है।

प्रश्न 5. हल कीजिए:  $5x - 3 < 3x + 1$ , जब

(i)  $x$  एक पूर्णांक है। (ii)  $x$  एक वास्तविक संख्या है।

हल: दिया है, कि  $5x - 3 < 3x + 1$

अथवा  $5x - 3 + 3 < 3x + 1 + 3$  (नियम 1)



अथवा  $5x < 3x + 4$

अथवा  $5x - 3x < 3x + 4 - 3x$  (नियम 1)

अथवा  $2x < 4$

अथवा  $x < 2$  (नियम 2)

(i) जब  $x$  एक पूर्णांक है। इस स्थिति में दिए गए असमिका के हल

$\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1$

अतः हल समुच्चय  $\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$

(ii) जब  $x$  एक वास्तविक संख्या है। इस स्थिति में असमिका का हल  $x < 2$  से व्यक्त है। इसका अर्थ है कि 2 से छोटी समस्त वास्तविक संख्याएँ असमिका के हल हैं। अतः असमिका का हल समुच्चय  $(-\infty, 2)$  है।

प्रश्न 6. हल कीजिए-  $12x > 30$ , जब

(i)  $x$  एक प्राकृत संख्या है। (ii)  $x$  एक पूर्णांक है।

हल: ज्ञात है,  $-12x > 30$

$\Rightarrow -x > \frac{30}{12}$

$\Rightarrow -x > \frac{10}{4}$

$\Rightarrow -x > \frac{5}{2}$

$\Rightarrow x < -5/2$

$\Rightarrow x < -2.5$

(i) जब  $x$  एक प्राकृत संख्या है तब इस स्थिति में असमिका का कोई हल नहीं है।

(ii) जब  $x$  एक पूर्णांक है,

स्पष्टतः इस स्थिति में दिए गए असमिका के हल है-

$\dots, 5, -4, -3$

असमिका का हल समुच्चय  $\{\dots, 5, -4, -3\}$

प्रश्न 7. हल कीजिए-  $3x + 8 > 2$ , जब

(i)  $x$  एक पूर्णांक है। (ii)  $x$  एक वास्तविक संख्या है।

हल: दिया है,  $3x + 8 > 2$

या  $3x > 2-8$

या  $3x > -6$

या  $x > -6/3$

या  $x > -2$

(i) जब  $x$  एक पूर्णांक है, तब असमिका के हल

$-1, 0, 1, 2, 3, \dots$

अतः हल समुच्चय  $\{-1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

(ii) जब  $x$  एक वास्तविक संख्या है, तब असमिका का हल  $x > -2$  से व्यक्त है अर्थात्  $-2$  से बड़ी समस्त वास्तविक संख्याएँ, दिए गए असमिका के हल हैं।

अतः हल समुच्चय  $(-2, \infty)$  है।

प्रश्न 8. हल कीजिए-  $4x + 3 < 6x + 7$ .

हल: ज्ञात है कि  $4x + 3 < 6x + 7$

या  $4x - 6x < 6x + 4 - 6x$

या  $-2x < 4$  या  $x > -2$

अर्थात्  $-2$  से बड़ी समस्त वास्तविक संख्याएँ, दिए गए असमिका के हल हैं। अतः हल समुच्चय  $(-2, \infty)$  है।

प्रश्न 9. हल कीजिए  $-8 \leq 5x - 3 < 7$ .

हल: इस स्थिति में हमारे पास दो असमिकाएँ  $-8 \leq 5x - 3$  और  $5x - 3 < 7$  हैं। इन्हें हम साथ-साथ हल करना चाहते हैं। हम दिए गए असमिका के मध्य में चर राशि  $x$  का गुणांक एक बनाना चाहते हैं।

हमें ज्ञात है कि  $-8 \leq 5x - 3 < 7$

या  $-5 \leq 5x < 10$  या  $-1 \leq x < 2$

प्रश्न 10. हल कीजिए-  $\frac{5-2x}{3} \leq \frac{x}{6} - 5$ .

हल: हमें ज्ञात है कि  $\frac{5-2x}{3} \leq \frac{x}{6} - 5$

या  $2(5-2x) \leq x - 30$

या  $10-4x \leq x-30$

या  $-5x \leq -40$

या  $x \geq 8$

अर्थात् ऐसी समस्त वास्तविक संख्याएँ जो 8 से बड़ी या बराबर हैं। अतः इस असमिका के हल  $x \in (8, \infty)$ ,

प्रश्न 11. वास्तविक संख्या  $x$  के लिए हल कीजिए-

$\frac{x}{4} < \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$

हल: दी हुई असमिका  $\frac{x}{4} < \frac{5x-2}{3} - \frac{7x-3}{5}$

60 से दोनों पक्षों में गुणा करने पर,

$15x < 20(5x-2) - 12(7x-3)$

या  $15x < 100x - 40 - 84x + 36$

या  $15x < 16x - 4$

$16x$  को बायीं ओर लाने पर,

$15x - 16x < -4$

या  $-x < -4$



# Students Unity

public channel



## Description

Contact   @Avengers18\_bot

Instagram <https://instagram.com/amarwah450>

Discussion group <https://t.me/unitydiscussion>

Join our PDF Channel <https://t.me/amarwah455>

For the sponsorship contact :-  
[@Avengers18\\_bot](#)

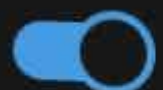
[t.me/amarwah450](https://t.me/amarwah450)

Invite Link



## Notifications

On



## 24 / जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

या  $x < 4$

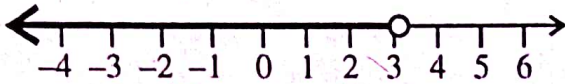
∴ हल है,  $x \in (4, \infty)$

प्रश्न 12. हल कीजिए  $7x + 3 < 5x + 9$  तथा इस हल को संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए।

हल: हमें ज्ञात है  $7x + 3 < 5x + 9$

या  $2x < 6$  या  $x < 3$

संख्या रेखा पर इन्हें हम निम्नलिखित प्रकार से प्रदर्शित कर सकते हैं (आकृति में)।



प्रश्न 13. हल कीजिए  $\frac{3x-4}{2} \geq \frac{x+1}{4} - 1$  तथा इस हल को संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए।

हल:  $\frac{3x-4}{2} \geq \frac{x+1}{4} - 1$

या  $\frac{3x-4}{2} \geq \frac{x-3}{4}$

या  $2(3x-4) \geq (x-3)$

या  $6x-8 \geq x-3$

या  $5x \geq 5$  or  $x \geq 1$

संख्या रेखा पर इन्हें हम निम्नलिखित प्रकार से प्रदर्शित कर सकते हैं (आकृति में):



प्रश्न 14. कक्षा XI के प्रथम सत्र व द्वितीय सत्र की परीक्षाओं में एक छात्र के प्राप्तांक 62 और 48 हैं। वह न्यूनतम अंक ज्ञात कीजिए, जिसे वार्षिक परीक्षा में पाकर वह छात्र 60 अंक का न्यूनतम औसत प्राप्त कर सके।

हल: मान लीजिए कि छात्र वार्षिक परीक्षा में  $x$  अंक प्राप्त करता है।

तब  $\frac{62+48+x}{3} \geq 60$

या  $110+x \geq 180$  या  $x > 70$

प्रश्न 15. रवि ने पहली दो एकक परीक्षा में 70 और 75 अंक प्राप्त किए हैं। वह न्यूनतम अंक ज्ञात कीजिए जिसे वह तीसरी एकक परीक्षा में पाकर 60 अंक का न्यूनतम औसत प्राप्त कर सके।

हल: मान लीजिए तीसरे एकक परीक्षा में  $x$  अंक प्राप्त किए।

रवि द्वारा प्राप्त अंकों का औसत =  $\frac{70+75+x}{3}$

प्रश्नानुसार,

∴  $\frac{70+75+x}{3} \geq 60$

या  $\frac{145+x}{3} \geq 60$

3 से दोनों पक्षों में गुणा करने पर

$145-x \geq 180$

या  $x \geq 180-145$

या  $x \geq 35$

अतः रवि को तीसरी परीक्षा में 35 से अधिक या बराबर अंक प्राप्त करने हैं।

प्रश्न 16. किसी पाठ्यक्रम में ग्रेड 'A' पाने के लिए एक व्यक्ति को सभी पाँच परीक्षाओं (प्रत्येक 100 में से) में 90 अंक या अधिक अंक का औसत प्राप्त करना चाहिए। यदि सुनीता के प्रथम चार परीक्षाओं के प्राप्तांक 87, 92, 94 और 95 हों तो वह न्यूनतम अंक ज्ञात कीजिए जिसे पाँचवी परीक्षा में प्राप्त करके सुनीता उस पाठ्यक्रम में ग्रेड 'A' पाएगी।

हल: मान लो सुनीता ने पाँचवी कक्षा में  $x$  अंक प्राप्त किए।

पाँच परीक्षाओं के प्राप्त अंकों का औसत =  $\frac{87+92+94+95}{5}$

=  $\frac{368+x}{5}$

प्रश्नानुसार,

$\frac{368+x}{5} \geq 90$

5 से दोनों पक्षों में गुणा करने पर,

$368+x \geq 5 \times 90$

⇒  $368+x \geq 450$

⇒  $x \geq 450-368$

∴  $x \geq 82$

अतः सुनीता को पाँचवी परीक्षा में 82 से अधिक या उसके बराबर अंक प्राप्त करने चाहिए।

प्रश्न 17. क्रमागत विषम संख्याओं के ऐसे युग्म ज्ञात कीजिए, जिनमें दोनों संख्याएँ 10 से बड़ी हों, और उनका योगफल 40 से कम हो।

हल: मान लो कि दो क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं में छोटी विषम संख्या  $x$  है। इस प्रकार दूसरी विषम संख्या  $x+2$  है। प्रश्नानुसार,

$$x > 10 \quad \dots(1)$$

$$\text{तथा } x(x+2) < 40 \quad \dots(2)$$

समी. (2) को हल करने पर हम पाते हैं कि

$$2x + 2 < 40$$

$$\text{या } x < 19 \quad \dots(3)$$

(1) और (3) से निष्कर्ष यह है कि

$$10 < x < 19$$

इस प्रकार विषम संख्या  $x$  के अभीष्ट मान 10 और 19 के बीच है। इसलिए सभी संभव अभीष्ट जोड़े,

(11,13), (13,15), (15,17), (17,19) होंगे।

प्रश्न 18. एक विलयन को  $68^\circ\text{F}$  और  $77^\circ\text{F}$  के मध्य रखना है। सेल्सियस पैमाने पर विलयन के तापमान का परिसर ज्ञात कीजिए, जहाँ सेल्सियस फारेनहाइट परिवर्तन

$$\text{सूत्र } F = \frac{9}{5}C + 32 \text{ है।}$$

$$\text{हल: दिया है : } F = \frac{9}{5}C + 32$$

$$\text{और } 68^\circ < F < 77^\circ$$

$$\Rightarrow 68^\circ < \frac{9}{5}C + 32^\circ < 77^\circ$$

$$32 \text{ घटाने पर, } 68^\circ - 32^\circ < \frac{9}{5}C < 77^\circ - 32^\circ$$

$$36^\circ < \frac{9}{5}C < 45^\circ$$

$\frac{5}{9}$  से गुणा करने पर

$$20^\circ < C < 25^\circ$$

$\therefore C$  का परिसर अंतराल  $(20^\circ, 25^\circ)$

प्रश्न 19. एक व्यक्ति के बौद्धिक-लब्धि (IQ) मापन सूत्र

$$\text{निम्नलिखित } IQ = \frac{MA}{CA} \times 100, \text{ जहाँ } MA \text{ मानसिक आयु}$$

और  $CA$  कालानुक्रमी आयु है। यदि 12 वर्ष की आयु के बच्चों के एक समूह की  $IQ$ , असमिका  $80 \leq IQ \leq 140$  द्वारा व्यक्त हो, तो उस समूह के बच्चों की मानसिक आयु का परिसर ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: } IQ = \frac{MA}{CA} \times 100$$

$$\text{दिया है कि } 80 \leq IQ \leq 140$$

$$\therefore 80 \leq \frac{MA}{CA} \times 100 \leq 140$$

परन्तु  $CA = 12$  वर्ष

$$\Rightarrow 80 \leq \frac{MA}{12} \times 100 \leq 140$$

$\frac{3}{5}$  से गुणा करने पर

$$48 \leq MA \times 5 \leq 84$$

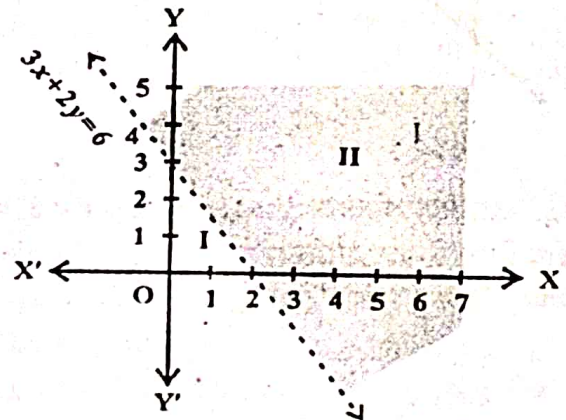
5 से भाग देने पर

$$9.6 \leq MA \leq 16.8$$

अतः मानसिक आयु कम से कम 9.6 वर्ष है और अधिक से अधिक 16.8 वर्ष है।

प्रश्न 20.  $3x + 2y > 6$  को आलेखीय विधि से हल कीजिए।

हल: सर्वप्रथम हम समीकरण  $3x + 2y = 6$  का ग्राफ खंडित रेखा के रूप में खींचते हैं (आकृति में)। यह रेखा  $xy$ -तल को दो



अर्ध-तल I तथा II में विभाजित करती है हम एक बिंदु (जो रेखा पर स्थित नहीं है) जैसे  $(0,0)$  का चयन करते हैं जो अर्ध-तल I में स्थित है (आकृति में)। अब जाँच करते हैं कि यह बिंदु दी गई असमिका को संतुष्ट करता है अथवा नहीं।

$$\text{हम पाते हैं कि } 3(0) + 2(0) > 6$$

$$\text{या } 0 > 6, \text{ जो असत्य है।}$$

अतः अर्ध-तल I, दिए हुए असमिका का हल-क्षेत्र

नहीं है। स्पष्टतः रेखा पर स्थित कोई भी बिंदु, दी गई

असमिका को संतुष्ट नहीं करता है। दूसरे शब्दों में, छायांकित

अर्ध-तल II, रेखा के बिंदुओं को छोड़कर, दी गई असमिका

का हल क्षेत्र है।

प्रश्न 21.  $y + 8 \geq 2x$  को आलेखीय विधि से हल कीजिए।

## 26 / जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

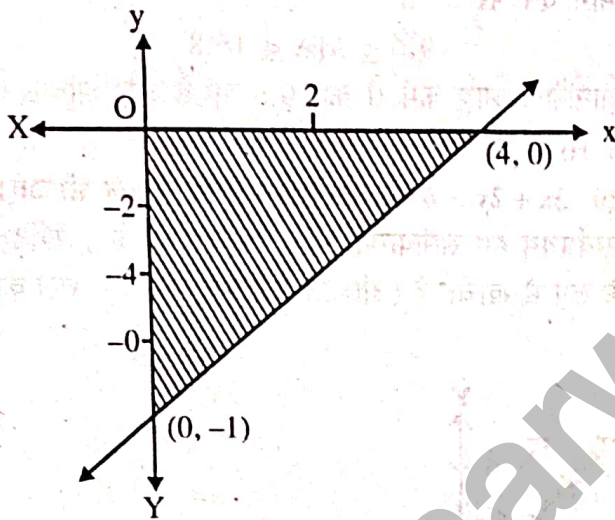
हल: दी हुई रैखिक असमिका  $y + 8 \geq 2x$  सरल रेखा  $2x - y = 8$  बिन्दु  $(4, 0)$  और  $(0, -8)$  से होकर जाती है। असमिका

$$y + 8 \geq 2x$$

$x = 0, y = 0$  रखने पर

$$0 - 8 \geq 0 \text{ अर्थात् } 8 \geq 0 \text{ जो सत्य है।}$$

$\therefore$  मूल बिन्दु  $y - 8 \geq 2x$  के क्षेत्र में आता है। इसका आलेख साथ दी हुई आकृति में बनाया गया है।



प्रश्न 22. असमिका निकाय  $x + y \geq 5, x - y \leq 3$  को आलेखीय विधि से हल कीजिए।

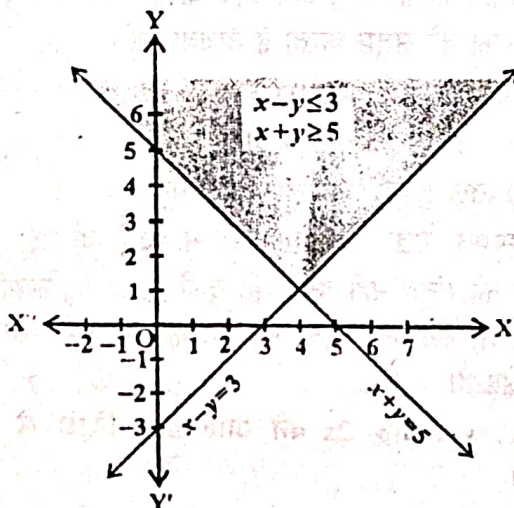
हल: निम्नलिखित असमिका निकाय

$$x + y \geq 5 \quad \dots(1)$$

$$x - y \leq 3 \quad \dots(2)$$

को आलेखीय विधि से हल कीजिए :

हल रैखिक असमिका  $x + y = 5$  का आलेख आकृति  $x$  में खींचा गया है।



हम देखते हैं कि असमिका (1) का हल, रेखा  $x + y = 5$  के ऊपरी छायांकित क्षेत्र द्वारा निरूपित होता है जिसमें रेखा पर स्थित सभी बिंदु भी सम्मिलित हैं।

उन्हीं निर्देशांकों पर हम समीकरण का भी आलेख खींचते हैं जैसा कि (आकृति) में दिखाया गया है। तब असमिका (2) का हल रेखा  $x - y = 3$  के ऊपरी छायांकित क्षेत्र द्वारा निरूपित होता है, जिसमें रेखा पर सभी बिंदु भी सम्मिलित हैं।

स्पष्टतः द्विछायांकित क्षेत्र जो उपर्युक्त दोनों छायांकित क्षेत्रों में उभयनिष्ठ हैं, वही दिए हुए असमिका निकाय (1) व (2) का वांछित हल क्षेत्र है।

प्रश्न 23. निम्नलिखित असमिका निकाय-

$$5x + 4y \leq 40 \quad \dots(1)$$

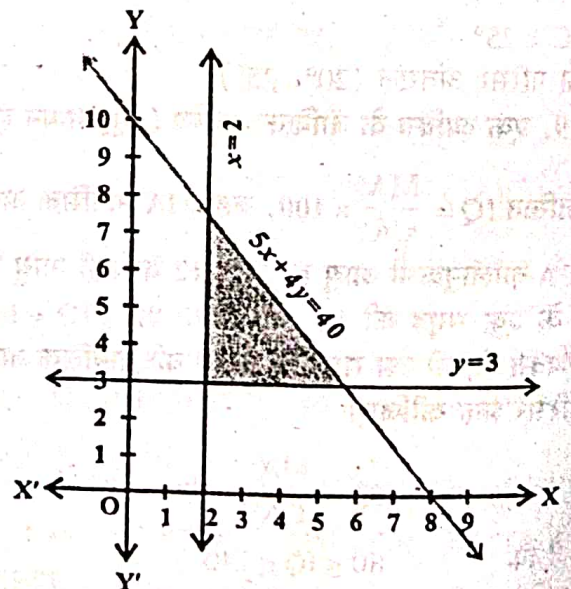
$$x \geq 2 \quad \dots(2)$$

$$y \geq 3 \quad \dots(3)$$

को आलेखीय विधि से हल कीजिए।

हल: सर्वप्रथम हम समीकरणों  $5x + 4y = 40, x = 2$  और  $y = 3$  निरूपित रेखाओं के आलेख खींचते हैं।

तब हम देखते हैं कि असमिका (1), रेखा  $5x + 4y = 40$  के नीचे छायांकित क्षेत्र को निरूपित करता है जिसमें रेखा के सभी बिंदु भी सम्मिलित हैं असमिका (2), रेखा  $x = 2$  के दाहिनी ओर का छायांकित क्षेत्र और असमिका (3), रेखा  $y = 3$  के ऊपरी छायांकित क्षेत्र जिसमें इन रेखाओं के सभी बिंदु भी सम्मिलित हैं, को निरूपित करता है। अतः सर्वनिष्ठ छायांकित क्षेत्र और रेखाओं पर सभी बिंदु (आकृति) दिए हुए रैखिक असमिका निकाय के हल हैं।



बहुत सी व्यावहारिक स्थितियों में जो असमिका निकाय से युक्त है, हर राशियाँ  $x$  और  $y$  प्रायः ऐसी राशियाँ होती हैं, जो शून्यात्मक नहीं हो सकती हैं। उदाहरणतः उत्पादित इकाइयों की संख्या, क्रय की गई वस्तुओं की संख्या, काम करने में लगे घंटों की संख्या आदि। स्पष्टतः ऐसी परिस्थिति में  $x \geq 0$  और  $y \geq 0$  हल क्षेत्र प्रथम चतुर्थांश में ही होता है।

अब हम कुछ ऐसे असमिका निकाय पर विचार करते हैं, जिनमें  $x \geq 0, y \geq 0$  है।

## अध्याय-7

## क्रमचय एवं संचय

### वस्तुनिष्ठ प्रश्नोत्तर

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिये-

(1)  ${}^{12}P_2$  का मान होगा-

(अ) 132 (ब) 1320 (स) 12 (द) 11880

(2)  ${}^nP_0$  का मान होगा-

(अ) 0 (ब) 1 (स) 2 (द)  $n$

(3)  ${}^nP_n$  का मान होगा-

(अ) 0 (ब) 1 (स) 2 (द)  $n!$

(4)  $0!$  का मान होगा:

(अ) 0 (ब) -1 (स) 2 (द)  $n$

(5)  ${}^nC_0$  का मान होगा-

(अ) 0 (ब) 1 (स) 2 (द)  $n$

(6)  ${}^nC_n$  का मान होगा-

(अ) 0 (ब) 1 (स) 2 (द)  $n$

उत्तर-(1)-(अ), (2)-(ब), 3.(द), 4.(ब), 5.(ब), 6.(ब)।

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

(1) यदि  ${}^nC_{12} = {}^nC_n$  तो  $n = \dots\dots\dots$

(2)  $0! = \dots\dots\dots$

(3)  $\frac{7!}{5!} = \dots\dots\dots$

उत्तर-(1) 20, (2) 1, (3) 42.

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए-

(1)  $0!$  का मान 0 होता है।

(2)  ${}^5C_2$  का मान 20 होता है।

उत्तर-(1) असत्य, (2) असत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए:

(1)  $5!$  का मान लिखिए।

(2)  $7!$  का मान लिखिए।

(3)  ${}^5C_2$  का मान लिखिए।

(4)  ${}^5C_2$  का मान लिखिए।

(5)  ${}^9P_3$  का मान लिखिए।

उत्तर-(1)  $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

(2)  $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

(3)  $4! - 3! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 - 3 \times 2 \times 1 = 18$

(4)  ${}^5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

(5)  ${}^9P_3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$

प्रश्न 5. सही जोड़ी मिलाइए:

स्तम्भ-(अ)

स्तम्भ-(ब)

(1)  $5!$

(अ)  $n \cdot (n-1)!$

(2)  ${}^5C_2$

(ब) 1

(3)  ${}^nP_0$

(स) 18

(4)  $4! - 3!$

(द) 10

(5)  $n!$

(इ) 120

उत्तर-(1) (इ), (2) (द), (3) (ब), (4) (स), (5) (अ)।

प्रश्न 6. शब्द ROSE के अक्षरों से बनने वाले 4 अक्षरों वाले, अर्थपूर्ण या अर्थहीन, शब्दों की संख्या ज्ञात कीजिए, जबकि अक्षरों की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है।

हल: रचित शब्दों की संख्या, 4 रिक्त स्थानों  $\square\square\square\square$

को 4 अक्षरों से उत्तरोत्तर भरने के तरीकों की संख्या के बराबर है, जबकि इस बात का ध्यान रखा जाए कि पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है। पहले स्थान को, 4 अक्षर R, O, S, और E में से किसी एक द्वारा 4 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता है। इसके बाद, दूसरे स्थान को शेष तीन अक्षरों में से किसी एक द्वारा 3 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता है इसके उपरांत तीसरे स्थान को 2 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता है और अंत में चौथे स्थान को केवल 1 तरीके से भरा जा सकता है इस प्रकार गुणन सिद्धांत द्वारा चारों स्थानों को भरने के तरीकों की संख्या  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$  है। अतः शब्दों की अभीष्ट संख्या 24 है।

प्रश्न 7. EQUATION शब्द के अक्षरों में से प्रत्येक को तथ्यतः केवल एक बार उपयोग करके कितने अर्थपूर्ण या अर्थहीन, शब्द बन सकते हैं?

हल: शब्द EQUATION में कुल 8 अक्षर हैं। इन अक्षरों से बनाने वाले शब्दों (जो अर्थपूर्ण या अर्थहीन हैं) की संख्या  $= \frac{8!}{(8-8)!} = 8!$

$= 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 40320$ .

प्रश्न 8. भिन्न-भिन्न रंगों के दिए हुए 4 झंडों से, कितने भिन्न-भिन्न संकेत उत्पन्न किए जा सकते हैं, यदि एक संकेत के लिए एक दूसरे के नीचे 2 झंडों की आवश्यकता पड़ती है?

**हल:** उत्पादित संकेतों की संख्या 2 रिक्त स्थानों  $\square$  को भिन्न-भिन्न रंगों के 4 झंडों से उत्तरोत्तर भरने के तरीकों की संख्या के बराबर है। ऊपर के रिक्त स्थान को 4 झंडों में से किसी एक द्वारा 4 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता है। इसके बाद, नीचे के रिक्त स्थान को शेष 3 झंडों में से किसी एक द्वारा 3 विभिन्न तरीकों से भरा जा सकता है। अतः गुणन सिद्धांत द्वारा संकेतों की अभीष्ट संख्या  $= 4 \times 3 = 12$ ।

**प्रश्न 9.** अंकों 1, 2, 3, 4 और 5 से कितनी 3 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति न हो?

**हल:** इकाई का स्थान 1, 2, 3, 4 में से कोई-से एक अंक को लेकर 5 तरीकों से भरा जा सकता है। दहाई का स्थान 4 तरीकों से भरा जा सकता है क्योंकि एक अंक पहले ही चयनित कर लिया गया। पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है।

सैकड़े का स्थान 3 तरीकों से भरा जा सकता है क्योंकि 2 अंक पहले ही चयनित कर लिए गए हैं।

$\therefore$  3 अंकीय संख्याओं की संख्या  $= 5 \times 4 \times 3 = 60$ ।

**प्रश्न 10.** 1 से 9 तक के अंकों को प्रयोग करके कितनी 4 अंकीय संख्याएँ बन सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति अनुमति नहीं है?

**हल:** यहाँ पर अंकों का क्रम महत्वपूर्ण है, उदाहरण के लिए 1234 तथा 1324 दो भिन्न-भिन्न संख्याएँ हैं। अतः 4-अंकीय संख्याओं की संख्या 9 विभिन्न अंकों में से एक समय में 4 अंकों को लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या के बराबर है। इस प्रकार 4-अंकीय संख्याओं की अभीष्ट संख्या

$$= {}^9P_4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6$$

$$= 3024$$

उत्तर

**प्रश्न 11.** 8 व्यक्तियों की समिति में, हम कितने प्रकार से एक अध्यक्ष और एक उपाध्यक्ष चुन सकते हैं, यह मानते हुए कि एक व्यक्ति से अधिक पद पर नहीं रह सकता है?

**हल:** 8 व्यक्तियों में से एक को अध्यक्ष चुनने के तरीके = 8 अध्यक्ष चुनने के बाद 7 व्यक्तियों में से एक उपाध्यक्ष चुना जाना है।

उपाध्यक्ष चुनने के तरीके = 7

$\therefore$  एक अध्यक्ष और एक उपाध्यक्ष को  $8 \times 7 = 56$  तरीकों से चुना जा सकता है।

**प्रश्न 12.** अंग्रेजी वर्णमाला के प्रथम 10 अक्षरों से कितने 4 अक्षर के कोड बनाए जा सकते हैं, यदि किसी भी अक्षर की पुनरावृत्ति नहीं की जा सकती है?

**हल:** 4 अक्षरों वाले कोड में 4 स्थान हैं। प्रत्येक अक्षर के लिए एक स्थान चाहिए।

पहले स्थान को 10 तरीकों से दूसरे स्थान को 9 तरीकों से, तीसरे स्थान को 8 तरीकों से और चौथे स्थान को 7 तरीकों से भर सकते हैं क्योंकि पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है। एक अक्षर दुबारा नहीं लिखा जा सकता।

$$\therefore \text{चार अक्षर वाले कोडों की संख्या} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

**प्रश्न 13.** 0 से 9 तक के अंकों का प्रयोग करके कितने 5 अंकीय टेलीफोन नंबर बनाए जा सकते हैं, यदि प्रत्येक नंबर 67 से प्रारम्भ होता है और कोई अंक एक बार से अधिक नहीं आता है?

**हल:** पांच अंकीय नम्बर में 5 स्थान हैं। जिसमें पहले और दूसरे को I और II से निरूपित किया गया है। और II स्थान पर 6 और 7 को रखा गया है।

शेष 8 अंकों में से एक-एक अंक लेकर III, IV और V स्थान को भरना है। स्थान III को 8 तरीकों से, स्थान IV को 7 तरीकों से तथा स्थान V को 6 तरीकों से भर सकते हैं।

$$\therefore \text{5 अंकीय टेलीफोन नम्बरों की संख्या} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

उत्तर

**प्रश्न 14.** अंकों 1, 2, 3, 4, और 5 से उपयोग द्वारा कितनी 4 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि कोई भी अंक दोहराया नहीं गया है? इनमें से कितनी सम संख्याएँ होंगी?

**हल:** (i) 5 में से 4 अंक लेकर संख्याओं की संख्या  $= {}^5P_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

(iii) इकाई के स्थान पर 2 या 4 रखने से संख्या सम बनती है। इस प्रकार इकाई का स्थान 2 तरीकों से दहाई का स्थान 4 तरीकों से सैकड़े का स्थान 3 तरीकों से और हजार का स्थान 2 तरीकों से भरा जा सकता है।

$$\therefore \text{4 अंकीय सम संख्याओं की संख्या} = 2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$$

-उत्तर

**प्रश्न 15.** किसी भी अंक को दोहराए बिना कितनी 4 अंकीय संख्याएँ होती हैं?

**हल:** 0 से 9 तक कुल 10 अंक हैं।

$$10 \text{ में से 4 अंक लेकर संख्याओं की संख्या} = {}^{10}P_4$$

$$= 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

इनमें से संख्याएँ सम्मिलित हैं जिनमें हजार के स्थान पर 0 है। 0 को हजार के स्थान पर रखने पर और शेष स्थानों पर कोई तीन अंक रखने पर कुल संख्याओं की संख्या  $= {}^9P_3$

$$= 9 \times 8 \times 7 = 504$$

$$\text{चार अंकीय संख्याओं की संख्या} = 5040 - 504 = 4536.$$

उत्तर

प्रश्न 16. 100 और 1000 के बीच स्थित कितनी संख्याएँ हैं, जिन्हें अंक 0, 1, 2, 3, 4, 5 से बनाया जा सकता है, यदि अंकों के पुनराव्रतति की अनुमति नहीं है।

हल: 100 से 1000 के बीच स्थित प्रत्येक संख्या एक 3 अंकीय संख्या है। प्रथम हम 6 अंकों में से एक समय में 3 अंकों को लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या की गणना करते हैं। यह संख्या  ${}^6P_3$  है परंतु इन क्रमचयों में वे भी सम्मिलित हैं, जिनमें 0, सैकड़े के स्थान पर है। उदाहरण के लिए 092, 042... इत्यादि और ये ऐसी संख्याएँ हैं जो वास्तव में 2 अंकीय हैं। अतः अभीष्ट संख्या को ज्ञात करने के लिए, इस प्रकार की 2 अंकीय संख्याओं के  ${}^6P_3$  में से घटाना पड़ेगा। अब इन 2-अंकीय संख्याओं की संख्या ज्ञात करने के लिए, हम 0 को सैकड़े के स्थान पर स्थिर कर देते हैं और शेष 5 अंकों से एक समय में दो अंकों को लेकर बनने वाले पुनर्विन्यासों की संख्या ज्ञात करते हैं। यह संख्या  ${}^5P_2$  है। अतः अभीष्ट संख्या

$$\begin{aligned} &= {}^6P_3 - {}^5P_2 = \frac{6!}{3!} - \frac{5!}{3!} \\ &= 4 \times 5 \times 6 - 4 \times 5 = 100 \end{aligned}$$

प्रश्न 17. अंकों 1, 2, 3, 4 और 5 से कितनी 3 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति की जा सकती है।

हल: 3 अंकीय संख्या में 3 स्थान होते हैं: इकाई दहाई और सैकड़ा।

(i) इकाई का स्थान 5 तरीको से भरा जा सकता है क्योंकि 1, 2, 3, 4, 5 में से कोई भी एक अंक लिया जा सकता है। दहाई का स्थान भी 5 तरीको से भरा जा सकता है क्योंकि पुनरावृत्ति की अनुमति है। 1, 2, 3, 4, 5 में से कोई भी अंक लिया जा सकता है।

इसी प्रकार सैकड़े का स्थान भी 5 तरीको से भरा जा सकता है।

$$\therefore 3 \text{ अंकीय संख्याओं की संख्या} = 5 \times 5 \times 5 = 125 \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 18. अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 6 से कितनी 3 अंकीय सम संख्याएँ बन सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति की जा सकती है।

हल: इकाई का स्थान 2, 4, 6 में से एक को लेकर 3 तरीको से भरा जा सकता है।

क्योंकि पुनरावृत्ति की जा सकती है, दहाई का स्थान 6 तरीकों से भरा जा सकता है।

इसी प्रकार सैकड़े का स्थान भी 6 तरीको से ही भरा जा सकता है।

$$\therefore 3 \text{ अंकीय संख्याओं की संख्या} = 6 \times 6 \times 3 = 108 \text{ उत्तर}$$

प्रश्न 19. मान निकालिए  $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ , जहाँ  $n=5, r=2$ .

हल: हमें निम्नलिखित का मान निकालना है

$$\frac{5!}{2!(5-2)!} \text{ (क्योंकि } n=5, r=2)$$

$$\text{यहाँ पर } \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

प्रश्न 20. यदि  $\frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = \frac{x}{10!}$  तो  $x$  ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: यहाँ पर } \frac{1}{8!} + \frac{1}{9 \times 8!} = \frac{x}{10 \times 9 \times 8!}$$

$$\text{अतएव } 1 + \frac{1}{9} = \frac{x}{10 \times 9} \text{ या } \frac{10}{9} = \frac{x}{10 \times 9}$$

$$\text{अतः } x = 100$$

-उत्तर

प्रश्न 21. ALLAHABAD शब्द के अक्षरों से बनने वाले क्रमचयों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: शब्द ALLAHABAD में 4, A हैं, 2L तथा शेष 3 शब्द भिन्न हैं।

$$\text{अतः बनने वाले शब्दों की संख्या} = \frac{9!}{4!2!} = 7560 \text{ -उत्तर}$$

प्रश्न 22. 4 लाल, 3 पीली तथा 2 हरी डिस्कों को एक पंक्ति में कितने प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है, यदि एक ही रंग की डिस्कों में कोई अंतर नहीं है?

हल: डिस्कों की कुल संख्या  $4 + 3 + 2 = 9$  है। इन 9 डिस्कों में से 4 डिस्कों एक प्रकार की (लाल), 3 डिस्कों दूसरे प्रकार की (पीली) तथा 2 डिस्कों तीसरे प्रकार की (हरी) हैं।

$$\text{इस प्रकार डिस्कों को व्यवस्थित करने की संख्या} \frac{9!}{4!3!2!} = 1260$$

-उत्तर

प्रश्न 23.  $n$  का मान ज्ञात कीजिए यदि  ${}^nP_5 = 42 {}^nP_3$ ,  $n > 4$ .

हल: दिया है कि

$${}^nP_5 = 42 {}^nP_3$$

$$\text{या } n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 42 n(n-1)(n-2).$$



### 30 / जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

क्योंकि  $n > 4$  इसलिए  $n(n-1)n(n-2) \neq 0$   
अतएव, दोनों पक्षों को  $n(n-1)(n-2)$ , से भाग देने पर  
 $(n-3)(n-4) = 42$

या  $n^2 - 7n - 30 = 0$

या  $n^2 - 10n + 3n - 30 = 0$

या  $(n-10)(n+3) = 0$

या  $n-10 = 0$  या  $n+3 = 0$

या  $n = 10$  या  $n = -3$

क्योंकि  $n$  ऋण संख्या नहीं हो सकती है अतः  $n = 10$  उत्तर

प्रश्न 24. यदि  ${}^{n-1}P_3 : {}^n P_4 = 1 : 9$  तो  $n$  का मान ज्ञान कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि

$${}^n P_3 = n(n-1)(n-2)$$

$$\therefore {}^{n-1} P_3 = (n-1)(n-2)(n-3)$$

$${}^n P_4 = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$\therefore \frac{{}^{n-1} P_3}{{}^n P_4} = \frac{1}{9}$$

या  $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{1}{9}$

या  $\frac{1}{n} = \frac{1}{9}$

अतः  $n = 9$

उत्तर

प्रश्न 25.  $r$  का मान ज्ञात कीजिए यदि  $5^4 P_r = 6^5 P_{r-1}$ .

हल: यहाँ पर

$$5^4 P_r = 6^5 P_{r-1}$$

या  $5 \times \frac{4!}{(4-r)!} = 6 \times \frac{5!}{(5-r+1)!}$

या  $\frac{5!}{(4-r)!} = \frac{6 \times 5!}{(5-r+1)(5-r)(5-r-1)!}$

या  $(6-r)(5-r) = 6$

या  $r^2 - 11r + 24 = 0$

या  $r^2 - 8r - 3r + 24 = 0$

या  $(r-8)(r-3) = 0$

या  $r = 8$  or  $r = 3$ .

अतः  $r = 8, 3$ .

-उत्तर

प्रश्न 26. यदि  ${}^n C_9 = {}^n C_8$ , तो  ${}^n C_{17}$  ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि  ${}^n C_9 = {}^n C_8$

अर्थात्  $\frac{n!}{9!(n-9)!} = \frac{n!}{(n-8)!8!}$

या  $\frac{1}{9} = \frac{1}{n-8}$  या  $n-8 = 9$  या  $n = 17$

इसलिए  ${}^n C_{17} = {}^{17} C_{17} = 1$ .

-उत्तर

प्रश्न 27.  $n$  का मान ज्ञात कीजिए यदि  ${}^{2n} C_3 : {}^n C_2 = 12 : 1$

हल: (i)  ${}^{2n} C_3 : {}^n C_2 = 12 : 1$

$$\therefore \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1.2.3} : \frac{n(n-1)}{1.2} = 12 : 1$$

या  $\frac{2n(2n-1)(2n-1)}{6} \times \frac{2}{n(n-1)} = \frac{12}{1}$

$$\frac{4(2n-1)}{3} = 12$$

या  $2n-1 = \frac{12 \times 3}{4}$

या  $2n-1 = 9$

$$2n = 10 \Rightarrow n = 5 \text{ -उत्तर}$$

प्रश्न 28. किसी वृत्त पर स्थित 21 बिन्दुओं से होकर जाने वाली कितनी जीवाएँ खींची जा सकती हैं?

हल: 21 बिन्दुओं में कोई 2 बिन्दु मिलाने से एक जीवा प्राप्त होती है।

जीवाओं की संख्या  $= {}^{21} C_2 = \frac{21 \times 20}{1 \times 2} = 210$  -उत्तर

प्रश्न 29. 9 उपलब्ध पाठ्यक्रमों में से, एक विद्यार्थी 5 पाठ्यक्रमों का चयन कितने प्रकार से कर सकता है, यदि प्रत्येक विद्यार्थी के लिए 2 विशिष्ट पाठ्यक्रम अनिवार्य हैं?

हल: दो पाठ्यक्रम अनिवार्य हों, तब शेष पाठ्यक्रम  $= 9 - 2 = 7$ , 7 पाठ्यक्रमों में से 3 पाठ्यक्रम चुनने के तरीके  $= {}^7 C_3$

अतः 9 में से 5 पाठ्यक्रम चुनने के तरीके  $= {}^7 C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35$  -उत्तर

प्रश्न 30. 2 पुरुषों और 3 महिलाओं के एक समूह से 3 व्यक्तियों की एक समिति बनानी है। यह कितने प्रकार से किया जा सकता है? इनमें से कितनी समितियाँ ऐसी हैं, जिनमें 1 पुरुष तथा 2 महिलाएँ हैं?

हल: यहाँ क्रम का महत्व नहीं है। अतः हमें संचयों की गणना करनी है। यहाँ पर समितियों की संख्या उतनी ही है, जितनी 5 विभिन्न व्यक्तियों में से एक समय में 3 को लेकर बनने वाले

संचयों की संख्या है। इसलिए समिति बनाने के तरीकों की

$$\text{अभीष्ट संख्या} = {}^5C_3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{4 \times 5}{2} = 10.$$

पुनः 2 पुरुषों में से 1 को चुनने के  ${}^2C_1$  तरीके हैं तथा 3 महिलाओं में से 2 चुनने के  ${}^3C_2$  तरीके हैं। इसलिए, इस प्रकार की समितियों की अभीष्ट संख्या

$$= {}^2C_1 \times {}^3C_2 = \frac{2!}{1!1!} \times \frac{3!}{2!1!} = 6. \quad \text{-उत्तर}$$

प्रश्न 31. 5 लड़के और 4 लड़कियों में से 3 लड़के और 3 लड़कियों की टीम बनाने के कितने तरीके हैं?

हल: 5 लड़कों में से 3 लड़कों के चुनने के तरीके =  ${}^5C_3$   
 4 लड़कियों में से 3 लड़कियाँ चुनने के तरीके =  ${}^4C_3$   
 $\therefore$  5 लड़कों और 4 लड़कियों से 3 लड़के और 3 लड़कियों की टीमों की संख्या

$$\begin{aligned} &= {}^5C_3 \times {}^4C_3 \\ &= {}^5C_2 \times {}^4C_1 \\ &= \frac{5.4}{1.2} \cdot \frac{4}{1} \\ &= 10 \times 4 = 40 \quad \text{-उत्तर} \end{aligned}$$

प्रश्न 32. 6 लाल रंग की, 5 सफेद रंग की और 5 नीले रंग की गेंदों में से 9 गेंदों के चुनने के तरीकों की संख्या ज्ञात कीजिए, यदि प्रत्येक संग्रह में प्रत्येक रंग की 3 गेंदें हैं।

हल: 6 लाल रंग की गेंदों में से 3 गेंदें चुनने के तरीके =  ${}^6C_3$   
 5 सफेद रंग की गेंदों में से 3 गेंदें चुनने के तरीके =  ${}^5C_3$   
 5 नीले रंग की गेंदों में से 3 गेंदें चुनने के तरीके =  ${}^5C_3$   
 इस प्रकार 6 लाल 5 सफेद तथा 5 नीले रंग की गेंदों में से प्रत्येक रंग की 3 गेंदों के चुनने के तरीके.

$$\begin{aligned} &= {}^6C_3 \times {}^5C_3 \times {}^5C_3 \\ &= {}^6C_3 \times {}^5C_2 \times {}^5C_2 \quad [\because nCn = nCn-r] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{6 \times 5 \times 4}{1.2.3} \times \frac{5.4}{1.2} \times \frac{5.4}{1.2} \\ &= 20 \times 10 \times 10 \\ &= 2000 \end{aligned}$$

उत्तर

प्रश्न 33. 52 पत्तों की एक गड्डी में से 5 पत्तों को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या निर्धारित कीजिए, यदि प्रत्येक संचय में तथ्यतः एक इक्का है।

हल: ताश का गड्डी में 4 इक्के होते हैं।  
 $\therefore$  4 में से 1 इक्का चुनने के तरीके =  ${}^4C_1$   
 इक्का छोड़कर शेष पत्ते =  $52 - 4 = 48$

48 पत्तों में से कोई 4 अन्य पत्ते चुनने के तरीके =  ${}^{48}C_4$   
 $\therefore$  ताश की गड्डी में 1 इक्का और 4 अन्य पत्ते चुनने के तरीके =  ${}^4C_1 \times {}^{48}C_4$

$$= \frac{4}{1} \times \frac{48 \times 47 \times 46 \times 45}{1.2.3.4}$$

$$\left[ {}^nC_r = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{1.2.3\dots r} \right]$$

$$= 778320 \quad \text{-उत्तर}$$

प्रश्न 34. 17 खिलाड़ियों में से, जिनमें केवल 5 खिलाड़ी गेंदबाजी कर सकते हैं, एक क्रिकेट टीम के 11 खिलाड़ियों का चयन कितने प्रकार से किया जा सकता है, यदि प्रत्येक टीम में तथ्यतः 4 गेंदबाज हैं?

हल: 5 गेंदबाज में 4 गेंदबाज चुनने के तरीके =  ${}^5C_4$   
 शेष खिलाड़ी =  $17 - 5 = 12$

शेष चुने जाने वाले खिलाड़ी =  $11 - 4 = 7$

$\therefore$  12 खिलाड़ियों में से 7 खिलाड़ी चुनने के तरीके =  ${}^{12}C_7$

$$\begin{aligned} \text{कुल टीम की संख्या} &= {}^5C_4 \times {}^{12}C_7 \\ &= {}^5C_1 \times {}^{12}C_5 \quad [{}^5C_1 = {}^nC_{n-r}] \end{aligned}$$

$$= \frac{5}{1} \times \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 3960$$

प्रश्न 35. एक थैली में 5 काली तथा 6 लाल गेंद हैं। 2 काली तथा 3 लाल गेंदों के चयन के तरीकों की संख्या निर्धारित कीजिए।

हल: 5 काली गेंदों में से 2 गेंदें चुनने के तरीके =  ${}^5C_2$   
 6 लाल गेंदों में से 3 गेंदें चुनने के तरीके =  ${}^6C_3$   
 5 काली व 6 लाल गेंदों में से 2 काली और 3 लाल गेंदें चुनने के कुल तरीके

$$= {}^5C_2 \times {}^6C_3 = \frac{5.4}{1.2} \times \frac{6.5.4}{1.2.3} = 10 \times 20 = 200. \quad \text{-उत्तर}$$

## अध्याय-8

## द्विपद प्रमेय

### वस्तुनिष्ठ प्रश्नोत्तर

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए-

(1)  $(a + b)^n$  के प्रसार में कुल पदों की संख्या होगी-

(अ)  $n$  (ब)  $n + 1$  (स)  $n - 1$  (द)  $n + 2$

उत्तर- (1) (ब)।

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

(1)  $(a + b)^n$  के प्रसार में यदि  $n$  सम संख्या हो तो मध्य पद

..... वां पद होगा।

32 / जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

(2)  ${}^n C_0 + {}^n C_1 + {}^n C_2 + \dots + {}^n C_n = \dots$

(3)  ${}^n C_0 - {}^n C_1 + {}^n C_2 - \dots + (-1)^n {}^n C_n = \dots$

उत्तर- (1)  $\frac{n}{2} + 1$ , (2)  $2n$ , (3)  $0$ .

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए-

(1)  $(a + b)^n$  के प्रसार में प्रत्येक पद में  $a$  तथा  $b$  की घाताकों का योग  $n$  है।

उत्तर- (1) सत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए-

(1) द्विपद प्रमेय से  $(a + b)^n$  का प्रसार लिखिए।

उत्तर-  $(a + b)^n = {}^n C_0 a^n b^0 + {}^n C_1 a^{n-1} b^1 + {}^n C_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}^n C_n a^0 b^n$

प्रश्न 5.  $\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)^4$ ,  $x \neq 0$  का प्रसार ज्ञात कीजिए।

हल: द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके हमें प्राप्त होता है,

$$\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4 = {}^4 C_0 (x^2)^4 + {}^4 C_1 (x^2)^3 \left(\frac{3}{x}\right) + {}^4 C_2 (x^2)^2$$

$$\left(\frac{3}{x}\right)^2 + {}^4 C_3 (x^2) \left(\frac{3}{x}\right)^3 + {}^4 C_4 \left(\frac{3}{x}\right)^4$$

$$= x^8 + 4 \cdot x^6 \cdot \frac{3}{x} + 6 \cdot x^4 \cdot \frac{9}{x^2} + 4 \cdot x^2 \cdot \frac{27}{x^3} + \frac{81}{x^4}$$

$$= x^8 + 12x^5 + 54x^2 + \frac{108}{x} + \frac{81}{x^4}$$

प्रश्न 6.  $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right)^5$  का प्रसार ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: } \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right)^5 = \left(\frac{x}{3}\right)^5 + {}^5 C_1 \left(\frac{x}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{x}\right) + {}^5 C_2 \left(\frac{x}{3}\right)^3$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 + {}^5 C_3 \left(\frac{x}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{x}\right)^3 + {}^5 C_4 \left(\frac{x}{3}\right) \left(\frac{1}{x}\right)^4 + {}^5 C_5 \left(\frac{1}{x}\right)^5$$

$$= \frac{x^5}{243} + 5 \cdot \frac{x^4}{81} \cdot \frac{1}{x} + 10 \cdot \frac{x^3}{27} \cdot \frac{1}{x^2} + 10 \cdot \frac{x^2}{9} \cdot \frac{1}{x^3} + 5 \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}$$

$$= \frac{x^5}{243} + \frac{5x^3}{81} + \frac{10}{27}x + \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} \quad \text{-उत्तर}$$

प्रश्न 7.  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$  का प्रसार ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: } \left(x + \frac{1}{x}\right)^6 = x^6 + {}^6 C_1 x^5 \left(\frac{1}{x}\right) + {}^6 C_2 x^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 +$$

$${}^6 C_3 x^3 \left(\frac{1}{x}\right)^3 + {}^6 C_4 x^2 \left(\frac{1}{x}\right)^4 + {}^6 C_5 x \left(\frac{1}{x}\right)^5 + \left(\frac{1}{x}\right)^6$$

$$= x^6 + 6 \cdot x^5 \cdot \frac{1}{x} + 15x \cdot \frac{4 \cdot 1}{x^2} + 20 \cdot x^3 \cdot \frac{1}{x^3} + 15 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^4} +$$

$$6x \cdot \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6}$$

$$= x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + \frac{15}{x^2} + \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6} \quad \text{-उत्तर}$$

प्रश्न 8.  $(1-2x)^5$  का प्रसार ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: } (1-2x)^5 = {}^5 C_0 \cdot 1^5 + {}^5 C_1 \cdot 1^4 \cdot (-2x) + {}^5 C_2 \cdot 1^3 \cdot$$

$$(-2x)^2 + {}^5 C_3 \cdot 1^2 \cdot (-2x)^3 + {}^5 C_4 \cdot 1^1 \cdot (-2x)^4 + {}^5 C_5 \cdot 1 \cdot (-2x)^5$$

$$= 1 + 5(-2x) + 10 \cdot 4x^2 + 10 \cdot (-8x^3) + 5 \cdot (-2x)^4 + 1 \cdot (-2x)^5$$

$$= 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5 \quad \text{-उत्तर}$$

प्रश्न 9.  $\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)^5$  का प्रसार ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: } \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)^5 = \left(\frac{2}{x}\right)^5 + {}^5 C_1 \left(\frac{2}{x}\right)^4 \left(\frac{-x}{2}\right) + {}^5 C_2 \left(\frac{2}{x}\right)^3$$

$$\left(\frac{-x}{2}\right)^2 + {}^5 C_3 \left(\frac{2}{x}\right)^2 \left(\frac{-x}{2}\right)^3 + {}^5 C_4 \left(\frac{2}{x}\right)^1 \left(\frac{-x}{2}\right)^4 + \left(\frac{-x}{2}\right)^5$$

$$= \frac{32}{x^5} + 5 \cdot \frac{16}{x^4} \left(\frac{-x}{2}\right) + 10 \cdot \frac{8}{x^3} \cdot \frac{x^2}{4} + 10 \cdot \frac{4}{x^2} \left(\frac{-x^3}{8}\right)$$

$$+ 5 \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{x^4}{16} + \left(\frac{-x^5}{32}\right)$$

$$= \frac{32}{x^5} + \frac{40}{x^3} + \frac{20}{x} - 5x + \frac{5}{8}x^3 - \frac{x^5}{32} \quad \text{-उत्तर}$$

प्रश्न 10.  $(2x-3)^6$  का प्रसार ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: } (2x-3)^6 = (2x)^6 - {}^6 C_1 (2x)^5 (3) + {}^6 C_2 (2x)^4 (3)^2$$

$$- {}^6 C_3 (2x)^3 (3)^3 + {}^6 C_4 (2x)^2 (3)^4 - {}^6 C_5 (2x) (3)^5 + {}^6 C_6 (3)^6$$

$$= 64x^6 - 6(32x^5)(3) + 15(16x^4)(9) - 20(8x^3)$$

$$(27) + 15(4x^2)(81) - 6(2x)(243) + 729$$

$$= 64x^6 - 576x^5 + 2160x^4 - 4320x^3 + 4860x^2 - 2916x$$

$$+ 729 \quad \text{-उत्तर}$$



Amarwah unity



HOME

VIDEOS

PLAYLISTS

COMMUN

Amarwah unity



Amarwah unity

SUBSCRIBED



174 videos

Stand with unity, an educational channel for the helping students & providing study materials

Uploads

Subscribe

प्रश्न 11.  $(102)^5$  का मान ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ,  $(102)^5 = (100 + 2)^5$   
 $= (100)^5 + {}^5C_1 (100)^4 \cdot 2 + {}^5C_2 (100)^3 \cdot 2^2 + {}^5C_3$   
 $+ (100)^2 \cdot 2^3 + {}^5C_4 (100)^1 \cdot 2^4 + {}^5C_5 \cdot 2^5$   
 $= 10000000000 + 1000000000 + 40000000$   
 $+ 800000 + 8000 + 32$   
 $= 11040808032$  -उत्तर

प्रश्न 12.  $(101)^4$  का मान ज्ञात कीजिए।

हल:  $(101)^4 = (100-1)^4 = (100)^4 + {}^4C_1 \times (100)^4$   
 $\times 1 + {}^4C_2 (100)^2 \times 1^2 - {}^4C_3 \times (100) \times 1^3 + 1^4$   
 $= 100000000 - 4 \times 1000000 + 6 \times 10000 + 400 + 1$   
 $= 100000000 - 4000000 + 60000 - 400 + 1$   
 $= 104060401$ . -उत्तर

प्रश्न 13.  $(98)^5$  की गणना कीजिए।

हल: हम 98 को दो संख्याओं के योग या अंतर में व्यक्त करते हैं जिनकी घात ज्ञात करना सरल हो, फिर द्विपद प्रमेय का प्रयोग करते हैं।

98 को  $100 - 2$  लिखने पर  
 $(98)^5 = (100 - 2)^5$   
 $= {}^5C_0 (100)^5 - {}^5C_1 (100)^4 \cdot 2 + {}^5C_2 (100)^3 \cdot 2^2$   
 $- {}^5C_3 (100)^2 (2)^3$   
 $+ {}^5C_4 (100) (2)^4 - {}^5C_5 (2)^5$   
 $= 10000000000 - 5 \times 100000000 \times 2 + 10 \times 1000000$   
 $\times 4 - 10 \times 10000 \times 8 + 5 \times 100 \times 16 - 32$   
 $= 10040008000 - 1000800032$   
 $= 9039207968$  -उत्तर

प्रश्न 14.  $(96)^3$  का मान ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ  $(96)^3 = (100-4)^3 = (100)^3 - {}^3C_1 (100)^2 \cdot 4^1$   
 $+ {}^3C_2 (100)^1 \cdot 4^2 - {}^3C_3 \cdot 4^3$   
 $= 1000000 - 3 \cdot 10000 \cdot 4 + 3 \cdot 100 \cdot 16 - 1 \cdot 64$   
 $= 1000000 - 120000 + 4800 - 64$   
 $= 1004800 - 120064 = 884736$ . -उत्तर

प्रश्न 15.  $(99)^5$  का मान ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ,  $(99)^5 = (100-1)^5$   
 $= (100)^5 - {}^5C_1 (100)^4 \cdot 1 + {}^5C_2 (100)^3 \cdot 1^2 - {}^5C_3$   
 $(100)^2 \cdot 1^3 + {}^5C_4 (100)^1 \cdot 1^4 - {}^5C_5 \cdot 1^5$   
 $= 10000000000 - 5 \cdot 100000000 + 10 \cdot 1000000$   
 $- 10 \cdot 10000 + 500 - 1$   
 $= 10010000500 - 500100001 = 9509900499$ .

-उत्तर

प्रश्न 16.  $(1.01)^{1000000}$  और 10,000 में से कौन-सी संख्या बड़ी है?

हल: 1.01 को दो पदों में व्यक्त करके द्विपद प्रमेय के पहले कुछ पदों को लिखकर हम पाते हैं

$(1.01)^{1000000} = (1 + 0.01)^{1000000}$   
 $= {}^{1000000}C_0 + {}^{1000000}C_1 (0.01) + \text{अन्य धनात्मक पद}$   
 $= 1 + 1000000 \times 0.01 + \text{अन्य धनात्मक पद}$   
 $= 1 + 10000 + \text{अन्य धनात्मक पद}$   
 $> 10000$

अतः  $(1.01)^{1000000} > 10000$  -उत्तर

प्रश्न 17. द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके बताइए कौन-सी संख्या बड़ी है  $(1.1)^{10000}$  या 1000 में कौन-सी संख्या बड़ी है।

हल:  $(1.1)^{10000} = (1 + 0.1)^{10000}$   
 $= 1^{10000} + 10000 {}^1C_1 \times 1^{9999} (0.1)^1$   
 $= 1 + 10000 \times 0.1 + \dots = 1001 + \dots$   
 स्पष्ट है कि  $(1.1)^{10000}$  संख्या 1000 से बड़ी है।

प्रश्न 18. सिद्ध कीजिए कि  $\sum_{r=0}^n 3^r {}^nC_r = 4^n$ .

हल:  $\sum_{r=0}^n 3^r {}^nC_r = 3^0 {}^nC_0 + 3^1 {}^nC_1 + 3^2 {}^nC_2 + \dots + 3^n {}^nC_n$   
 $= 1 + {}^nC_1 \cdot 3 + {}^nC_2 \cdot 3^2 + \dots + {}^nC_n \cdot 3^n$   
 $= (1 + 3)^n = 4^n$  -सिद्ध हुआ

प्रश्न 19.  $(x + 2y)^9$  के प्रसार में  $x^6y^3$  का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए  $(x + 2y)^9$  के प्रसार में  $x^6y^3$ ,  $(r+1)$  वें पद में आता है।

अब  $T_{r+1} = {}^9C_r x^{9-r} (2y)^r = {}^9C_r 2^r \cdot x^{9-r} \cdot y^r$   
 $T_{r+1}$  तथा  $x^6y^3$  में  $x$  और  $y$  के घातांकों की तुलना करने पर हमें प्राप्त होता है,  $r = 3$ .

इसलिए,  $x^6y^3$  का गुणांक  $= {}^9C_3 2^3 = \frac{9!}{3!6!} \cdot 2^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} \cdot 2^3$   
 $= 672$ . -उत्तर

प्रश्न 20.  $(x+3)^8$  के प्रसार में  $x^5$  का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल:  $(x+3)^8$  का व्यापक पद  $= {}^8C_r x^{8-r} \cdot 3^r$   
 $x^{8-r} = x^5$

अर्थात्  $8-r = 5$  या  $r = 3$

$\therefore x^5$  का गुणांक  $= {}^8C_3 (3)^3$

$= \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} \times 27$

$= 56 \times 27 = 1512$

-उत्तर

34 / जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

प्रश्न 21.  $(a-2b)^{12}$  के प्रसार में  $a^5b^7$  का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल:  $(a-2b)^{12}$  का व्यापक पद  $= {}^{12}C_r a^{12-r} (-2b)^r$

$$= {}^{12}C_r a^{12-r} (-1)^r \cdot 2^r b^r$$

$$\therefore b^r = b^7 \text{ दिया है}$$

$$\therefore r = 7$$

अब  $r = 7$  रखने पर

$$= {}^{12}C_7 a^{12-7} (-1)^7 \cdot 2^7 \cdot b^7$$

$$= a^5 b^7 \cdot 12C_7 (-1) \cdot 2^7$$

$$a^5 b^7 \text{ का गुणांक} = -{}^{12}C_7 \cdot 2^7 = -{}^{12}C_5 \cdot 2^7$$

$$= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \cdot 128$$

$$= -101376$$

-उत्तर

प्रश्न 22.  $\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x}\right)^6$  के प्रसार में  $x$  से स्वतंत्र पद ज्ञात कीजिए।

हल: हम पाते हैं कि  $T_{r+1} = {}^6C_r \left(\frac{3}{2}x^2\right)^{6-r} \left(-\frac{1}{3x}\right)^r$

$$= {}^6C_r \left(\frac{3}{2}\right)^{6-r} (x^2)^{6-r} (-1)^r \left(\frac{1}{x}\right)^r \left(\frac{1}{3}\right)^r$$

$$= (-1)^r {}^6C_r \frac{(3)^{6-2r}}{(2)^{6-r}} x^{12-3r}$$

$x$  से स्वतंत्र पद के लिए, पद में  $x$  का घातांक 0 (होना चाहिए)।

$$\text{अतः } 12-3r = 0 \text{ या } r = 4$$

इस प्रकार 5वाँ पद  $x$  से स्वतंत्र है। इसलिए अभीष्ट पद  $= (-1)^4$

$${}^6C_4 \frac{(3)^{6-8}}{(2)^{6-4}} = \frac{5}{12}$$

-उत्तर

प्रश्न 23.  $(x^2-y)^6$  के प्रसार में व्यापक पद लिखिए।

हल:  $(x^2-y)^6$  का व्यापक पद

$$= {}^6C_r (x^2)^{6-r} (-y)^r$$

$$= (-1)^r {}^6C_r x^{12-2r} \cdot y^r$$

-उत्तर

प्रश्न 24.  $(x^2 - yx)^{12}$ ,  $x \neq 0$  के प्रसार में व्यापक पद लिखिए।

हल:  $(x^2 - yx)^{12}$  का व्यापक पद  $= {}^{12}C_r (x^2)^{12-r} (-yx)^r$

$$= {}^{12}C_r x^{24-2r} (-1)^r \cdot y^r x^r$$

$$= (-1)^r {}^{12}C_r x^{24-r} \cdot y^r$$

-उत्तर

प्रश्न 25.  $(x-2y)^{12}$  के प्रसार में चौथा पद ज्ञात कीजिए।

हल:  $(x-2y)^{12}$  का चौथा पद

$$= T_{3+1} = {}^{12}C_3 x^{12-3} (-2y)^3$$

$$= \frac{12 \times 11 \times 10}{1 \times 2 \times 3} \times x^9 (-1)^3 \cdot 2^3 \cdot y^3$$

$$= -220 \times 8 \cdot x^9 \cdot y^3$$

$$= -1760 x^9 \cdot y^3$$

-उत्तर

प्रश्न 26.  $\left(9x - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$  के प्रसार में 13वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल:  $\left(9x - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$  के प्रसार में 13वाँ पद

$$= T_{12+1} = {}^{18}C_{12} (9x)^{18-12} \left(\frac{-1}{3\sqrt{x}}\right)^{12}$$

$$= {}^{18}C_{12} \cdot 9^6 \times x^6 \times \frac{(-1)^{12}}{3^{12} (\sqrt{x})^{12}}$$

$$= \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} \times \frac{3^{12} \times x^6}{3^{12} \times x^6}$$

$$= 18564$$

-उत्तर

प्रश्न 27.  $\left(3 - \frac{x^3}{6}\right)^7$  के प्रसार में मध्य पद ज्ञात कीजिए।

हल:  $\left(3 - \frac{x^3}{6}\right)^7$  में  $7 + 1 = 8$  पद हैं।

पहला माध्य पद,  $T_4 = T_{3+1} = \frac{8}{2}$  वाँ पद = 4वाँ पद =

$${}^7C_3 \cdot 3^{7-3} \left(-\frac{x^3}{6}\right)^3$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} \cdot 3^4 \cdot (-1)^3 \cdot \frac{x^9}{6^3}$$

$$= -35 \frac{3^4 x^9}{2^3 \cdot 3^3}$$

$$= \frac{-35 \times 3 \times x^9}{8} = \frac{-105x^9}{8}$$

दूसरा माध्य पद,  $T_5 = T_{4+1} = (4 + 1)$  वाँ पद = 5वाँ पद

$$= {}^7C_4 \cdot 3^{7-4} \left(\frac{-x^3}{6}\right)^4$$

$$= {}^7C_4 \cdot 3^3 \cdot (-1)^4 = \frac{x^{12}}{6^4}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{1 \times 2 \times 3 \times 4!} \times \frac{3^3 \times x^{12}}{2^4 \cdot 3^4}$$

$$= \frac{35 \times x^{12}}{16 \times 3} = \frac{35x^{12}}{48}$$

-उत्तर

प्रश्न 28.  $\left(\frac{x}{3} + 9x\right)^{10}$  के प्रसार में मध्य पद ज्ञात कीजिए।

हल: इसमें  $10 + 1 = 11$  पद हैं जो विषम संख्या है।

मध्य पद  $\frac{11+1}{2} = 6$ वाँ पद

$$= {}^{10}C_5 \left(\frac{x}{3}\right)^5 (9y)^5$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \cdot \frac{x^5}{3^5} \cdot 9^5 \cdot y^5$$

$$= 252 \times 243 \cdot x^5 \cdot y^5$$

-उत्तर ■

## अध्याय-9 अनुक्रम तथा श्रेणी

### वस्तुनिष्ठ प्रश्नोत्तर

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए-

(1) श्रेणी 2, 4, 8... का 8वाँ पद होगा-  
(अ) 64 (ब) 128 (स) 256 (द) 512

(2) श्रेणी  $a_n = n(n+2)$  का 5वाँ पद होगा-  
(अ) 35 (ब) 7 (स) 12 (द) 5

उत्तर- (1) (स), (2) (अ)।

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

(1) कोई दो धनात्मक वास्तविक संख्याओं  $a$  और  $b$  का गुणोत्तर माध्य ..... होता है।

(2)  $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \dots$  का 5वाँ पद ..... होगा।

उत्तर- (1)  $\pm\sqrt{ab}$ , (2)  $5\sqrt{2}$ .

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए-

(1) दो संख्याओं  $a$  और  $b$  का समांतर माध्य  $\frac{a-b}{2}$  होता है।

(2) 4 और 12 का समांतर माध्य 6 होगा।

(3) यदि किसी समांतर श्रेणी के प्रत्येक पद में एक अक्षर से गुणा किया जाए तो, इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी समांतर श्रेणी होता है।

(4) दो संख्याओं का समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य से छोटा होता है।

उत्तर- (1) असत्य, (2) असत्य, (3) सत्य, (4) असत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए-

(1) गुणोत्तर श्रेणी  $a, ar, ar^2 \dots$  का  $n$  वाँ पद लिखिए।

उत्तर-  $ar^{n-1}$

प्रश्न 5. यदि किसी समांतर श्रेणी का  $m$  वाँ पद  $n$  तथा  $n$  वाँ पद  $m$ , जहाँ  $m \neq n$  हो तो  $p$  वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: हम पाते हैं:

$$a_m = a + (m-1)d = n, \quad \dots(1)$$

तथा  $a_n = a + (n-1)d = m, \quad \dots(2)$

(1) और (2) को हल करने पर, हम पाते हैं:

$$(m-n)d = n-m, \text{ या } d = -1, \quad \dots(3)$$

तथा  $a = n + m - 1 \quad \dots(4)$

इसलिए  $a_p = a + (p-1)d$

$$= n + m - 1 + (p-1)(-1) = n + m - p$$

अतः,  $p$  वाँ पद  $n + m - p$  है।

प्रश्न 6. दो समांतर श्रेणियों के  $n$  पदों के योगफल का अनुपात  $(3n+8) : (7n+15)$  है। 12वाँ पद का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि  $a_1, a_2$ , तथा  $d_1, d_2$ , क्रमशः प्रथम एवं द्वितीय समांतर श्रेणियों के प्रथम पद तथा सार्व अंतर हैं, तो दी हुई शर्त के अनुसार, हम पाते हैं-

$$\frac{\text{प्रथम समांतर श्रेणी के } n \text{ पदों का योग}}{\text{द्वितीय समांतर श्रेणी के } n \text{ पदों का योग}} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

या  $\frac{\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2 + (n-1)d_2]} = \frac{3n+8}{7n+15}$

या  $\frac{2a_1 + (n-1)d_1}{2a_2 + (n-1)d_2} = \frac{3n+8}{7n+15} \quad \dots(1)$

अब  $\frac{\text{प्रथम समांतर श्रेणी का 12वाँ पद}}{\text{द्वितीय समांतर श्रेणी का 12वाँ पद}} = \frac{a_1 + 11d_1}{a_2 + 11d_2}$

$$\frac{2a_1 + 22d_1}{2a_2 + 22d_2} = \frac{3 \times 23 + 8}{7 \times 23 + 15}$$

[[1] में  $n = 23$  रखने पर]

36 / जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

या  $\frac{a_1 + 11d_1}{a_2 + 11d_2} = \frac{7}{16}$

अतः वांछित अनुपात 7 : 16 है। -उत्तर

प्रश्न 7. यदि किसी समांतर श्रेणी के प्रथम p पदों का योग, प्रथम q पदों के योगफल के बराबर हो तो प्रथम (p + q) पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि श्रेणी का प्रथम पद a तथा सार्व अन्तर d है। प्रश्नानुसार  $S_p = S_q$  अतएव

$$\frac{p}{2} \{2a + (p-1)d\} = \frac{q}{2} \{2a + (q-1)d\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2a(p-q) &= [q(q-1) - p(p-1)]d \\ \Rightarrow 2a(p-q) &= [q^2 - p^2 - (q-p)]d \\ \Rightarrow 2a(p-q) &= (q-p)[q + p - 1]d \\ \Rightarrow 2a + (p+q-1)d &= 0 \end{aligned}$$

अतः  $S_{p+q} = \frac{p+q}{2} \{2a + (p+q-1)d\} = 0$ , [(1) से] -उत्तर

प्रश्न 8. यदि किसी समांतर श्रेणी के प्रथम p, q, r पदों का योगफल क्रमशः a, b तथा c हो तो सिद्ध कीजिए कि  $\frac{a}{p}$

$$(q-r) + \frac{b}{q}(r-p) + \frac{c}{r}(p-a) = 0$$

हल: P- पदों का योगफल =  $\frac{p}{2} [2a + (p-1)d] = a$

$$2a + (p-1)d = \frac{2a}{p} \dots(1)$$

q पदों का योगफल =  $\frac{q}{2} [2a + (q-1)d] = b$

$$2a + (q-1)d = \frac{2b}{q} \dots(2)$$

r पदों का योगफल =  $\frac{r}{2} [2a + (r-1)d] = c$

$$2a + (r-1)d = \frac{2c}{r} \dots(3)$$

समी. (1) को q-r से, समी. (2) को (r-p) से समी. (3) को (p-q) से गुणा करके जोड़ने पर,

$$[2a + (p-1)d](q-r) + [2a + (q-1)d](r-p) + [2a + (r-1)d](p-q)$$

$$= \frac{2a}{p}(q-r) + \frac{2b}{q}(r-p) + \frac{2c}{r}(p-q)$$

$$\Rightarrow \frac{2a}{p}(q-r) + \frac{2b}{q}(r-p) + \frac{2c}{r}(p-q)$$

$$\begin{aligned} &= 2a[q-r+r-p+p-q] + d[(p-1)q-r] \\ &\quad + (q-r)(r-p) + (r-1)(p-q) \\ &= 0 + d[p(q-r) + q(r-p) + r(p-q)] \\ &\quad - [q-r+r-p+p-q] \\ &= d[pq - pr + qr - pq + pr - qr] = 0 \end{aligned}$$

2 से भाग देने पर,

$$\frac{a}{p}(q-r) + \frac{b}{q}(r-p) + \frac{c}{r}(p-q) = 0 \quad \text{सिद्ध हुआ।}$$

प्रश्न 9. यदि  $\frac{a^n + b^n}{a^{n-1} + b^{n-1}}$ , a तथा b के मध्य समांतर माध्य हो तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हल: a और b के बीच समांतर माध्य =  $\frac{a+b}{2}$

$$\Rightarrow \frac{a^n + b^n}{a^{n-1} + b^{n-1}} = \frac{a+b}{2}$$

$$\begin{aligned} &= 2(a^n + b^n) = (a+b)(a^{n-1} + b^{n-1}) \\ &\Rightarrow 2a^n + 2b^n = a^n + ab^{n-1} + a^{n-1}b + b^n \\ &\Rightarrow a^n - ab^{n-1} = a^{n-1}b - b^n \\ &\Rightarrow a(a^{n-1} - b^{n-1}) - a^{n-1}b + b^n = 0 \\ &\Rightarrow a(a^{n-1} - b^{n-1}) - b(a^{n-1} - b^{n-1}) = 0 \\ &\Rightarrow (a-b)(a^{n-1} - b^{n-1}) = 0 \\ &\Rightarrow a = b \text{ या } a^{n-1} = b^{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore a^{n-1} = b^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} = 1$$

अर्थात्  $\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} = 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^0 \Rightarrow n-1 = 0 \text{ या } n = 1$ .

प्रश्न 10. अनुक्रम 7, 77, 777, 7777, ... के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: इस रूप में यह गुणोत्तर श्रेणी नहीं है। तथापि इसे निम्नलिखित रूप में लिखकर गुणोत्तर श्रेणी से संबंध निरूपित किया जा सकता है:

$$\begin{aligned} S_n &= 7 + 77 + 777 + 7777 + \dots \text{ to } n \text{ पदों तक} \\ &= \frac{7}{9} [9 + 99 + 999 + 9999 + \dots \text{ to } n \text{ पदों तक}] \\ &= \frac{7}{9} [(10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + (10^4-1) \\ &\quad + \dots + n \text{ पदों तक}] \end{aligned}$$



$$= \frac{7}{9} [(10 + 10^2 + 10^3 + \dots n \text{ पदों तक}) - (1 + 1 + 1 + \dots n \text{ पदों तक})]$$

$$= \frac{7}{9} \left[ \frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n \right] = \frac{7}{9} \left[ \frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right]$$

प्रश्न 11. अनुक्रम 8, 88, 888, 8888, ... के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए  $S = 8 + 88 + 888 + \dots$  पदों तक

$$= 8 [1 + 11 + 111 + \dots n \text{ पदों तक}]$$

$$= \frac{8}{9} [9 + 99 + 999 + \dots \text{ पदों तक}]$$

$$= \frac{8}{9} [(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \dots n \text{ पदों तक}]$$

$$= \frac{8}{9} [(10 + 100 + 1000 + \dots n \text{ पदों तक}) - n]$$

$$= \frac{8}{9} \left[ \frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n \right] \left[ \because S = \frac{q(r^n - 1)}{r - 1}, a = 10, r = 10 \right]$$

$$= \frac{8}{9} \left[ \frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right]$$

$$= \frac{80}{81} (10^n - 1) - \frac{8}{9} n \quad \text{-उत्तर}$$

प्रश्न 12. श्रेणी  $5 + 55 + 555 + 5555 + \dots$  के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल:  $5 = 5 \times 55 + 555 + \dots n$  पदों तक

$$= \frac{5}{9} [9 + 99 + 999 + \dots n \text{ पदों तक}]$$

$$= \frac{5}{9} [(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \dots n \text{ पदों तक}]$$

$$= \frac{5}{9} \left[ \frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n \right]$$

$$= \frac{5}{9} \left[ \frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right]$$

$$= \frac{50}{81} [10^n - 1] - \frac{5n}{9} \quad \text{-उत्तर}$$

प्रश्न 13. अनुक्रम  $.6 + .66 + .666 + .6666 + \dots$  के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल:  $5 = 0.6 + 0.66 + 0.666 + \dots n$  पदों तक

$$= \frac{6}{9} [0.9 + 0.99 + 0.999 + \dots n \text{ पदों तक}]$$

$$= \frac{2}{3} [(1 - 0.1) + (1 - 0.01) + (1 - 0.001) + \dots n \text{ पदों तक}]$$

$$= \frac{2}{3} [n - \{0.1 + (0.1)^2 + (0.1)^3 + \dots n \text{ पदों तक}\}]$$

$$= \frac{2}{3} \left[ n - \frac{0.1[1 - (0.1)^n]}{1 - 0.1} \right]$$

$$= \frac{2}{3} \left[ n - \frac{1}{9} [1 - (0.1)^n] \right]$$

$$= \frac{2n}{3} - \frac{2}{27} \left( 1 - \frac{1}{10^n} \right)$$

$$= \frac{2n}{3} - \frac{2}{27} (1 - 10^{-n})$$

-उत्तर

प्रश्न 14. यदि दो घनात्मक संख्याओं a तथा b के बीच समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य क्रमशः 10 तथा 8 हैं, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: दिया है A.M.} = \frac{a+b}{2} = 10 \quad \dots(1)$$

$$\text{तथा G.M.} = \sqrt{ab} = 8 \quad \dots(2)$$

(1) तथा (2) से हम पाते हैं

$$a + b = 20 \quad \dots(3)$$

$$ab = 64 \quad \dots(4)$$

(3), (4) से a तथा b का मान सर्वसमिका  $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$  में रखने पर हमें पाते हैं

$$(a-b)^2 = 400 - 256 = 144 \text{ या } a - b = \pm 12$$

(3) तथा (5) को हल करने पर, हम पाते हैं

$$a = 4, b = 16 \text{ या } a = 16, b = 4$$

अतः संख्याएँ a तथा b क्रमशः 4, 16 या 16, 4 हैं।

प्रश्न 15. n का मान ज्ञात कीजिए ताकि  $\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$ , a

तथा b के बीच गुणोत्तर माध्य हो।

हल: a और b के बीच गुणोत्तर माध्य =  $\sqrt{ab}$

$$\Rightarrow \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} = \sqrt{ab}$$

$$\therefore a^{n+1} + b^{n+1} = \sqrt{ab} (a^n + b^n)$$

$$= a^{n+\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} b^{n+\frac{1}{2}}$$

### 38 / जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

$$\text{या } \left( a^{n+1} - a^{n+\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \right) - \left( a^{\frac{1}{2}} b^n + \frac{1}{2} - b^{n+1} \right) = 0$$

$$\text{या } a^{n+\frac{1}{2}} \left( a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right) - b^{n+\frac{1}{2}} \left( a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right) = 0$$

$$\text{या } a^n + \frac{1}{z} \left( a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right) \left( a^{n+\frac{1}{2}} - b^{n+\frac{1}{2}} \right) = 0$$

$$\text{या } a^{n+\frac{1}{2}} \left( a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right) - b^{n+\frac{1}{2}} \left( a^{n+\frac{1}{2}} - b^{n+\frac{1}{2}} \right) = 0$$

$$\text{या } a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\therefore a^{n+\frac{1}{2}} - b^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

$$\text{या } a^{n+\frac{1}{2}} = b^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\text{या } \left( \frac{a}{b} \right)^{n+\frac{1}{2}} = 1 = \left( \frac{a}{b} \right)^0$$

$$\Rightarrow n + \frac{1}{2} = 0 \text{ या } n = -\frac{1}{2}$$

-उत्तर ■

## अध्याय-10

## सरल रेखाएँ

### वस्तुनिष्ठ प्रश्नोत्तर

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनिये-

(1) यदि एक रेखा x-अक्ष की घन दिशा से  $\alpha$  कोण बनाती है तो रेखा का ढाल होगा-

- (अ)  $\tan \alpha$  (ब)  $\cot \alpha$   
(स)  $\sin \alpha$  (द)  $\cos \alpha$

(2) दो रेखाएँ परस्पर लंबवत हैं तो उनके ढालों का गुणनफल होगा-

- (अ) 0 (ब) 1 (स) -1 (द) 2

उत्तर- (1)-(अ), (2)-(स)।

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

(1) क्षैतिज रेखा की ढाल शून्य है और ऊर्ध्वाधर रेखा की ढाल ..... है।

(2) दो रेखाएँ समांतर होती हैं यदि और केवल यदि उनके ढाल ..... हैं।

उत्तर- 1. अपरिभाषित, 2. समान

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए-

(1)  $m_1$  और  $m_2$  ढालों वाली रेखाओं  $L_1$  और  $L_2$  के बीच

का न्यून कोण  $\theta$  हो तो  $\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$ ,  $1 + m_1 m_2 \neq 0$

(2) तीन बिंदु A, B और C सरिख होते हैं यदि और केवल यदि AB की ढाल = BC की ढाल।

उत्तर- (1) सत्य, (2) सत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए-

(1) बिंदु (-2,3) से जाने वाली और ढाल -4 की रेखा का समीकरण लिखिए।

(2) उस रेखा का समीकरण लिखिए जो x-अक्ष और y-अक्ष से क्रमशः -3 और 2 के अंतः खंड बनाती है।

उत्तर- (1)  $4x + y + 5 = 0$ , (2)  $2x - 3y + 6 = 0$ .

प्रश्न 5. यदि दो रेखाओं के बीच का कोण  $\frac{\pi}{4}$  है और एक

रेखा की ढाल  $\frac{1}{2}$  है तो दूसरी रेखा की ढाल ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि  $m_1$  और  $m_2$  ढाल वाली दो रेखाओं के बीच न्यूनकोण  $\theta$  इस प्रकार है कि

$$\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right| \quad \dots(1)$$

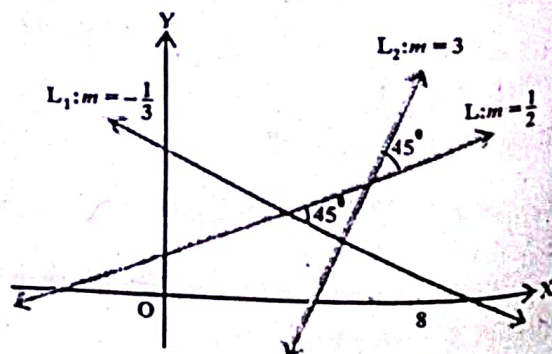
यहाँ  $m_1 = \frac{1}{2}$ ,  $m_2 = m$  और  $\theta = \frac{\pi}{4}$

अब (1) में इन मानों को रखने पर

$$\tan \frac{\pi}{4} = \left| \frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m} \right| \text{ या } 1 = \left| \frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m} \right|$$

जिससे प्राप्त होता है  $\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m} = 1$  या  $-\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m} = -1$

इसलिए,  $m = 3$  या  $m = -\frac{1}{3}$



अतः दूसरी रेखा की ढाल 3 या  $-\frac{1}{3}$  है। आकृति में दो ऊपर

का कारण स्पष्ट किया गया है।

प्रश्न 6. एक रेखा की ढाल दूसरी रेखा की ढाल का दूना है। यदि दोनों के बीच के कोण की स्पर्शज्या (tangent)

$\frac{1}{3}$  है तो रेखाओं की ढाल ज्ञात कीजिए।

हल: माना रेखाओं की ढाल  $m_1, m_2$  हों, तब

$\therefore m_1 = 2m_2$  यदि दोनों रेखाओं के बीच कोण हो, तो

$$\tan \theta = \frac{1}{3}$$

हम जानते हैं कि

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{1}{3} \quad \text{जहाँ } m_1 = 2m_2$$

$$\therefore \pm \frac{2m_2 - m_2}{1 + 2m_2^2} = \frac{1}{3} \quad \text{या} \quad \pm \frac{m_2}{1 + 2m_2^2} = \frac{1}{3}$$

घनात्मक चिह्न लेने पर,

$$\therefore 1 + 2m_2^2 = 3m_2$$

$$\text{या } 2m_2^2 - 3m_2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (m_2 - 1)(2m_2 - 1) = 0$$

$$\therefore m_2 = 1, \frac{1}{2}$$

$m_1 = 2m_2$  में  $m_2 = 1$  रखने पर,

$$m_1 = 1 \times 2 = 2$$

रेखाओं की ढाल 2 और 1 है क्या  $1, \frac{1}{2}$  है।

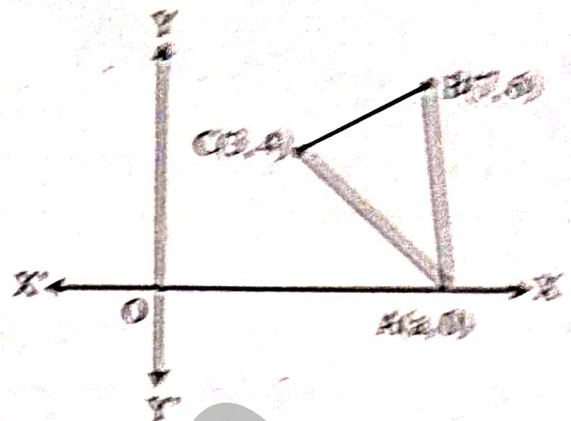
-ve चिह्न लेने पर,  $1 + 2m_2^2 = -3m_2$  या  $2m_2^2 + 3m_2 + 1 = 0$

$$\text{या } (m_2 + 1)(2m_2 + 1) = 0 \quad \text{अर्थात् } m_2 = -1 - \frac{1}{2}$$

$\therefore$  रेखा की ढाल -2, -1, तथा  $-1, -\frac{1}{2}$  - उत्तर

प्रश्न 7. x-अक्ष पर एक बिन्दु ज्ञात कीजिए जो (7,6) और (3,4) बिन्दुओं से समान दूरी पर है।

हल: मान लीजिए x-अक्ष पर बिन्दु A(a,0), बिन्दु B(7,6) और C(3,4) से समान दूरी पर है।



अर्थात्  $AB = AC$

या  $AB^2 = AC^2$

$$\text{या } (a-7)^2 + (0-6)^2 = (a-3)^2 + (0-4)^2$$

$$\therefore a^2 - 14a + 49 + 36 = a^2 - 6a + 9 + 16$$

$$-14a + 6a = 25 - 35 = -10$$

$$\text{या } -8a = -10$$

$$\text{या } a = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

अतः बिन्दु A के निर्देशांक  $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$  हैं। - उत्तर

प्रश्न 8. x का वह वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिन्दु (x, -1), (2, 1) और (4, 5) संरेख हैं।

हल: मान लीजिए बिन्दु A(x-1), B(2,1) C(4,5) संरेख हैं यदि

$$AB \text{ की ढाल} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-1)}{2 - x} = \frac{2}{2 - x} \quad \dots (1)$$

$$BC \text{ की ढाल} = \frac{5 - 1}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \dots (2)$$

$\therefore$  समीकरण (1) और (2) से,

$$\frac{2}{2 - x} = 2$$

या  $1 = 2 - x$

$$x = 1$$

- उत्तर

प्रश्न 9. यदि तीन बिन्दु (h,0), (a,b) और (0,k) एक

रेखा पर है तो दिखाइए कि  $\frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1$

हल: मान लीजिए बिन्दु A (h, 0), B(a, b), तथा C(0, k) एक रेखा पर हों, तब

$$\therefore AB \text{ की ढाल} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{b - 0}{a - h} = \frac{b}{a - h}$$

$$BC \text{ की ढाल} = \frac{k - b}{0 - a} = \frac{k - b}{-a}$$

40 / जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

$\Rightarrow AB$  की ढाल =  $BC$  की ढाल

$$\therefore \frac{b}{a-h} = \frac{k-b}{-a}$$

या  $(a-h)(k-b) = -ab$

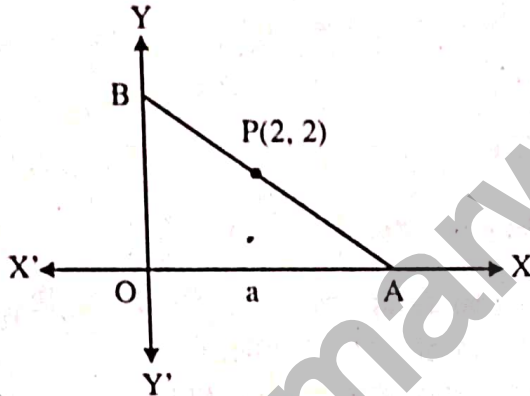
या  $ak - ab - hk + hb = -ab$

$$\therefore ak + hb = hk$$

hk से भाग देने पर,  $\frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1$  -उत्तर

प्रश्न 10. बिन्दु  $(2, 2)$  से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके द्वारा अक्षों से कटे अंतः खंडों का योग 9 है।

हल: मान लीजिए  $P(2, 2)$  से होकर जाने वाली रेखा से अक्षों पर बने अंतः खंड  $a$  तथा  $b$  है।



अतः खंड रूप में रेखा का समीकरण  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

यह रेखा  $P(2, 2)$  से होकर जाती है।

$$\therefore \frac{2}{a} + \frac{2}{b} = 1$$

दिया है कि अंतः खंडों का योग 9 है।

$$\therefore a + b = 9, b = 9 - a$$

$b$  का मान (1) में रखने पर

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{9-a} = 1 \text{ या } 2(9-a) - 2a = a(9-a)$$

$$18 - 2a + 2a = 9a - 2a^2$$

$$\text{या } a^2 - 9a + 18 = 0$$

$$\text{या } (a-6)(a-3) = 0$$

$$a = 6.3, b = 3.6$$

जब  $a = 6$  तथा  $b = 3$  हो, तो रेखा का अभीष्ट समीकरण

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \text{ या } 3x + 6y = 18 \text{ या } x + 2y = 6.$$

जब  $a = 3$  तथा  $b = 6$  हो, तब रेखा का अभीष्ट समीकरण

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$$

$$\text{या } 6x + 3y = 18 \text{ या } 2x + y = 6$$

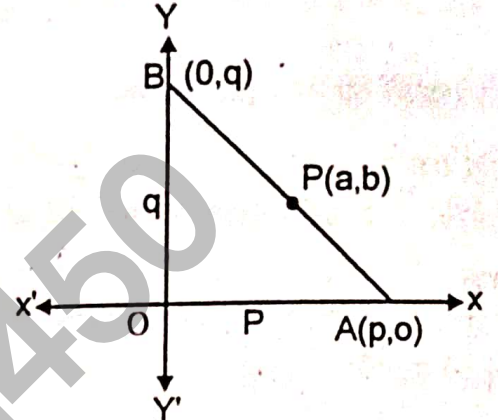
-उत्तर

प्रश्न 11. अक्षों के बीच रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु  $P(a, b)$

है। दिखाइए कि रेखा का समीकरण  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$  है।

हल: मान रेखा  $AB$  अक्षों पर  $p$  और  $q$  अंतः खंड बनते हैं।

$\therefore$  बिन्दु  $A$  और  $B$  के क्रमशः निर्देशांक  $(p, 0)$  और  $(0, q)$  हैं।



$AB$  के मध्य बिन्दु  $P(a, b)$  इस प्रकार ज्ञात करेंगे।

$$\frac{O+P}{2} = a \text{ और } \frac{q+O}{2} = b \therefore p = 2a \text{ और } q = 2b$$

अंतः खंड रूप में रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

$$\text{या } \frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} = 1 \text{ या } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$$

-उत्तर

प्रश्न 12.  $y - \sqrt{3}x - 5 = 0$  और  $\sqrt{3}y - x + 6 = 0$  रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल: दी हुई रेखाएँ-

$$y - \sqrt{3}x - 5 = 0 \text{ या } y = \sqrt{3}x + 5 \quad \dots(1)$$

$$\text{और } \sqrt{3}y - x + 6 = 0 \text{ या } y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 2\sqrt{3} \quad \dots(2)$$

रेखा (1) की ढाल  $m_1 = \sqrt{3}$  और रेखा (2) की ढाल  $m_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  है।

दोनों रेखाओं के बीच न्यूनकोण (माना कि  $\theta$ ) इस प्रकार है

$$\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$$

$m_1$  और  $m_2$  के (3) में रखने पर,

$$\tan \theta = \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} \right| = \left| \frac{1-3}{2\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

जिससे  $\theta = 30^\circ$  प्राप्त होता है। अतः दोनों रेखाओं के बीच कोण या तो  $30^\circ$  या  $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$  है।

-उत्तर

प्रश्न 13. रेखाओं  $\sqrt{3}x - y = 1$  और  $x + \sqrt{3}y = 1$  के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल: पहली रेखा-  $\sqrt{3}x + y = 1$  या  $y = -\sqrt{3}x + 1$   
 ढाल  $= -\sqrt{3} = m_1$

दूसरी रेखा:  $x + \sqrt{3}y = 1$  या  $y = \frac{1}{\sqrt{3}} - x + \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$  ढाल  $= -\frac{1}{\sqrt{3}} = m_2$

दो रेखाओं के बीच कोण  $\theta$  हो, तब

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{(-\sqrt{3}) - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + (-\sqrt{3})\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \right|$$

$$= \left| \frac{-\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1} \right| = \left| \frac{-3 + 1}{2\sqrt{3}} \right| = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ रेडियन।}$$

प्रश्न 14. दर्शाइए कि दो रेखाएँ  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  और  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ , जहाँ  $b_1b_2 \neq 0$

(i) समांतर हैं यदि  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$  और (ii) लंब है यदि  $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ .

हल: दी गई रेखाएँ ऐसे लिखी जा सकती हैं

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1} \quad \dots(1)$$

और  $y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2} \quad \dots(2)$

रेखाओं (1) और (2) की ढाल क्रमशः  $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$  और

$$m_2 = -\frac{a_2}{b_2} \text{ हैं।}$$

अब (i) रेखाएँ समांतर होंगी, यदि  $m_1 = m_2$  जिससे प्राप्त

होता है  $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$  या  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

(ii) रेखाएँ लंब होंगी, यदि  $m_1 m_2 = -1$ , जिससे प्राप्त होता है

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = -1 \text{ या } a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0 \quad \text{- उत्तर}$$

प्रश्न 15. यदि  $p$  मूल बिन्दु से उस रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई हो जिस पर अक्षों पर कटे अंतः खण्ड  $a$  और

$b$  हो, तो दिखाइए कि  $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

हल: उस रेखा का समीकरण, जिसकी अक्षों पर कटे अंतः खण्ड  $a$  और  $b$  हो,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ (अंतः खण्ड समीकरण)}$$

मूल बिन्दु  $(0,0)$  उसे इस रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \quad \left[ \text{यदि } = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right]$$

$= p$  (दिया गया है)

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}, \quad p^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad \text{- उत्तर ■}$$

## अध्याय-11

## शंकु- परिच्छेद

### वस्तुनिष्ठ प्रश्नोत्तर

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए-

(1) परवलय  $y^2 = 4ax$  की नियता है-

- (अ)  $x = -a$  (ब)  $x = a$   
 (स)  $y = a$  (द)  $y = -a$

(2) दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  की नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई है-

- (अ)  $l = \frac{b^2}{a^2}$  (ब)  $l = \frac{b^2}{a}$   
 (स)  $l = \frac{a^2}{b}$  (द)  $l = \frac{a^2}{b^2}$

उत्तर- (1) (अ), (2) (ब)।

**प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-**

- (1) वृत्त, तल के उन बिन्दुओं का समुच्चय होता है जो तल के एक स्थिर बिंदु से ..... दूरी पर होते हैं।  
 (2) दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता, दीर्घवृत्त के केंद्र से नाभि और केंद्र से शीर्ष की दूरियों का ..... है।

उत्तर- (1) समान, (2) अनुपात।

**प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए-**

- (1) वृत्त  $x^2 + y^2 = 4$  का केंद्र (0,0) है।  
 (2) परवलय  $x^2 = 4ay$  की नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई  $2a$  है।

उत्तर- (1) सत्य, (2) असत्य।

**प्रश्न 4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए-**

- (1) केंद्र (0,0) तथा त्रिज्या  $r$  वाले वृत्त का समीकरण कीजिए।  
 (2) परवलय  $y^2 = 12x$  की नाभि के निर्देशांक लिखिए।

उत्तर- (1)  $x^2 + y^2 = r^2$ , (2) (3,0)।

**प्रश्न 5. वृत्त  $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$  का केंद्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए।**

हल-  $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0$

$$[x^2 - 8x] + [y^2 + 10y] = 12$$

$$\text{या } [x^2 - 8x + 16] + [y^2 + 10y + 25] = 12 + 16 + 25$$

$$(x - 4)^2 - (y + 5)^2 = 53$$

$$\therefore \text{केंद्र } (4, -5), \text{ त्रिज्या} = \sqrt{53}$$

**प्रश्न 6. वृत्त  $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 8 = 0$  का केंद्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए।**

हल: दिया गया समीकरण

$$(x^2 + 8x) + (y^2 + 10y) = 8$$

अब कोष्ठकों को पूर्ण वर्ग बनाने पर,

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 + 10y + 25) = 8 + 16 + 25$$

$$\text{या } (x + 4)^2 + (y + 5)^2 = 49$$

$$\text{या } \{x - (-4)\}^2 + \{y - (-5)\}^2 = 7^2$$

अतः वृत्त का केंद्र (-4, -5) व त्रिज्या 7 इकाई है।

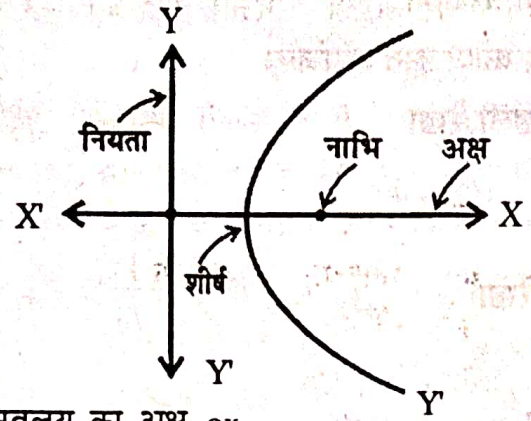
**प्रश्न 7. परवलय  $y^2 = 12x$  की नाभि के निर्देशांक, परवलय का अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।**

हल: परवलय का समीकरण,  $y^2 = 12x$

$\therefore y^2 = 4ax$  से तुलना करने पर

$$4a = 12 \text{ या } a = 3$$

(i) नाभि के निर्देशांक (a,0) या (3,0)



(ii) परवलय का अक्ष  $ox$

इसका समीकरण  $y = 0$

(iii) नियता का समीकरण:  $x = -a$  अर्थात्  $x = -3$

(iv) नाभिलंब जीवा की लंबाई  $= 4a = 12$

**प्रश्न 8. परवलय  $y^2 = -8x$  की नाभि के निर्देशांक, परवलय का अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।**

हल:  $y^2 = -8x$ . यहाँ  $4a = 8 \Rightarrow 2$ । इसलिए नाभिलम्ब की लम्बाई  $4a = 8$  है। परवलय की नाभि शीर्ष O के बायीं ओर  $a$  दूरी पर स्थित है। इसलिए नाभि के निर्देशांक  $(-a, 0) = (-2, 0)$  हैं। यहाँ परवलय का अक्ष, ऋणात्मक  $x$ -अक्ष है जिसका समीकरण  $y = 0$  है। परवलय की नियता शीर्ष O के दायीं ओर  $a = 2$  दूरी पर है तथा यह परवलय की अक्ष पर लम्ब है। इसलिए नियता का समीकरण  $x = a$ , अर्थात्  $x = 2$  है।

**प्रश्न 9. परवलय  $x^2 = -9y$  की नाभि के निर्देशांक, परवलय का अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।**

हल: परवलय का समीकरण  $x^2 = -9y$

$$4a = 9 \text{ या } a = \frac{9}{4}$$

(i) नाभि  $(0 - a)$  के निर्देशांक  $(0, -\frac{9}{4})$

(ii) परवलय का अक्ष:  $y$ -अक्ष, समीकरण  $x = 0$

(iii) नियता  $y = a$  का समीकरण  $y = \frac{9}{4}$

(iv) नाभिलंब जीवा की लंबाई  $4a = 9$ ।

**प्रश्न 10. परवलय  $x^2 = -16y$  की नाभि के निर्देशांक, परवलय का अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।**

हल: परवलय का समीकरण  $x^2 = -16y$

$$\therefore 4a = 16 \text{ या } a = 4$$

नियता

(i) नाभि  $f(0, -a)$  के निर्देशांक  $(0, -4)$

(ii) परवलय अक्ष का समीकरण  $x = 0$ .

(iii) नियता  $y = 0$  का समीकरण  $y = 4$ .

(iv) नाभिलंब जीवी की लम्बाई  $4a = 16$

प्रश्न 11. दीर्घवृत्त  $9x^2 + 16y^2 = 144$  के लिए दीर्घ अक्ष, लघु अक्ष की लम्बाइयाँ, नाभियों के निर्देशांक, शीर्ष और उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

हल: दीर्घवृत्त  $9x^2 + 16y^2 = 144$

या दीर्घवृत्त का समीकरण  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$a^2 = 16$ ,  $b^2 = 9$  अर्थात्  $a = 4$ ,  $b = 3$

$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$

$\therefore c = \sqrt{7}$

नाभि के निर्देशांक  $(+c, 0)$  या  $(\pm \sqrt{7}, 0)$

शीर्ष के निर्देशांक  $(\pm a, 0)$  या  $(\pm 4, 0)$

दीर्घ अक्ष की लम्बाई  $= 2a = 2 \times 4 = 8$

लघु अक्ष की लम्बाई  $= 2b = 2 \times 3 = 6$

उत्केन्द्रता  $= \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

नाभिलंब जीवा की लंबाई  $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{4} = \frac{9}{2}$

प्रश्न 12. दीर्घवृत्त  $4x^2 + 9y^2 = 36$  के लिए दीर्घ अक्ष, लघु अक्ष की लम्बाइयाँ, नाभियों के निर्देशांक, शीर्ष और उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

हल:  $4x^2 + 9y^2 = 36$

या दीर्घवृत्त का समीकरण  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

दीर्घ अक्ष  $x$ -अक्ष के अनुदिश है।

$\therefore a^2 = 9$ ,  $b^2 = 4$

$a = 3$ ,  $b = 2$

$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$

$\therefore c = \sqrt{5}$

नाभियों के निर्देशांक  $(\pm c, 0)$  या  $(\pm \sqrt{5}, 0)$

शीर्ष के निर्देशांक  $(\pm a, 0)$  या  $(\pm 3, 0)$

दीर्घ अक्ष की लम्बाई  $= 2a = 2 \times 3 = 6$

लघु अक्ष की लम्बाई  $= 2b = 2 \times 2 = 4$

नाभिलंब जीवा की लम्बाई  $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3}$

उत्केन्द्रता  $= \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

प्रश्न 13. दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$  की लिए दीर्घ अक्ष, लघु अक्ष की लम्बाइयाँ, नाभियों के निर्देशांक, शीर्ष और उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

हल: क्योंकि  $\frac{x^2}{25}$  हर,  $\frac{y^2}{9}$  हर से बड़ा है, इसलिए दीर्घ अक्ष  $x$ -अक्ष के अनुदिश है। दिए गए

समीकरण की  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , से तुलना करने पर

$a = 5$  और  $b = 3$

साथ ही  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$

अतः नाभियों के निर्देशांक  $(-4, 0)$  और  $(4, 0)$  है, शीर्षों के निर्देशांक  $(-5, 0)$  और  $(5, 0)$  हैं। दीर्घ अक्ष की लंबाई  $2a = 10$  इकाइयाँ, लघु अक्ष की लंबाई  $2b = 6$  इकाइयाँ और उत्केन्द्रता

$\frac{4}{5}$  और नाभिलंब  $\frac{2b^2}{a} = \frac{18}{5}$  है।

## अध्याय-12

## त्रिविमीय ज्यामिती का परिचय

### वस्तुनिष्ठ प्रश्नोत्तर

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए-

(1) दो बिन्दुओं  $(x_1, y_1)$  और  $(x_2, y_2)$  के बीच की दूरी होती है-

(अ)  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

(ब)  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$

(स)  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$

(द)  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

(2) YZ-तल पर  $x$ -निर्देशांक का मान होता है-

(अ)  $z$  (ब)  $x$  (स)  $y$  (द)  $0$

उत्तर- (1)-(अ), (2)-(द)।

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

(1)  $x$ -अक्ष और  $y$ -अक्ष दोनों एक साथ मिलकर एक तल बनाते हैं। उस तल को ..... तल कहते हैं।

(2) निर्देशांक तल अंतरिक्ष को ..... अष्टांग में विभाजित करते हैं।

44 / जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

उत्तर- (1) xy-तल (2) 8.

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए-

(1) x-अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक (x, 0, 0) होते हैं।

(2) बिन्दु (1, 0, 2) की x- अक्ष से दूरी 1 है।

(3) अंतरिक्ष में स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक (x, y, z) के रूप में होते हैं।

(4) मूल बिन्दु के निर्देशांक (0, 0, 0) होते हैं।

(5) XY- तल में किसी बिन्दु के निर्देशांक (x, y, 0) होते हैं।

उत्तर- (1) सत्य, (2) असत्य, (3) सत्य, (4) सत्य, (5) सत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए-

(1) निर्देशांक ताल अंतरिक्ष को कितने अष्टांग में विभाजित करते हैं?

(2) एक बिन्दु x-अक्ष पर स्थित है। इसके y-निर्देशांक तथा z-निर्देशांक क्या हैं?

(3) बिन्दु (1, 0, 2) किस तल पर स्थित है?

(4) बिन्दु (1, 3, 2) किस अष्टांश में स्थित है?

(5) बिन्दु (-1, 3, -2) अष्टांश में स्थित है?

उत्तर- (1) 8, (2) y-निर्देशांक = 0. तथा z-निर्देशांक = 0  
(3) zx-तल पर, (4) 1-अष्टांश, (5) VI-अष्टांश।

प्रश्न 5. बिन्दुओं P(1, -3, 4) और Q(-4, 1, 2) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: PQ बिन्दुओं P(1, -3, 4) और Q(-4, 1, 2) के बीच की दूरी है।

$$PQ = \sqrt{(-4-1)^2 + (1+3)^2 + (2-4)^2}$$

$$= \sqrt{25+16+4}$$

$$= \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ इकाई}$$

-उत्तर

प्रश्न 6. बिन्दुओं (2, 3, 5) और (4, 3, 1) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: दो बिन्दु (x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>, z<sub>1</sub>) और (x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>, z<sub>2</sub>) की बीच की

$$\text{दूरी} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

बिन्दु (2, 3, 5) और (4, 3, 1) की बीच की दूरी

$$= \sqrt{(4-2)^2 + (3-3)^2 + (1-5)^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 0^2 + (-4)^2} \Rightarrow \sqrt{4+16}$$

$$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

-उत्तर

प्रश्न 7. बिन्दुओं (-3, 7, 2) और (2, 4, -1) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: बिन्दु (-3, 7, 2) और (2, 4, -1) के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(2+3)^2 + (4-7)^2 + (-1-2)^2}$$

$$= \sqrt{25+9+9} = \sqrt{43}$$

-उत्तर

प्रश्न 8. बिन्दुओं (-1, 3, -4) और (1, -3, 4) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: बिन्दु (-1, 3, -4) और (1, -3, 4) के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(1+1)^2 + (-3-3)^2 + (4+4)^2}$$

$$= \sqrt{4+36+64} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

-उत्तर

प्रश्न 9. बिन्दुओं (2, -1, 3) और (-2, 1, 3) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: बिन्दु (2, -1, 3) और (-2, 1, 3) के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(-2-2)^2 + (1+1)^2 + (3-3)^2}$$

$$= \sqrt{16+4+0} = \sqrt{20} = \sqrt{5}$$

-उत्तर

प्रश्न 10. दर्शाइए कि P(-2, 3, 5), Q(1, 2, 3) और R(7, 0, -1) संरेख हैं।

हल: यहाँ, AB =  $\sqrt{(-2-1)^2 + (3-2)^2 + (5-3)^2}$

$$= \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

$$BC = \sqrt{(1-7)^2 + (2-0)^2 + (3+1)^2}$$

$$= \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

$$\text{और } AC = \sqrt{(-2-7)^2 + (3-0)^2 + (5+1)^2}$$

$$= \sqrt{81+9+36} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$$

स्पष्टतः AB + BC = AC. अतः दिये हुए बिन्दु A, B, C संरेख हैं।

- इति सिद्धम्.

प्रश्न 11. बिन्दुओं (1, -2, 3) और (3, 4, -5) को मिलाने से बने रेखाखंड को 2:3 में अंतः विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए P(x, y, z), A(1, -2, 3) और B(3, 4, -5) को मिलाने वाले रेखा खंड को अंतः 2:3 में विभक्त करता है।

$$\text{इसलिए, } x = \frac{2(3)+3(1)}{2+3} = \frac{9}{5}, y = \frac{2(4)+3(-2)}{2+3} =$$

$$\frac{2}{5}, \text{ और } z = \frac{2(-5)+3(3)}{2+3} = \frac{-1}{5}$$



अतः अभीष्ट बिंदु  $\left(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$  है।

-उत्तर

प्रश्न 12. बिन्दुओं (1, -2, 3) और (3, 4, -5) को मिलाने से बने रेखाखंड को 2:3 में बाह्यतः विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए P(x, y, z), A(1, -2, 3) और B(3, 4, -5) को मिलाने वाले रेखा खंड को बाह्य अनुपात 2:3 में बाह्य विभक्त करता है।

$$\text{इसलिए, } x = \frac{2(3) + (-3)(1)}{2 + (-3)} = -3,$$

$$y = \frac{2(4) + (-3)(-2)}{2 + (-3)} = -14$$

$$\text{और } z = \frac{2(-5) + (-3)(3)}{2 + (-3)} = 19$$

अतः अभीष्ट बिंदु (-3, -14, 19) है।

-उत्तर

प्रश्न 13. विभाजन सूत्र का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि बिंदु (-4, 6, 10), (2, 4, 6) और (14, 0, -2) संरेख हैं।

हल: मान लीजिए A (-4, 6, 10), B (2, 4, 6) और C(14, 0, -2) दिए गए बिंदु हैं। मान लीजिए बिंदु P, AB को k : 1 में विभाजित करता है। तो P के निर्देशांक हैं:

$$\left(\frac{2k-4}{k+1}, \frac{4k+6}{k+1}, \frac{6k+10}{k+1}\right)$$

आइये अब हम जाँच करें कि k के किसी मान के लिए बिंदु P, बिंदु C के संपाती हैं।

$$\frac{2k-4}{k+1} = 14 \text{ रखने पर प्राप्त होता है } k = -\frac{3}{2}$$

$$\text{जब } k = -\frac{3}{2} \text{ हो तो } \frac{4k+6}{k+1} = \frac{4\left(-\frac{3}{2}\right)+6}{-\frac{3}{2}+1} = 0$$

$$\text{और } \frac{6k+10}{k+1} = \frac{6\left(-\frac{3}{2}\right)+10}{-\frac{3}{2}+1} = -2$$

इसलिए C(14, 0, -2) वह बिंदु है जो AB को 3:2 अनुपात में बाह्य विभक्त करता है और वही P है। अतः A, B व C संरेख है।

प्रश्न 14. बिन्दुओं (4, 8, 10) और (6, 10, -8) को मिलाने वाले रेखाखंड, YZ- तल द्वारा जिस अनुपात में विभक्त होता है, उसे ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए YZ-तल बिंदु P(x, y, z) पर, A(4, 8, 10) और B(6, 10, -8) को मिलाने वाला रेखा खंड को k:1 में विभक्त करता है। तो बिंदु P के निर्देशांक हैं:

$$\left(\frac{4+6k}{k+1}, \frac{8+10k}{k+1}, \frac{10-8k}{k+1}\right)$$

क्योंकि P, YZ-तल पर स्थित है इसलिए इसका x-निर्देशांक शून्य है।

$$\text{अतः } \frac{4+6k}{k+1} = 0 \text{ या } k = -\frac{2}{3}$$

इसलिए YZ-तल AB को 2:3 के अनुपात में बाह्य विभाजित करता है।

-उत्तर ■

## अध्याय-13 सीमा और अवकलज

### वस्तुनिष्ठ प्रश्नोत्तर

प्रश्न 1. सही जोड़ी मिलाइए-

स्तम्भ-(अ)

स्तम्भ-(ब)

(1)  $\lim_{x \rightarrow 3} [x(x+1)]$

(अ)  $\cos x$

(2)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$

(ब)  $nx^{n-1}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

(स) 1

(4)  $\frac{d}{dx} (x^n)$

(द)  $na^{n-1}$

(5)  $\frac{d}{dx} (\sin x)$

(इ) 12

उत्तर- (1)-(इ), (2)-(द), (3)-(स), (4)-(ब), (5)-(अ)।

प्रश्न 2. सही जोड़ी मिलाइए-

स्तम्भ-(अ)

स्तम्भ-(ब)

(1)  $\frac{d}{dx} (\tan x)$

(अ)  $\cos x$

(2)  $\frac{d}{dx} (\cot x)$

(ब)  $-\sin x$

(3)  $\frac{d}{dx} (\cos x)$

(स)  $-\cos e^{x^2}$

46 / जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

(4)  $\frac{d}{dx}(x^n)$

(द)  $\sec^2 x$

$= \frac{a}{b}$

$[\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1]$  -उत्तर

(इ)  $\frac{d}{dx}(\sin x)$

( F nx<sup>n-1</sup> )

प्रश्न 8.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}}$  का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर- (1) (द), (2) (स), (3) (ब), (4) (इ), (5) (अ)।

प्रश्न 3.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x+3}{x-2}$  का मान ज्ञात कीजिए।

हल:  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}}$  में  $x = \frac{\pi}{2} + h$  रखने पर,

हल:  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x+3}{x-2} = \frac{4 \times 4 + 3}{4 - 2}$

$= \frac{16+3}{2} = \frac{19}{2}$

-उत्तर

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan 2\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi + 2h)}{h}$

प्रश्न 4.  $\lim_{x \rightarrow -1} [1 + x + x^2 + \dots + x^{10}]$  का मान ज्ञात कीजिए।

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 h}{2h} \cdot \frac{2}{\cos^2 h}$

हल:  $\lim_{x \rightarrow -1} [1 + x + x^2 + \dots + x^{10}]$

$= 1 + (-1) + (-1)^2 + \dots + (-1)^{10}$

$= 1 - 1 + 1 + \dots + 1 = 1.$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\cos^2 h}$   $[\because \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{2h} = 1]$

$= \frac{2}{\cos \theta} = \frac{2}{1} = 2$

-उत्तर

प्रश्न 5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x}$  मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 9.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi(\pi - x)}$  का मान ज्ञात कीजिए।

हल:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot 2 \right]$

$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin 4x}{4x} \right] \div \left[ \frac{\sin 2x}{2x} \right]$

$= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin 4x}{4x} \right] \div \lim_{2x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin 2x}{2x} \right]$

$= 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$  (जब  $x \rightarrow 0$ ,  $4x \rightarrow 0$  तथा  $2x \rightarrow 0$ )

हल:  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi(\pi - x)}$

$\pi - x = \theta$  लीजिए, जब  $x \rightarrow \pi$ ,  $\theta \rightarrow 0$

$\therefore \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin \pi - x}{(\pi - x)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\pi \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin \theta}{\theta} \right)$

$= \frac{1}{\pi}$

-उत्तर

प्रश्न 6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$  का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 10.  $x^{-3/2}$  का अवकलन ज्ञात कीजिए।

हल:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin ax}{ax} \right) \left( \frac{bx}{\sin bx} \right) \times \frac{a}{b}$

हल:  $\frac{d}{dx} x^{-3/2} = \frac{-3}{2} x^{-3/2-1} = -\frac{3}{2} x^{-5/2}$  -उत्तर

$= 1 \times 1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

-उत्तर

प्रश्न 11.  $x = 2$  पर फलन  $f(x) = 3x$  का अवकलन ज्ञात कीजिए।

हल: हम पाते हैं:

प्रश्न 7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin ax}{bx} \right)$  का मान ज्ञात कीजिए।

$f(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

हल:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin ax}{bx} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{a}{b}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(2+h) - 3(2)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6+3h-6}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 3 = 3$$

अतः  $x = 2$  पर फलन  $3x$  का अवकलज 3 है। -उत्तर

प्रश्न 12.  $x = 0$  पर फलन  $\sin x$  का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए  $f(x) = \sin x$  तब

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{-उत्तर}$$

प्रश्न 13.  $f(x) = 10x$  का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: हम पाते हैं  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10(x+h) - 10(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (10) = 10$$

प्रश्न 14.  $f(x) = x^2$  अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: हम पाते हैं  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2x) = 2x \quad \blacksquare$$

## अध्याय-15

## सांख्यिकी

### वस्तुनिष्ठ प्रश्नोत्तर

प्रश्न 1. एक शब्द या वाक्य में उत्तर दीजिए-

- (1) आँकड़ों के परिसर को परिभाषित कीजिए।
- (2) यदि एक बल्लेबाज द्वारा खेल में अधिकतम 60 रन और न्यूनतम 46 रन बनाए जाते हैं तो रनों का परिसर ज्ञात कीजिए।
- (3) निम्नलिखित आँकड़ों से माध्य का मान लिखिए-  
6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12
- (4) निम्नलिखित आँकड़ों से माध्यिका का मान लिखिए-  
3, 9, 5, 3, 12, 10, 18, 4, 7, 19, 21
- (5) निम्नलिखित आँकड़ों से माध्यिका का मान लिखिए-  
4, 10, 6, 4, 13, 11, 19, 5, 8, 20

उत्तर- (1) किसी शृंखला के अधिकतम एवं न्यूनतम मानों के अंतर को परिसर कहते हैं। (2) परिसर =  $60-46 = 14$ , (3) 9, (4) 9, (5) 9.

प्रश्न 2. निम्नलिखित अवर्गीकृत आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए-

6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

हल: हम क्रमबद्ध आगे बढ़ते हुए निम्नलिखित प्राप्त करते हैं:

चरण 1. दिए गए आँकड़ों का माध्य

$$\bar{x} = \frac{6+7+10+12+13+4+8+12}{8} = \frac{72}{8} = 9 \text{ है।}$$

चरण 2. प्रेक्षणों के माध्य  $\bar{x}$  से क्रमशः विचलन  $x_i - \bar{x}$  अर्थात् 6-9, 7-9, 10-9, 12-9, 13-9, 4-9, 8-9, 12-9 हैं।

या -3, -2, 1, 3, 4, -5, -1, 3 हैं।

चरण 3. विचलनों के निरपेक्ष मान  $|x_i - \bar{x}|$

3, 2, 1, 3, 4, 5, 1, 3 हैं।

चरण 4. माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन निम्नलिखित है-

$$\text{M.D. } (\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}$$

$$= \frac{3+2+1+3+4+5+1+3}{8} = \frac{22}{8} = 2.75 \quad \text{उत्तर}$$

प्रश्न 3. निम्नलिखित अवर्गीकृत आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 17

हल: समांतर माध्य  $\bar{x} = \frac{4+7+8+9+10+12+13+17}{8}$

$$= \frac{80}{8} = 10$$

$$\begin{aligned} \sum |x_i - \bar{x}| &= |4-10| + |7-10| + |8-10| + |9-10| \\ &+ |10-10| + |12-10| + |13-10| + |17-10| \\ &= 6+3+2+1+0+2+3+7 = 24 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन MD}(\bar{x}) = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

$$= \frac{24}{8} = 3$$

-उत्तर

प्रश्न 4. निम्नलिखित आँकड़ों से माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए-

3, 9, 5, 3, 12, 10, 18, 4, 7, 19, 21

48 / जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

हल: यहाँ प्रक्षेपों की संख्या 11 है जो विषम है। आँकड़ों को आरोही क्रम में लिखने पर हमें 3, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 18, 19, 21 प्राप्त होता है।

अब माध्यिका =  $\left(\frac{11+1}{2}\right)$  वाँ या 6वाँ प्रेक्षण = 9 है।

विचलनों का क्रमशः निरपेक्ष मान  $|x_i - M|$  इस प्रकार से है।  
6, 6, 5, 4, 2, 0, 1, 3, 9, 10, 12

इसलिए  $\sum_{i=1}^{11} |x_i - M| = 58$

तथा  $M.D.(M) = \frac{1}{11} \sum_{i=1}^{11} |x_i - M| = \frac{1}{11} \times 58 = 5.27$

प्रश्न 5. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

$x_i$	2	5	6	8	10	12
$f_i$	2	8	10	7	8	5

हल: आइए दिए गए आँकड़ों की सारणी बनाकर अन्य स्तंभ परिकलन के बाद लगाएँ

सारणी

$x_i$	$f_i$	$f_i x_i$	$ x_i - \bar{x} $	$f_i  x_i - \bar{x} $
2	2	4	5.5	11
5	8	40	2.5	20
6	10	60	1.5	15
8	7	56	0.5	3.5
10	8	80	2.5	20
12	5	60	4.5	22.5
	40	300		92

$N = \sum_{i=1}^6 f_i = 40, \sum_{i=1}^6 f_i x_i = 300, \sum_{i=1}^6 f_i |x_i - \bar{x}| = 92$

इसलिए  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^6 f_i x_i = \frac{1}{40} \times 300 = 7.5$

और  $M.D.(\bar{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^6 f_i |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{40} \times 92 = 2.3$

प्रश्न 6. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए-

$x_i$	10	30	50	70	90
$f_i$	4	24	28	16	8

हल: समान्तर माध्य की गणना-

चर $x_i$	बारम्बारता $f_i$	गुणनफल $f_i x_i$
10	4	40
30	24	720
50	28	1400
70	16	1120
90	8	720
	$\Sigma f = 80$	$\Sigma f_i x_i = 4000$

इसलिए, समान्तर माध्य  $M = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{4000}{80} = 50$ .

माध्य विचलन की गणना (जब  $M = 50$ ):

$x_i$	$f_i$	$d = x_i - M$	$ d $	$f_i  d $
10	4	10-50 = -40	40	160
30	24	30-50 = -20	20	480
50	28	50-50 = 0	00	000
70	16	70-50 = 20	20	320
90	8	90-50 = 40	40	320
	$\Sigma f_i = 80$			$\Sigma f_i  d  = 1280$

अतः माध्य विचलन =  $\frac{\Sigma f_i |d|}{\Sigma f_i} = \frac{1280}{80} = 16$  - उत्तर

प्रश्न 7. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए-

प्राप्तांक	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
छात्रों की संख्या	2	3	8	14	8	3	2

हल: दिए गए आँकड़ों से निम्न सारणी बनाते हैं।

सारणी

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या $f_i$	मध्य-बिंदु $x_i$	$f_i x_i$	$ x_i - \bar{x} $	$f_i  x_i - \bar{x} $
10-20	2	15	30	30	60
20-30	3	25	75	20	60

30-40	8	35	280	10	80
40-50	14	45	630	0	0
50-60	8	55	440	10	80
60-70	3	65	195	20	60
70-80	2	75	150	30	60
	40		1800		400

यहाँ  $N = \sum_{i=1}^7 f_i = 40, \sum_{i=1}^7 f_i x_i = 1800,$

$$\sum_{i=1}^7 f_i |x_i - \bar{x}| = 400$$

इसलिए  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^7 f_i x_i = \frac{1800}{40} = 45$

और  $M.D. (\bar{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^7 f_i |x_i - \bar{x}| = \frac{1}{40} \times 400 = 10$  -उत्तर

प्रश्न 8. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए-

$x_i$	3	6	9	12	13	15	21	22
$f_i$	3	4	5	2	4	5	4	3

हल: दिए गए आँकड़े पहले ही आरोही क्रम में हैं। इन आँकड़ों में संगत संचयी बारंबारता की एक कतार और लगाते हैं।

$x_i$	3	6	9	12	13	15	21	22
$f_i$	3	4	5	2	4	5	4	3
c.f.	3	7	12	14	18	23	27	30

अब,  $N = 30$  है जो सम संख्या है, इसलिए माध्यिका 15वीं व 16वीं प्रेक्षणों का माध्य है। यह दोनों प्रेक्षण संचयी बारंबारता 18 में स्थित हैं जिसका संगत प्रेक्षण 13 है।

इसलिए माध्यिका  $M = \frac{15 \text{ वाँ प्रेक्षण} + 16 \text{वाँ प्रेक्षण}}{2} = \frac{13 + 13}{2} = 13$

अब माध्यिका से विचलनों का निरपेक्ष मान अर्थात्  $|x_i - M|$  निम्नलिखित सारणी में दर्शाए गए है

सारणी

$ x_i - M $	10	7	4	1	0	2	8	9
$f_i$	3	4	5	2	4	5	4	3
$f_i  x_i - M $	30	28	20	2	0	10	32	27

$$\sum_{i=1}^8 f_i = 30 \text{ और } \sum_{i=1}^8 f_i |x_i - M| = 149$$

इसलिए  $M.D.(M) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^8 f_i |x_i - M| = \frac{1}{30} \times 149 = 4.97$  उत्तर

प्रश्न 9. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष 'माध्य विचलन ज्ञात कीजिए-

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
बारंबारता	6	7	15	16	4	2

हल: दिए गए आँकड़ों से निम्न सारणी बनाते हैं-

सारणी

वर्ग	बारंबारता	संचयी बारंबारता	मध्य-बिंदु	$ x_i - \text{Med.} $	$f_i  x_i - \text{Med.} $
	$f_i$	(c.f.)	$x_i$	Med.	Med.
0-10	6	6	5	23	138
10-20	7	13	15	13	91
20-30	15	28	25	3	45
30-40	16	44	35	7	112
40-50	4	48	45	17	68
50-60	2	50	55	27	54
	50				508

यहाँ  $N = 50$ , इसलिए  $\frac{N}{2}$  वीं या 25वीं मद 20-30 वर्ग में है। इसलिए 20-30 माध्यिका वर्ग है। हम जानते हैं कि

$$\text{माध्यिका} = 1 + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$$

यहाँ  $1 = 20, C = 13, f = 15, h = 10$  और  $N = 50$

इसलिए, माध्यिका  $= 20 + \frac{25 - 13}{15} \times 10 = 20 + 8 = 28$

अतः, माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन

$M.D. (M) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^6 f_i |x_i - M| = \frac{1}{50} \times 508 = 10.16$  है। -उत्तर ■

## अध्याय-16

## प्रायिकता

### वस्तुनिष्ठ प्रश्नोत्तर

प्रश्न 1. सही विकल्प चुनकर लिखिए-

(1) यदि A और B दो असंयुक्त समुच्चय हो तो  $A \cap B$  का मान होगा-

- (अ)  $\cup$  (ब) A  
(स) B (द)  $\phi$

(2) यदि  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(B) = \frac{1}{2}$  तथा A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, तब  $P(A \cup B)$  का मान होगा-

- (अ)  $\frac{5}{6}$  (ब)  $\frac{1}{6}$   
(स)  $\frac{1}{3}$  (द)  $\frac{2}{3}$

उत्तर- (1) (द), (2) (अ)

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

- (1)  $P(A) + P(A') = \dots\dots\dots$   
(2) यदि किसी यादृच्छिक परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि S है तो  $P(S) = \dots\dots\dots$

उत्तर- (1) 1, (2) 1.

प्रश्न 3. सत्य/असत्य लिखिए-

- (1) यदि किसी घटना A की प्रायिकता  $\frac{9}{11}$  है तो घटना A- नहीं की प्रायिकता  $\frac{2}{11}$  होगी।  
(2) प्रतिदर्श समष्टि S का कोई उपसमुच्चय एक घटना कही जाती है।  
(3) एक प्रतिदर्श समष्टि की सरल घटनाएँ सदैव परस्पर अपवर्जी होती हैं।

उत्तर- (1) सत्य, (2) सत्य, (3) सत्य।

प्रश्न 4. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए-

- (1) दो सिक्कों को एक बार उछाला गया है। प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।  
(2) एक सिक्के को दो बार उछाला गया है। प्रतिदर्श समष्टि कीजिए।  
(3) तीन सिक्कों को एक बार उछाला गया है। प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।  
(4) एक सिक्के को तीन बार उछाला गया है। प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।

(5) एक सिक्का उछाला गया है और केवल उस दशा में, जहाँ सिक्के पर चित्त प्रकट होता है एक पासा फेंका जाता है। प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।

उत्तर- (1) {HH, HT, TH, TT}, (2) {HH, HT, TH, TT} (2) {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT} (4) {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT} (5) {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T}

प्रश्न 5. एक पासा फेंकने के परीक्षण पर विचार कीजिये। घटना 'एक अभाज्य संख्या प्राप्त होना' को A से और घटना 'एक विषम संख्या प्राप्त होना' को B से निरूपित किया गया है। निम्नलिखित घटनाओं-

(i) A या B (ii) A और B (iii) A किंतु B नहीं (iv) 'A- नहीं' को निरूपित करने वाले समुच्चय लिखिए।

हल: यहाँ  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ ,  $A = \{2, 3, 5\}$  और  $B = \{1, 3, 5\}$

प्रत्यक्षतः

- (i) 'A या B' =  $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$   
(ii) 'A और B' =  $A \cap B = \{3, 5\}$   
(iii) 'A किंतु B नहीं' =  $A - B = \{2\}$   
(iv) 'A- नहीं' =  $A' = \{1, 4, 6\}$

प्रश्न 6. एक पासा फेंका जाता है। निम्नलिखित घटनाओं का वर्णन कीजिए-

- (i) A: संख्या 7 से कम है। (ii) B: संख्या 7 से बड़ी है।  
(iii) C: संख्या 3 का गुणज है। (iv) D: संख्या 4 से कम है। (v) E: 4 से बड़ी सम संख्या है। (vi) F: संख्या 3 से कम नहीं है।

हल:  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- (i) A: संख्या 7 से कम है =  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$   
(ii) B: संख्या 7 से बड़ी है = पाँसे में कोई संख्या 7 से बड़ी नहीं है =  $\phi$   
(iii) C: संख्या 3 का गुणज है =  $\{3, 6\}$   
(iv) D: संख्या 4 से कम है =  $\{1, 2, 3\}$   
(v) E: 4 से बड़ी सम संख्या है =  $\{6\}$   
(vi) F: संख्या 3 से कम नहीं है =  $\{3, 4, 5, 6\}$

अब  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \phi$   
 $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$   
 $= \phi$

$B \cup C = \phi \cup \{3, 6\} = \{3, 6\}$

$E \cup F = \{6\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{3, 4, 5, 6\}$

$D \cap E = \{1, 2, 3\} \cap \{6\}$

$$A - C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{3, 6\}$$

$$= \{1, 2, 4, 5\}$$

$$F^1 = \{3, 4, 5, 6\}^1 = -\{3, 4, 5, 6\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{3, 4, 5, 6\}$$

$$= \{1, 2\}$$

$$E \cap F^1 = \{6\} \cap \{3, 4, 5, 6\}$$

$$= \{6\} \cap \{1, 2\} = \phi$$

प्रश्न 7. एक पाँसा फेंका जाता है। निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

- (i) एक अभाज्य संख्या प्रकट होना (ii) 3 या 3 से बड़ी संख्या प्रकट होना (iii) 1 या 1 से छोटी संख्या प्रकट होना (iv) छः से बड़ी संख्या प्रकट होना (v) छः से छोटी संख्या प्रकट होना।

हल: एक पाँसे को फेंकने में परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

अर्थात् कुल सम्भावित परिणाम  $n(s) = 6$

(i) अभाज्य संख्याएँ 2, 3, 5 हैं।

$$n(A) = 3$$

अतः एक अभाज्य संख्या प्रकट होने की प्रायिकता

$$= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{-उत्तर}$$

(ii) माना घटना 3 या 3 से बड़ी संख्या को B से दर्शाया गया है, 3 या 3 से बड़ी संख्याएँ 3, 4, 5, 6 हैं।

$$n(B) = 4$$

अतः प्रायिकता  $p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{-उत्तर}$

(iii) माना घटना 1 या 1 से छोटी संख्या को c से दर्शाया गया है। 1 या 1 से छोटी संख्या = 1

$$\therefore n(c) = 1$$

अतः प्रायिकता  $p(c) = \frac{1}{6}$

(iv) एक पाँसे पर 6 से बड़ी कोई संख्या नहीं होती है, अर्थात्

इसकी प्रायिकता =  $\frac{0}{6} = 0 \quad \text{-उत्तर}$

(v) 6 से छोटी संख्याएँ: 1, 2, 3, 4, 5 हैं। यदि इसे E से दर्शाया गया हो, तब  $n(E) = 5$

अतः प्रायिकता,  $p(E) = \frac{5}{6} \quad \text{-उत्तर}$

प्रश्न 8. तीन सिक्के एक बार उछाले जाते हैं। निम्नलिखित की प्रायिकता ज्ञात कीजिए-

- (i) तीन चित्त प्रकट होना (ii) 2 चित्त प्रकट होना (iii) न्यूनतम 2 चित्त प्रकट होना (iv) अधिकतम 2 चित्त प्रकट होना (v) एक भी चित्त प्रकट न होना (vi) 3 पट प्रकट होना (vii) तथ्यतः 2 पट प्रकट होना (viii) कोई भी पट्ट न प्रकट होना (ix) अधिकतम 2 पट प्रकट होना।

हल: यदि तीन सिक्के उछाले जाते हैं, तो परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि  $S = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT\}$

कुल सम्भावित परिणाम = 8

(i) तीन चित्त (HHH) एक तरीके से प्रकट होता है।

अतः उचित प्राप्त करने के प्रायिकता =  $\frac{1}{8} \quad \text{-उत्तर}$

(ii) दो चित्त प्राप्त करने के HHT, HTH, THH तीन तरीके हैं। कुल सम्भावित परिणाम = 8

2 चित्त प्रकट होने की प्रायिकता =  $\frac{3}{8} \quad \text{-उत्तर}$

(iii) न्यूनतम 2 चित्त प्रकट के लिए 2 चित्त, 1 पट, या उचित आयेगे।

$\therefore$  न्यूनतम 2 चित्त HHT, HTH, THH, HHH, चार तरीकों से प्रकट हो सकते हैं।

अतः न्यूनतम 2 चित्त प्रकट होने की प्रायिकता =  $\frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{-उत्तर}$

(iv) अधिकतम 2 चित्त, इस प्रकार प्रकट होंगे-

(अ) कोई चित्त नहीं या तीन पट्ट

(ब) एक चित्त 2 पट्ट

(स) 2 चित्त 1 पट्ट

यह {TTT, HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH} सात तरीकों से प्रकट हो सकते हैं

अतः अधिकतम 2 चित्त प्रकट होने की प्रायिकता =  $\frac{7}{8} \quad \text{-उत्तर}$

(v) एक भी चित्त न आने का अर्थ है तीन पट्ट प्रकट होना जो (TTT) एक तरीके से हो सकता है

अतः एक भी चित्त न आने की प्रायिकता =  $\frac{1}{8} \quad \text{-उत्तर}$

(vi) तीन पट्ट (TTT) एक तरीके से प्रकट हो सकते हैं।

तीन पट्ट प्रकट होने की प्रायिकता =  $\frac{1}{8} \quad \text{-उत्तर}$

(vii) तथ्यतः 2 पट्ट (TTH, THT, HTT) तीन तरीकों से हो सकते हैं।

कुल सम्भावित परिणाम = 8

∴ दो पट्ट प्रकट होने की प्रायिकता =  $\frac{3}{8}$  -उत्तर

(viii) कोई पट्ट नहीं का अर्थ है तीनों चित्त प्रकट होते हैं तो (HHH) 1 तरीके से ही हो सकता है।

कुल संभावित परिणाम = 8

कोई पट्ट नहीं होने की प्रायिकता =  $\frac{1}{8}$  -उत्तर

(ix) अधिकतम 2 पट्ट प्रकट

⇒ तीनों पट्ट प्रकट नहीं होते

तीनों पट्ट प्रकट होने की प्रायिकता =  $\frac{1}{8}$

∴ अधिकतम दो पट्ट प्रकट होने की प्रायिकता =  
= 1 - (तीनों पट्ट प्रकट होने की प्रायिकता)

=  $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$  -उत्तर

प्रश्न 9. ताश के 52 पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गुड्डी में से एक पत्ता निकाला गया है। निकाले गए पत्ते की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, यदि

(i) पत्ता ईंट का है। (ii) पत्ता इक्का नहीं है। (iii) पत्ता काले रंग का है (अर्थात् चिड़ी या हुकुम का है)। (iv) पत्ता ईंट का नहीं है। (v) पत्ता काले रंग का नहीं है।

हल: जब 52 पत्तों की भली-भाँति फेंटी गई गुड्डी में एक पत्ता निकाला जाता है तो संभव परिणामों की संख्या 52 है।

(i) मान लीजिए घटना 'निकाला गया पत्ता ईंट का है, को A से दर्शाया गया है।

स्पष्टतया A में अवयवों की संख्या 13 है।

इसलिए,  $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

अर्थात्, एक ईंट का पत्ता निकालने की प्रायिकता  $\frac{1}{4}$

(ii) मान लीजिए कि घटना 'निकाला गया पत्ता इक्का है' को B से दर्शाते हैं। इसलिए 'निकाला गया पत्ता इक्का नहीं है' को B' से दर्शाया जाएगा।

अब  $P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{4}{52}$   
=  $1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

(iii) मान लीजिए घटना 'निकाला गया पत्ता काले रंग का है' को C से दर्शाते हैं।

इसलिए समुच्चय C में अवयवों की संख्या = 26

अर्थात्  $P(C) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

इस प्रकार काले रंग का पत्ता निकालने की प्रायिकता =  $\frac{1}{2}$

(iv) हमने उपर्युक्त (i) में माना है कि घटना 'निकाला गया पत्ता ईंट का है' को A से दर्शाते हैं। इसलिए घटना 'निकाला गया पत्ता ईंट का नहीं है' को A' या 'A-नहीं' से दर्शाएंगे।

अब  $P(A\text{-नहीं}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(v) घटना 'निकाला गया पत्ता काले रंग का नहीं है' को C' या 'C- नहीं' से दर्शाया जा सकता है।

अब हमें ज्ञात है कि  $P(C\text{-नहीं}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

इसलिए, पत्ता काले रंग का न होने की प्रायिकता =  $\frac{1}{2}$

प्रश्न 10. एक थैले में 9 डिस्क हैं जिनमें से 4 लाल रंग की, 3 नीले रंग की और 2 पीले रंग की हैं। डिस्क आकार एवं माप में समरूप हैं। थैले में से एक डिस्क यादृच्छया निकाली जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाली गई डिस्क

(i) लाल रंग की है (ii) पीले रंग की है (iii) नीले रंग की है (iv) नीले रंग की नहीं है, (v) लाल रंग की है या नीले रंग की है।

हल: डिस्क की कुल संख्या 9 है। इसलिए संभव परिणामों की कुल संख्या 9 हुई। माना लीजिए घटनाओं A, B व C को इस प्रकार से परिभाषित किया गया है।

A: निकाली गई डिस्क लाल रंग की है।

B: निकाली गई डिस्क पीले रंग की है।

C: निकाली गई डिस्क नीले रंग की है।

(i) लाल रंग की डिस्क की संख्या = 4 अर्थात्  $n(A) = 4$

अतः  $P(A) = \frac{4}{9}$

(ii) पीले रंग की डिस्क की संख्या = 2, अर्थात्  $n(B) = 2$

इसलिए,  $P(B) = \frac{2}{9}$

(iii) नीले रंग की डिस्क की संख्या = 3, अर्थात्  $n(C) = 3$

इसलिए,  $P(C) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

(iv) स्पष्टतया घटना 'डिस्क नीले रंग की नहीं है' 'C- नहीं' ही है हम जानते हैं कि  $P(C\text{-नहीं}) = 1 - P(C)$





# Students Unity

public channel



## Description

Contact   @Avengers18\_bot

Instagram <https://instagram.com/amarwah450>

Discussion group <https://t.me/unitydiscussion>

Join our PDF Channel <https://t.me/amarwah455>

For the sponsorship contact :-  
[@Avengers18\\_bot](https://t.me/Avengers18_bot)

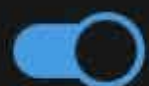
[t.me/amarwah450](https://t.me/amarwah450)

Invite Link



## Notifications

On



इसलिए  $P(C\text{-नहीं}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(v) घटना 'लाल रंग की डिस्क या नीले रंग की डिस्क' का समुच्चय ' $A \cup C$ ' से वर्णित किया जा सकता है।

क्योंकि, A और C परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, इसलिए

$$P(A \text{ या } C) = P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$$

प्रश्न 11. एक सिक्का दो बार उचाला जाता है। कम से कम एक पट प्राप्त होने की क्या प्रायिकता है?

हल: दिए हुए परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

∴ कुल संभावित परिणामों की संख्या = 4, कम से कम एक पट प्राप्त करने के तरीके TH, HT, TT = 3

एक सिक्के के दो बार उछालने से कम से कम 1 पट प्राप्त करने की प्रायिकता =  $\frac{3}{4}$  -उत्तर

प्रश्न 12. शब्द 'ASSASSINATION' से एक अक्षर यादृच्छया चुना जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि चुना गया अक्षर (i) एक स्वर है (ii) एक व्यंजन है।

हल: शब्द ASSASSINATION में कुल 13 अक्षर हैं जिसमें (AAAIIO) 6 स्वर और (SSSSNNT) 7 व्यंजन हैं।

(i)  $n(S) = 13$

स्वरों की संख्या = 6

एक स्वर चुनने की प्रायिकता =  $\frac{6}{13}$  -उत्तर

(ii) व्यंजनों की संख्या = 7

$n(S) = 13$

एक व्यंजन चुनने की प्रायिकता =  $\frac{7}{13}$  -उत्तर

प्रश्न 13. एक अनभिन्नत सिक्का जिसके एक तल पर 1 और दूसरे तल पर 6 अंकित है तथा एक अनभिन्नत पाँसा दोनों को उछाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि प्रकट संख्याओं का योग (i) 3 है। (ii) 12 है।

हल: एक पाँसे पर 1 व 6 अंकित है और दूसरे पर 1, 2, 3, 4, 5, 6

∴ प्रतिदर्श समष्टि =  $\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

(i) दी गई संख्याओं का योग 3 घटना (1,2) से प्राप्त होता है। अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

∴ प्रायिकता जब प्राप्त संख्याओं का योग 3 है =  $\frac{1}{12}$

(ii) दी गई संख्याओं का योग 12 घटना (6,6) से प्राप्त होता है। यहाँ अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

∴ प्रायिकता जब प्राप्त संख्याओं का योग 12 है =  $\frac{1}{12}$  -उत्तर

प्रश्न 14. दो पुरुषों व दो स्त्रियों के समूह में दो व्यक्तियों की एक समिति का गठन करना है। प्रायिकता क्या है कि गठित समिति में

(a) कोई पुरुष न हो? (b) एक पुरुष हो? (c) दोनों पुरुष हों?

हल: समूह में व्यक्तियों की कुल संख्या = 2 + 2 = 4, इन चार व्यक्तियों में से दो को  ${}^4C_2$  तरीके से चुना जा सकता है।

(a) समिति में कोई पुरुष न होने का अर्थ है कि समिति में दो स्त्रियाँ हैं। दो स्त्रियों में से दोनों के चुनने के  ${}^2C_2 = 1$  तरीका है।

इसलिए  $P(\text{कोई पुरुष नहीं}) = \frac{{}^2C_2}{{}^4C_2} = \frac{1 \times 2 \times 1}{4 \times 3} = \frac{1}{6}$

(b) समिति में एक पुरुष होने का तात्पर्य है कि इसमें एक स्त्री है 2 पुरुषों में से एक पुरुष चुनने के  ${}^2C_1$  तरीके हैं तथा दो स्त्रियों में से एक चुनने के भी  ${}^2C_1$  तरीके हैं। दोनों चुनावों को एक साथ करने के  ${}^2C_1 \times {}^2C_1$  तरीके हैं।

इसलिए  $P(\text{एक पुरुष}) = \frac{{}^2C_1 \times {}^2C_1}{{}^4C_2} = \frac{2 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$

(c) दो पुरुषों को  ${}^2C_2$  तरीकों से चुना जा सकता है।

अतः  $P(\text{दो पुरुष}) = \frac{{}^2C_2}{{}^4C_2} = \frac{1}{{}^4C_2} = \frac{1}{6}$

प्रश्न 15. एक डिब्बे में 10 लाल, 20 नीली व 30 हरी गोलियाँ रखी हैं। डिब्बे से 5 गोलियाँ यादृच्छया निकाली जाती हैं। प्रायिकता क्या है कि (i) सभी गोलियाँ नीली हैं? (ii) कम से कम एक गोली हरी है?

हल: एक डिब्बे में 10 लाल, 20 नीली तथा 30 हरी कुल 60 गोलियाँ हैं।

(i) 60 गोलियों में से 5 गोलियाँ चुनने के तरीके =  ${}^{60}C_5$ , 5 नीली गोलियाँ निकालने की प्रायिकता

$$= \frac{{}^{20}C_5}{{}^{60}C_5} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16}{60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56}$$

$$= \frac{34}{11977}$$

-उत्तर

54 / जी.पी.एच. प्रश्न बैंक

(ii) P(कम से कम एक गोली हरी है)

$$= 1 - P(\text{पाँचों गोलियाँ नीली या लाल हैं})$$

$$= 1 - \frac{{}^{30}C_5}{{}^{60}C_5} = 1 - \frac{30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26}{60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56}$$

$$= 1 - \frac{117}{4484} = \frac{4367}{4484} \quad \text{-उत्तर}$$

प्रश्न 16. ताश के 52 पत्तों की एक अच्छी तरह फेंटी गई गड्डी से 4 पत्ते निकाले जाते हैं। इस बात की क्या प्रायिकता है कि निकाले गए पत्तों में 30 ईट और एक हुकुम का पत्ता है?

हल: कुल 52 पत्तों की ताश की गड्डी में से 4 पत्ते निकालने के तरीके =  ${}^{52}C_4$

$$\therefore n(S) = {}^{52}C_4$$

3 ईट के पत्ते निकालने के तरीके =  ${}^{13}C_3$

एक हुकुम का पत्ता निकालने के तरीके =  ${}^{13}C_1$

3 ईट और 1 हुकुम का पत्ता निकालने के  $\phi$  तरीके

$$= {}^{13}C_3 \times {}^{13}C_1$$

अनुकूल परिणामों की कुल संख्या =  ${}^{13}C_3 \times {}^{13}C_1$

अतः 3 ईट और एक हुकुम के पत्ते निकालने की प्रायिकता

$$= \frac{{}^{13}C_3 \times {}^{13}C_1}{{}^{52}C_4} \quad \text{-उत्तर}$$

प्रश्न 17. दो विद्यार्थियों अनिल और आशिमा एक परीक्षा में प्रविष्ट हुए। अनिल के परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.05 है और आशिमा के परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.10 है। दोनों के परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.02 है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(a) अनिल और आशिमा दोनों परीक्षा में उत्तीर्ण नहीं हो पाएंगे।

(b) दोनों में से कम से कम एक परीक्षा में उत्तीर्ण नहीं होगा।

(c) दोनों में से केवल एक परीक्षा में उत्तीर्ण होगा।

हल: मान लीजिए E तथा F घटनाओं 'अनिल परीक्षा उत्तीर्ण कर लेगा' और 'आशिमा परीक्षा उत्तीर्ण कर लेगी' को क्रमशः दर्शाते हैं।

इसलिए  $P(E) = 0.05$ ,  $P(F) = 0.10$  और  $P(E \cap F) = 0.02$ .

तब

(a) घटना 'दोनों परीक्षा उत्तीर्ण नहीं होंगे' को  $E' \cap F'$  से दर्शाया जा सकता है।

क्योंकि E' घटना 'E- नहीं', अर्थात् 'अनिल परीक्षा उत्तीर्ण नहीं करेगा' तथा F' घटना 'F- नहीं', अर्थात् 'आशिमा परीक्षा उत्तीर्ण नहीं करेगी' दर्शाते हैं।

साथ ही  $E' \cap F' = (E \cup F)'$  (डी-मोरगन् नियम द्वारा)

$$\text{अब } P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

$$\text{या } P(E \cup F) = 0.05 + 0.10 - 0.02 = 0.13$$

$$\text{इसलिए } P(E' \cap F') = P(E \cup F) = 1 - P(E \cup F)$$

$$= 1 - 0.13 = 0.87$$

(b) P(दोनों में से कम से कम एक उत्तीर्ण नहीं होगा।)

$$= 1 - P \quad (\text{दोनों उत्तीर्ण होंगे})$$

$$= 1 - 0.02 = 0.98$$

(c) घटना 'दोनों में से केवल एक उत्तीर्ण होगा' निम्नलिखित घटना के समरूप है:

'अनिल उत्तीर्ण होगा और आशिमा उत्तीर्ण नहीं होगी'

या 'अनिल उत्तीर्ण नहीं होगा और आशिमा उत्तीर्ण होगी'

अर्थात्  $E \cap F'$  या  $E' \cap F$  और  $E \cap F$  और  $E' \cap F$  परस्पर अपवर्जी हैं।

इसलिए, P(दोनों में से केवल एक उत्तीर्ण होगा)

$$= P(E \cap F' \text{ या } E' \cap F)$$

$$= P(E \cap F') + P(E' \cap F)$$

$$= P(E) - P(E \cap F) + P(F) - P(E \cap F)$$

$$= 0.05 - 0.02 + 0.10 - 0.02 = 0.11$$

प्रश्न 18. एक पाठशाला की कक्षा XI के 40% विद्यार्थी या जीवविज्ञान पढ़ते हैं और 30% विद्यार्थी जीवविज्ञान पढ़ते हैं। कक्षा के 10% विद्यार्थी गणित और जीवविज्ञान दोनों पढ़ते हैं। यदि कक्षा का एक विद्यार्थी यादृच्छया चुना जाता है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह गणित या जीवविज्ञान पढ़ता होगा।

हल: एक पाठशाला के 40% विद्यार्थी गणित पढ़ते हैं।

$\therefore$  गणित पढ़ने वाले विद्यार्थियों की प्रायिकता

$$P(M) = \frac{40}{100} = 0.4$$

30% विद्यार्थी जीवविज्ञान पढ़ते हैं।

$\therefore$  जीवविज्ञान पढ़ने वाले विद्यार्थियों की प्रायिकता

$$P(B) = \frac{30}{100} = 0.3$$

10% विद्यार्थी गणित और जीवविज्ञान दोनों पढ़ते हैं।

$\therefore$  गणित और जीवविज्ञान वाले विद्यार्थियों की प्रायिकता,

$$P(M \cap B) = \frac{10}{100} = 0.1$$

अब एक विद्यार्थी यादृच्छया चुना गया हो, तब उस विद्यार्थी द्वारा गणित या जीव विज्ञान लिए गए विषय की प्रायिकता

$$\begin{aligned} P(M \cup B) &= P(M) + P(B) - P(M \cap B) \\ &= 0.4 + 0.3 - 0.1 \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

प्रश्न 19. एक प्रवेश परीक्षा को दो परीक्षणों के आधार पर श्रेणीबद्ध किया जाता है। किसी यादृच्छया चुने गए विद्यार्थी की पहले परीक्षण में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.7 है। दोनों में से कम से कम एक परीक्षण उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.95 है। दोनों परीक्षणों को उत्तीर्ण करने की प्रायिकता क्या है?

हल: मान A और B क्रमशः पहले और दूसरे परीक्षण में उत्तीर्ण होने को दर्शाते हैं।

$$P(A) = 0.7, P(B) = 0.7$$

कम से कम एक परीक्षण में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता

$$= 1 - P(A' \cap B') = 0.95$$

$$\Rightarrow P(A' \cap B') = 1 - 0.95 = 0.05$$

परन्तु  $A' \cap B' = (A \cup B)'$  (डी. मोर्गन नियम से)

$$\begin{aligned} \therefore P(A' \cap B') &= P(A \cup B)' \\ &= 1 - P(A \cup B) = 0.05 \end{aligned}$$

$$\therefore P(A \cup B) = 1 - 0.05 = 0.95$$

$$\begin{aligned} \therefore P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ 0.95 &= 0.7 + 0.7 - P(A \cap B) \end{aligned}$$

$$P(A \cap B) = 1.4 - 0.95 = 0.45$$

इस प्रकार दोनों परीक्षणों को उत्तीर्ण करने की प्रायिकता = 0.45 - उत्तर

प्रश्न 20. एक विद्यार्थी के अंतिम परीक्षा के अंग्रेजी और हिन्दी दोनों विषयों को उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.5 है और दोनों में से कोई भी विषय उत्तीर्ण न करने की प्रायिकता 0.1 है। यदि अंग्रेजी की परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.75 हो तो हिन्दी की परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता क्या है?

हल: माना E और H क्रमशः अंग्रेजी और हिन्दी में पास करने को दर्शाते हैं।

तब अंग्रेजी और हिन्दी दोनों परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता

$$P(E \cap H) = 0.5$$

दोनों में से कोई परीक्षा उत्तीर्ण न करने की प्रायिकता

$$= P(E' \cap H') = 0.1$$

$$\text{या } P[(E \cup H)'] = 1 - P(E \cup H) = 0.1$$

$$\Rightarrow P(E \cup H) = 1 - 0.1 = 0.9$$

अंग्रेजी परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता

$$= P(E) = 0.75 \text{ अतः}$$

$$P(E \cup H) = 0.9, P(E) = 0.75,$$

$$P(E \cap H) = 0.5$$

$$P(E \cup H) = P(E) + P(H) - P(E \cap H)$$

$$0.9 = 0.75 + P(H) - 0.5$$

$$P(H) = 0.9 + 0.5 - 0.75$$

$$= 1.4 - 0.75 = 0.65$$

अतः हिन्दी परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता = 0.65

- उत्तर

प्रश्न 21. एक कक्षा के 60 विद्यार्थियों में से 30 ने एन.सी.सी (NCC), 32 ने एन.एस.एस (NSS) और 24 ने दोनों को चुना है। यदि इनमें से एक विद्यार्थी यादृच्छया चुना गया है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि-

(i) विद्यार्थी ने एन.सी.सी. या एन.एस.एस. को चुना है।

(ii) विद्यार्थी ने न तो एन.सी.सी. और न ही एन.एस.एस. को चुना है।

(iii) विद्यार्थी ने एन.एस.एस. को चुना है किन्तु एन.सी.सी. को नहीं चुना है।

हल: माना A और B क्रमशः एन.सी.सी. और एन.एस.एस. चुनने की घटना को दर्शाते हैं।

विद्यार्थियों की कुल संख्या = 60

एन.सी.सी. चुनने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 30

$$\text{एन.सी.सी. चुनने की प्रायिकता } P(A) = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

एन.एस.एस. चुनने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 32

$$\therefore \text{एन.एस.एस. चुने जाने की प्रायिकता } P(B) = \frac{32}{60}$$

एन.सी.सी. और एन.एस.एस. चुनने वालों की संख्या = 24

एन.सी.सी. और एन.एस.एस. चुनने वाले की प्रायिकता

$$= \frac{24}{60}$$

(i) एन.सी.सी. और एन.एस.एस. चुने जाने की प्रायिकता

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{30}{60} + \frac{32}{60} - \frac{24}{60} = \frac{38}{60} = \frac{19}{30} \text{ - उत्तर}$$

(ii) एन.सी.सी. और एन.एस.एस. में से कोई भी विषय न चुने जाने की प्रायिकता

$$\begin{aligned} P(A' \cap B') &= P[(A \cup B)'] \\ &= 1 - P(A \cup B) \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{19}{30} = \frac{11}{30} \quad \text{-उत्तर}$$

(iii) विद्यार्थी ने एन.एस.एस. को चुना है परन्तु एन.सी.सी.को नहीं,

$$\begin{aligned} \text{इसकी प्रायिकता} &= P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{32}{60} - \frac{24}{60} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15} \quad \text{-उत्तर} \end{aligned}$$

प्रश्न 22. यदि E और F घटनाएँ इस प्रकार हैं कि P(E)

$$= \frac{1}{4}, P(F) = \frac{1}{2} \text{ और } P(E \text{ और } F) = \frac{1}{8}, \text{ तो ज्ञात}$$

कीजिए- (i) P(E या F) (ii) P(E- नहीं और F- नहीं)।

$$\text{हल: दिया है कि, } P(E) = \frac{1}{4}, P(F) = \frac{1}{2}, P(E \text{ और } F) = P(E \cap F)$$

$$= \frac{1}{8}$$

(i) P(E या F) = P(E ∪ F) = P(E) + P(F) - P(E ∩ F)

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{2+4-1}{8} = \frac{5}{8} \quad \text{-उत्तर}$$

(ii) P(E. नहीं और F-नहीं) = P(E ∩ F)

$$= P[(E \cup F)'] = 1 - P(E \cup F)$$

$$= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} \quad \text{-उत्तर}$$

प्रश्न 23. घटनाएँ A और B इस प्रकार हैं कि P(A) = 0.4, P(B) = 0.4 और P(A और B) = 0.16 तो ज्ञात कीजिए-

(i) P(A- नहीं) (ii) P(B- नहीं) (iii) P(A या B)।

हल: दिया है कि,

$$P(A) = 0.42, P(B) = 0.48$$

$$\text{और } P(A \cap B) = 0.16$$

भाग (a). यहाँ, P(A- नहीं) = P(A')

$$= 1 - P(A) = 1 - 0.42$$

$$= 0.58 \quad \text{-उत्तर}$$

भाग (b). यहाँ, P(B- नहीं) = P(B') = 1 - P(B)

$$= 1 - 0.48 = 0.52 \quad \text{उत्तर}$$

भाग (c). यहाँ, P(A या B) = P(A ∪ B)

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0.42 + 0.48 - 0.16$$

$$= 0.74 \quad \text{-उत्तर}$$

प्रश्न 24. A और B दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि P(A) = 0.54, P(B) = 0.69 और P(A ∩ B) = 0.35 ज्ञात कीजिए (i) P(A ∪ B) (ii) P(A' ∩ B) (iii) P(A ∩ B') (iv) P(B ∩ A')

हल: दिया है कि, P(A) = 0.54, P(B)

$$= 0.69 \text{ और } P(A \cap B)$$

$$= 0.35$$

भाग (a). यहाँ P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)

$$= 0.54 + 0.69 - 0.35$$

$$= 0.88 \quad \text{-उत्तर}$$

भाग (b). यहाँ, P(A' ∩ B) = P(A ∪ B)',

डि मॉर्गन् नियम से

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - 0.88 = 0.12 \quad \text{-उत्तर}$$

भाग (c). यहाँ, P(A ∩ B') = P(A) - P(A ∩ B)

$$= 0.54 - 0.35 = 0.19 \quad \text{-उत्तर}$$

भाग (d). यहाँ, P(B ∩ A') = P(B) - P(A ∩ B)

$$= 0.69 - 0.35 = 0.34 \quad \text{-उत्तर}$$

प्रश्न 25. P(A) =  $\frac{3}{5}$  और P(B) =  $\frac{1}{5}$ , दिया गया है।

यदि A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, तो P(A या B) ज्ञात कीजिए।

हल: A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, तब

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A) = \frac{3}{5}, P(B) = \frac{1}{5}$$

$$P(A \text{ या } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$- P(A \cap B)$$

$$\therefore P(A \cup B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} - 0 = \frac{4}{5} \quad \text{-उत्तर}$$

# आमुख

प्रदेश में संचालित शासकीय हाई/हायर सेकेण्डरी स्कूलों में छात्र/छात्राओं का परीक्षा परिणाम निराशाजनक रहा है। शालाओं के समय-समय पर विभागीय अधिकारियों द्वारा किये गये निरीक्षण के दौरान यह देखा गया है कि छात्र-छात्राओं को विषय में ज्ञान का स्तर संतोषजनक नहीं है।

आगामी परीक्षा की तैयारी एवं श्रेष्ठ परीक्षा परिणाम हेतु यह प्रश्न बैंक तैयार किया गया है। जिसके उपयोग से शिक्षक अपने समस्त छात्रों को बेहतर अंक प्राप्त करने एवं अगली कक्षा में जाने हेतु समर्थ बना सकेंगे।

इस प्रश्न बैंक को ब्लूप्रिन्ट के अनुसार उन महत्वपूर्ण पाठ्य वस्तुओं का समावेश कर तैयार किया गया है जो कि प्रभावी शिक्षण एवं छात्र-छात्राओं के सभी विषय में औसत दक्षता विकसित करने एवं परीक्षा परिणाम में सुधार हेतु लाभकारी सिद्ध होगा।

अर्द्धवार्षिक परीक्षा में डी एवं ई ग्रेड के विद्यार्थियों का चिन्हांकन आपके द्वारा कर लिया गया होगा। यदि आपके स्कूल में एक से अधिक सेक्शन है तो विद्यार्थियों के ग्रेड के आधार पर सेक्शन में विद्यार्थियों का पुनर्वितरण कर दें। तथा एक ग्रेड के विद्यार्थियों को एक सेक्शन में रखें ताकि उन विद्यार्थियों को उनके स्तर के अनुरूप पढ़ाया जाये।

प्रदेश के समस्त हाई/हायर सेकेण्डरी स्कूलों के प्राचार्य एवं संबंधित शिक्षकों से अपेक्षा ही नहीं बल्कि पूर्ण विश्वास है कि वे इस प्रश्न बैंक से शाला के छात्र-छात्राओं को सभी विषय का नियमित अभ्यास करावेंगे ताकि प्रत्येक विद्यार्थी परीक्षा में सफल हो सके।

शिक्षकों से अपेक्षित कार्यवाही-डी एवं ई ग्रेड के विद्यार्थियों को आगामी 2 माह तक इस प्रश्न बैंक अनुसार अभ्यास कराएं। विद्यार्थियों को प्रत्येक प्रश्न को किस तरह लिखना है इसे समझाएं। विद्यार्थियों द्वारा की जा रही गलतियों को सुधारें।

www.gphbooks.com | gph\_india@rediffmail.com | facebook.com/gphind



**GUPTA PUBLISHING HOUSE**

116, Pologround, Industrial Estate, Indore  
Khajuri Bazar, (16, Juna Pitha, Mata mandir ke pass), Indore  
Ph.: (O) 0731-2424121, 2425121, 2454121



**Rs.32.00/-**



# Students Unity

public channel



## Description

Contact 📞📞 @Avengers18\_bot

Instagram <https://instagram.com/amarwah450>

Discussion group <https://t.me/unitydiscussion>

Join our PDF Channel <https://t.me/amarwah455>

For the sponsorship contact :-  
@Avengers18\_bot

[t.me/amarwah450](https://t.me/amarwah450)

Invite Link



## Notifications

On





# Amarwah unity

SUBSCRIBED



174 videos

Stand with unity, an educational channel for the helping