

खण्ड-(अ)

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न 1. सही विकल्प का चयन कीजिए-

5

(i) दो समतलों $2x + 3y + 4z = 4$ और $4x + 6y + 8z = 12$ के बीच की दूरी है-

- (a) 2 इकाई (b) 4 इकाई
(c) 8 इकाई (d) $\frac{2}{\sqrt{29}}$ इकाई

(ii) चार कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के व्यापक हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या

- (a) 0 (b) 4
(c) 1 (c) 2

(iii) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ का प्रति अवकलज है -

- (a) $\frac{1}{3}x^{2/3} + 2x^{1/2} + c$ (b) $\frac{2}{3}x^{2/3} + \frac{1}{2}x^2 + c$
(c) $\frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + c$ (d) $\frac{3}{2}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{1/2} + c$

(iv) यदि $f(x) = 3x^2 + 15x + 5$ हो, तो $f(3.02)$ का सन्निकट मान है-

- (a) 47.66 (b) 57.66
(c) 77.66 (d) 67.66

(v) $\sin(\tan^{-1}x)$, $|x| < 1$ बराबर होता है-

- (a) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(c) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (d) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

उत्तर- (i) a (ii) b. (iii) d. (iv) c, (v) d.

प्रश्न 2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

5

(i) यदि $P(A) = 2$, $P(B) = 5$ तथा $P(A \cap B) = 2$ हो, तो $P(A \cup B) = \dots$

(ii) यदि $f(x) = \int_0^x t \sin t dt$ तब $f'(x)$ का मान है।

(iii) वक्र $x+t^2+3t-8$, $y=2t^2-2t-5$ के बिन्दु (2,-1) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता है।

(iv) $x=0$ पर फलन $f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ एक फलन है।

(v) यदि $A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ हो, तो $|3A|$ का मान है

उत्तर- (i) 5 (ii) $x \sin x$. (iii) $\frac{6}{7}$, (iv) असतत (v) $27|A|$.

प्रश्न 3. सही जोड़ी बनाइए -

5

(अ)

(ब)

(i) यदि कण के लिए विस्थापन समीकरण

(a) $\frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x}$

$X = 4t^2 + 2t$ हो, तब $t = 1/2$ सेकण्ड पर त्वरण है

(ii) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$

(b) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$

(iii) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

(c) $\tan x + c$

(iv) $\int (1 + \tan^2 x) dx$

(d) 27

(v) वक्र $y = 3x^2$ तथा $x = 0, x = 3$ से घिरे क्षेत्र का

(e) 8

क्षेत्रफल होगा।

उत्तर- (i) d. (ii) c. (iii) b, (iv) a, (v) e.

प्रश्न 4. सत्य/असत्य कथन लिखिए-

5

(i) असमीकरण $x > 0$ का ग्राफ प्रथम व चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है।

(ii) बिन्दु $P(x,y,z)$ की XY समतल से दूरी $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ है।

(iii) एक त्रिभुज की भुजाओं द्वारा क्रमानुसार निरूपित सदिशों का योग शून्य होता है।

(iv) यदि $x > 0$, तो $2x + 3y$ का न्यूनतम मान जब $xy = 6, 12$ है।

(v) $m \times n$ आव्यूह में m पंक्तियाँ होती हैं।

उत्तर- (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) सत्य।

प्रश्न 5. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए-

5

(i) यदि $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ तथा A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो $P(A/B)$ ज्ञात कीजिए।

(ii) जिस फलन का अधिकतम या न्यूनतम मान ज्ञात करना होता है उस फलन को क्या कहते हैं?

(iii) $\int e^x dx$ किसके बराबर है?

(iv) एक घन का आयतन $8 \text{ cm}^3/\text{s}$ की दर से बढ़ रहा है। पृष्ठ क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है जबकि इसके किनारे की लम्बाई 12 सेमी. है।

(v) जाँच कीजिए कि क्या समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में $R = \{(a, b) : b = a+1\}$ द्वारा परिभाषित सम्बन्ध R स्वतुल्य, सममित या संक्रामक हैं।

उत्तर- (i) 0.3 (ii) उद्देश्य फलन (iii) e^x (iv) $\frac{8}{3} \text{ cm}^2/\text{s}$ (v) न स्वतुल्य न सममित और न संक्रामक।

खण्ड-(ब)

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 6. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $AA' = I$ 2

अथवा

यदि $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तो $(A + 2B)'$ ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के लिए तत्समक फलन $f(x) = x$, प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए सतत् है। 2

अथवा

यदि $\frac{e^x}{\sin x}$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 8. $f(x) = 4x^3 - 6$ द्वारा परिभाषित फलन f का प्रति अवकलज F ज्ञात कीजिए जहाँ $F(0) = 3$ 2

अथवा

$\int x \sin x dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 9. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} + 8\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$ तथा $\vec{c} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ हो तो $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

अथवा

सिद्ध कीजिए $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d} = \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}]$ होता है।

प्रश्न 10. उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से $\frac{6}{\sqrt{29}}$ की दूरी पर है और मूल

बिन्दु से इसका अभिलम्ब $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ है। 2

अथवा

दो समतलों $2x + y - 2z = 5$ और $3x - 6y - 2z = 7$ के बीच का कोण सदिश विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

लघु उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 11. किसी आयत की लम्बाई x , 3 सेमी./मिनट की दर से घट रही है और चौड़ाई y , 2 सेमी./मिनट की दर से बढ़ रही है। जब $x = 10$ सेमी. और $y = 6$ सेमी. है तब आयत के (a) परिमाण (b) क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए। 3

अथवा

दो धनात्मक संख्याएँ x और y इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि $x + y = 60$ तथा xy^3 उच्चिष्ठ हो।

प्रश्न 12. वक्र $y = \sqrt{4x} - 3 - 1$ पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए। जिन पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{2}{3}$ है। 3

अथवा

अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें फलन $f(x) = -2x^3 - 9x^2 - |2x + 1|$ निरन्तर वर्धमान या हासमान है।

प्रश्न 13. दर्शाइए कि बिन्दु $A(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}), B(\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}), C(3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं। 3

अथवा

सदिश $(\vec{a} + \vec{b})$ और $(\vec{a} - \vec{b})$ में से प्रत्येक के मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$.

प्रश्न 14. निम्न समतलों के बीच कोण ज्ञात कीजिए। 3

$$\vec{r} \cdot (2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) = 1 \text{ एवं } \vec{r} \cdot (-\hat{i} + \hat{j}) = 4$$

अथवा

यदि कोई रेखा अक्षों से धनात्मक कोण α, β व γ बनाती है तो सिद्ध करो कि $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$.

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रश्न 15. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 12\}$ में दिए गए निम्नलिखित सम्बन्धों R में से प्रत्येक तुल्यता सम्बन्ध है- 4

(i) $R = \{(a, b) : |a - b|, 4 \text{ का एक गुणज है।}\}$

(ii) $R = \{(a, b) : (a - b)\}$

अथवा

समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ में $a * b$ न्यूनतम $\{a, b\}$ द्वारा परिभाषित $*$ एक द्विआधारी संक्रिया है। संक्रिया के लिए संक्रिया तालिका बनाइए।

प्रश्न 16. सिद्ध कीजिए- $\cos^{-1} \frac{3}{11} - \sin^{-1} \frac{3}{4} = \sin^{-1} \frac{19}{44}$ 4

अथवा

समीकरण हल कीजिए-

$$\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1} \frac{8}{31}$$

प्रश्न 17. सारणियों का प्रयोग करके A(1, 3) और B(0,0) को जोड़ने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए और K का मान ज्ञात कीजिए यदि एक बिन्दु D(k,0) इस प्रकार है कि AABD का क्षेत्रफल 3 वर्ग इकाई है।

4

अथवा

सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

प्रश्न 18. बिन्दु P(6,5,9) से बिन्दुओं A(3,-1,2), B(5,-2,4) और C(-1,-1,6) द्वारा निर्धारित समतल की दूरी ज्ञात कीजिए।

अथवा

निम्नलिखित दी गई रेखाओं l_1 और l_2 के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए-

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

$$\text{और } \vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k})$$

प्रश्न 19. एक फल विक्रेता सेब और सन्तरे खरीदने में 500 रु. की पूँजी लगा सकता है। उसकी दुकान में फलों की केवल 12 पेटियाँ ही रखी जा सकती हैं। सेब की एक पेट्टी 50 रु. और सन्तरे की एक पेट्टी 25 रु. की आती है। वह सेब की प्रति पेट्टी 10 रु. तथा सन्तरे की प्रति पेट्टी 6 रु. के लाभ से बेचता है। यह मान कर कि वह खरीदी हुई सभी पेट्टियों को बेच सकता है, रैखिक प्रोग्रामन द्वारा ज्ञात कीजिए कि उसे सेब और सन्तरे की कितनी-कितनी पेट्टियाँ खरीदनी चाहिए ताकि उसे अधिकतम लाभ हो।

अथवा

$P = 2x + 3y$ का न्यूनतम मान निम्नलिखित प्रतिबंधों के अन्तर्गत कीजिए-

$$4x + 3y \leq 12, x + 2y \geq 4, x, y \geq 0$$

प्रश्न 20. यदि A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं तो A या B में से न्यूनतम होने की प्रायिकता = $1 - P(A')P(B')$ 4

अथवा

यदि $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ तथा $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ हो तो निम्न के मान ज्ञात कीजिए-

$$(i) P\left(\frac{A}{B}\right) \quad (ii) P\left(\frac{B}{A}\right) \quad (iii) P(A \cup B)$$

प्रश्न 21. ताश के 52 पत्तों को एक भली भाँति गड़डी में से दो पत्ते उत्तरोत्तर बिना प्रतिस्थापना (या एक साथ) निकाले जाते हैं। बादशाहों की संख्या का माध्य ज्ञात कीजिए।

अथवा

मान लें किसी यादृच्छिक चुने गए विद्यालयी दिवस में पढ़ाई के घण्टों की x से दर्शाया जाता है। x के मान x लेने पर प्रायिकता निम्नलिखित तरह से, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है-

$$P(X = x) = \begin{cases} 0.1 & \text{यदि } x = 0 \\ kx & \text{यदि } x = 1 \text{ या } 2 \\ k(5-x) & \text{यदि } x = 3 \text{ या } 4 \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

K का मान ज्ञात कीजिए।

निबंधात्मक प्रश्न

प्रश्न 22. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & a & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ b & 1 & 0 \end{bmatrix}$ प्रति सममित आव्यूह है तो a व b के मान ज्ञात कीजिए। 5

अथवा

x व y के मान ज्ञात कीजिए।

$$2 \begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 23. $f(x) = |x|$ द्वारा परिभाषित महत्तम पूर्णांक फलन के असातत्य के समस्त बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए। जहाँ $|x|$ उस महत्वपूर्ण को प्रकट करता है तो x से कम या उसके बराबर है। 5

अथवा

यदि $y^x + x^y + x^x = a^b$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए-

प्रश्न 24. सिद्ध कीजिए किबात कीजिए कि- 5

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx = \pi/4$$

अथवा

योगफल की सीमा के रूप में $\int_0^2 (x^2 + 1) dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 25. वक्र $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4ay$, $a > 0$ के अंतर्गत क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

अथवा

दो वृत्तों $x^2+y^2=4$ एवं $(x-2)^2+y^2=4$ के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 26. ऐसे दीर्घवृत्तों के कुल को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी नाभियाँ x अक्ष पर हैं तथा जिनका केन्द्र मूल बिन्दु है।

5

अथवा

x अक्ष को मूल बिन्दु पर स्पर्श करने वाले वृत्तों के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।