Date 15/11/18

-:पाठ ⇒ 14:-

-: कक्षीय वेग तथा पलायन वेग :-

→ **उपग्रह** - वे पिण्ड जो ग्रहों का चक्कर लगाते हैं। उपग्रह कहलाते हैं।

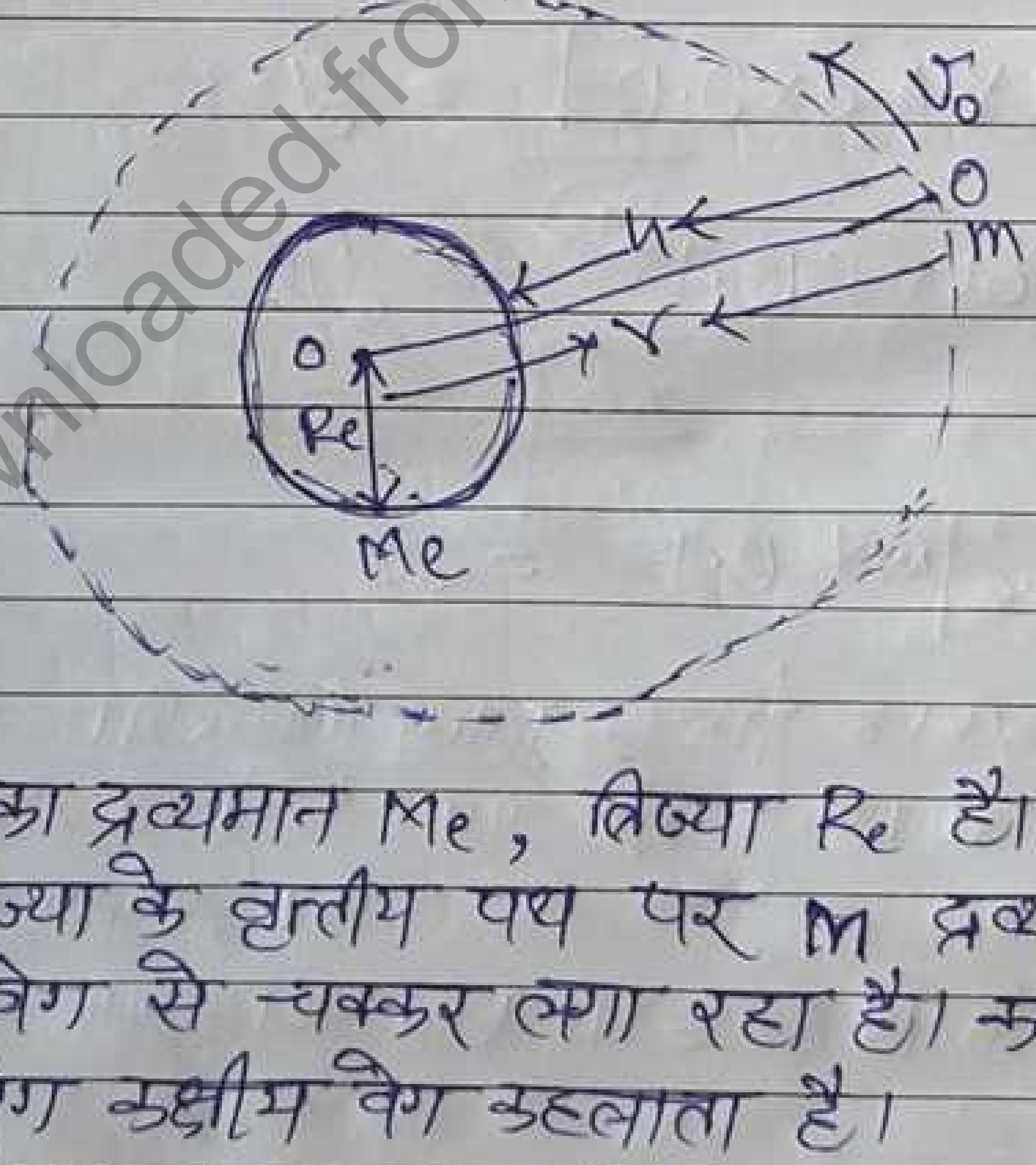
Satelite -

जैसे - चन्द्रमा पृथ्वी का उपग्रह है।

V.Imp. → **उपग्रह के कक्षीय वेग/चाल के लिए व्यंजक -**

अथवा

Imp. प्र० → किसी उपग्रह के कक्षीय चाल के लिए व्यंजक ~~ज्ञात~~ प्राप्त कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि उपग्रह की कक्षीय चाल उपग्रह के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करती है। बल्कि पृथ्वी तल से ऊँचाई पर निर्भर करती है।



माना पृथ्वी का द्रव्यमान M_e, त्रिज्या R_e है। पृथ्वी की केन्द्र O से r त्रिज्या के वृत्तीय पथ पर m द्रव्यमान का एक उपग्रह v_0 वेग से चक्कर लगा रहा है। कक्षा में घूमते हुए उपग्रह का वेग कक्षीय वेग कहलाता है।

पृथ्वी द्वारा उपग्रह पर लगाया गया गुरुत्वाकर्षण बल-

$$F = \frac{G M_e m}{r^2}$$

Date
Page No.

उपग्रह को वृत्तीय पथ में घूमने के लिए अभिकेंद्र बल की आवश्यकता होती है। जो उसे पृथ्वी व उपग्रह के बीच लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल से प्राप्त होता है। अत:

$$\frac{\cancel{m}v_o^2}{r} = \frac{GM_e\cancel{m}}{r^2}$$

उपग्रह पर अभिकेंद्र बल $F = \frac{mv_o^2}{r}$

$$v_o^2 = \frac{GM_e}{r}$$

यदि पृथ्वी तल से उपग्रह की ऊँचाई h है। तो पृथ्वी के केंद्र से उपग्रह की दूरी.

$$r = R_e + h$$

अत:

$$v_o^2 = \frac{GM_e}{r}$$

$$v_o^2 = \frac{GM_e}{R_e + h}$$

We know that-

$$GM_e = gR_e^2$$

$$\therefore \quad v_o^2 = \frac{gR_e^2}{R_e + h}$$

$$v_o = \sqrt{\frac{gR_e^2}{R_e\left(1 + \frac{h}{R_e}\right)}}$$

$$\boxed{v_o = \sqrt{\frac{gR_e^2}{\left(1 + \frac{h}{R_e}\right)}}}$$

स्पष्ट है कि उपग्रह का कक्षीय वेग पृथ्वी तल से ऊँचाई पर निर्भर करता है। उपग्रह के द्रव्यमान पर नहीं।
यदि उपग्रह पृथ्वी तल के समीप स्थित है। तथा
अर्थात

$$R_e + h \approx R_e$$

$$\therefore \quad v_0^2 = \sqrt{\frac{gR_e^2}{R_e}}$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{gR_e}}$$

$$g = 9.8 \, m/sec^2$$

$$R_e = 6400 km = 6.4 \times 10^6 \text{ मी॰}$$

$$v_0 = \sqrt{9.8 \times 6.4 \times 10^6}$$

$$v_0 = 7.92 \times 10^3 \text{ मी॰}/sec$$

या

$$v_0 = 7.9 \, km/sec$$

→ उपग्रह का परिक्रमण काल – किसी उपग्रह द्वारा पृथ्वी का एक चक्कर लगाने में लगा समय उपग्रह का परिक्रमण काल कहलाता है।

$$\therefore \text{ परिक्रमण काल } T = \frac{\text{उपग्रह द्वारा कक्षा में चली गई दूरी}}{\text{उपग्रह की कक्षीय चाल}}$$

$$\therefore T = \frac{2\pi r}{v_0}$$

Page No.

Since, $R_e + h = r$

and
$$v_0 = \sqrt{\frac{gR_e^2}{R_e+h}}$$

$$\therefore \quad T = \frac{2\pi(R_e+h)}{\sqrt{\frac{gR_e^2}{R_e+h}}}$$

$$T = \frac{2\pi(R_e+h)^1(R_e+h)^{1/2}}{\sqrt{gR_e^2}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi(R_e+h)^{3/2}}{\sqrt{gR_e^2}}} \quad \text{—— (1)}$$

→ परिक्रमण काल की पृथ्वी के घनत्व पर निर्भरता -
यदि पृथ्वी का द्रव्यमान M_e, त्रिज्या R_e तथा घनत्व ρ है।
तो द्रव्यमान $M_e = \frac{4}{3}\pi R_e^3 \cdot \rho$

$$M_e = \frac{4}{3}\pi R_e^3 \cdot \rho$$

समीकरण (1) से -
$$T^2 = \frac{4\pi^2(R_e+h)^3}{gR_e^2}$$

Since,
$$gR_e^2 = GM_e$$

$$\therefore \quad T^2 = \frac{4\pi^2(R_e+h)^3}{GM_e}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 (Re+h)^3}{G \times \frac{4}{3}\pi Re^3 \times \rho}$$

$$T^2 = \frac{3\pi Re^3 \left(1+\frac{h}{Re}\right)^3}{G \times Re^3 \cdot \rho}$$

यदि उपग्रह पृथ्वी तल के समीप स्थित हो

$$1+\frac{h}{Re} \approx 1$$

so

$$\boxed{T^2 = \frac{3\pi \cancel{Re^3} \cdot 1}{G \cdot \cancel{Re^3} \cdot \rho}}$$

$$T^2 = \frac{3\pi}{G\rho}$$

या

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}}$$

or

$$\boxed{T \propto \frac{1}{\sqrt{\rho}}}$$

इस प्रकार उपग्रह का परिक्रमण काल पृथ्वी के घनत्व के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

वृत्तीय कक्षा में घूमते हुए उपग्रह की कुल ऊर्जा –
ग्रह (पृथ्वी) के चारों ओर वृत्तीय कक्षा में घूमते हुए उपग्रह में गतिज तथा स्थितिज दोनों प्रकार की ऊर्जायें होती हैं।

अतः उपग्रह की कुल ऊर्जा E = गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा

$$E = K + U \quad \text{——— (1)}$$

उपग्रह की गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2} m v_0^2$

उपग्रह को वृत्तीय कक्षा में घूमने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल, गुरुत्वाकर्षण बल से प्राप्त होता है। अतः

$$\frac{m v_0^2}{r} = \frac{G M_e m}{r^2}$$

$$m v_0^2 = \frac{G M_e m}{r}$$

Since,

$$r = R_e + h$$

यदि उपग्रह पृथ्वी तल के समीप हो.

$$R_e + h \approx R_e$$

अतः

$$m v_0^2 = \frac{G M_e m}{R_e}$$

$\therefore$ गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2} \frac{G M_e m}{R_e}$

उपग्रह की स्थितिज ऊर्जा $U = -\frac{G M_e m}{R_e}$

अतः समीकरण (1) से-

$$E = \frac{G M_e m}{2 R_e} - \frac{G M_e m}{R_e}$$

Date ______
Page No. ______

$$E = \frac{+GM_em - 2GM_em}{2R_e}$$

$$\therefore \boxed{E = -\frac{GM_em}{2R_e}}$$

इस प्रकार उपग्रह की कुल ऊर्जा ऋणात्मक होती है। जिसका अर्थ यह है कि उपग्रह पृथ्वी के चारों ओर बंद वृत्तीय कक्षा में चक्कर लगाते हैं।

Imp. उपग्रह की बंधन ऊर्जा -
Binding energy of Satalite - पृथ्वी के चारों ओर परिक्रमण करते हुए किसी पिण्ड अथवा उपग्रह को अपनी कक्षा छोड़कर पलायन कर जाने के लिए आवश्यक ऊर्जा, उपग्रह की बंधन ऊर्जा कहलाती है।

or

"वह न्यूनतम ऊर्जा जिसे ग्रहण करने से उपग्रह पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण से मुक्त होकर अनन्त में चला जाए उपग्रह की बंधन ऊर्जा कहलाती है।"

माना m द्रव्यमान का उपग्रह पृथ्वी के चारों ओर r त्रिज्या के वृत्तीय पथ पर चक्कर लगा रहा है तो उपग्रह की कुल ऊर्जा $E = -\frac{GM_em}{2r}$

Since अनन्त पर कुल ऊर्जा शून्य होती है। अत: ऊर्जा शून्य करने के लिए उपग्रह को $\frac{GM_em}{2r}$ ऊर्जा की आवश्यकता होगी। यही ऊर्जा बंधन ऊर्जा कहलाती है।

अत: उपग्रह की बंधन ऊर्जा $= \frac{GM_em}{2r}$

Date ______
Page No. ______

Imp.

पलायन वेग -(Escape Velocity)-

~~किसी पिण्ड के पलायन वेग तथा पलायन ऊर्जा से आप क्या समझते हैं। सिद्ध कीजिए कि किसी पिण्ड का पलायन वेग पिण्ड के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है।~~

वह न्यूनतम वेग जिससे किसी पिण्ड को पृथ्वी तल से ऊपर फेंकनें पर वह पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र को पार कर जाए और पृथ्वी पर लौट कर वापस न आए, पलायन वेग कहलाता है तथा गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र को पार करने के लिए आवश्यक ऊर्जा, पलायन ऊर्जा कहलाती है।

यदि किसी पिण्ड का द्रव्यमान m तथा पलायन वेग v_e है। तो पलायन ऊर्जा $= \frac{1}{2} m v_e^2$

Obj. Imp.

पलायन वेग के सूत्र का निगमन-

माना पृथ्वी का द्रव्यमान M_e, त्रिज्या R_e है। तथा m द्रव्यमान का एक पिण्ड पृथ्वी तल के समीप स्थित है तो इस पिण्ड की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा $U = -\frac{GM_e m}{R_e}$ —— (1)

इस पिण्ड को अनन्त तक ले जाने के लिए ऊर्जा शून्य होनी चाहिए। अतः शून्य ऊर्जा करने के लिए पिण्ड को $\frac{GM_e m}{R_e}$ ऊर्जा देनी होगी। अतः पलायन ऊर्जा $= \frac{GM_e m}{R_e}$

$$\therefore \frac{1}{2} m v_e^2 = \frac{GM_e m}{R_e}$$

$$v_e^2 = \frac{2GM_e}{R_e}$$

Since

$$GM_e = gR_e^2$$

so

$$v_e^2 = \frac{2gR_e^2}{R_e}$$

Date
Page No.

$$v_e^2 = 2gR_e$$

$$\boxed{v_e = \sqrt{2gR_e}}$$

स्पष्ट है कि पलायन वेग का मान पिण्ड के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है।

Imp पलायन वेग का मान 11.2 Km/sec होता है।

Imp कक्षीय वेग तथा पलायन वेग में सम्बन्ध-
पृथ्वी के चारों ओर घूमते हुए उपग्रह का कक्षीय वेग

$$v_o = \sqrt{gR_e} \quad \text{—— (1)}$$

उपग्रह का पलायन वेग $v_e = \sqrt{2gR_e}$ —— (2)

समीकरण (2) में (1) का भाग देने पर-

$$\frac{v_e}{v_o} = \frac{\sqrt{2gR_e}}{\sqrt{gR_e}}$$

$$\frac{v_e}{v_o} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\boxed{v_e = \sqrt{2} \cdot v_o}$$

इस प्रकार पलायन वेग कक्षीय वेग का $\sqrt{2}$ गुना होता है।

→ भू-तुल्यकारी उपग्रह - जब कृत्रिम उपग्रह की पृथ्वी तल से ऊँचाई इतनी हो जाए कि उपग्रह का परिक्रमण काल पृथ्वी की कक्षीय गति के परिक्रमण काल के बराबर हो जाए तो वह उपग्रह पृथ्वी के सापेक्ष स्थिर हो जाएगा। ऐसे उपग्रह भू-तुल्यकारी उपग्रह कहते हैं।

प्रश्न। ~~सूर्य~~ चन्द्रमा पर वायुमण्डल नहीं पाया जाता है, क्यों ?

उ० → चन्द्रमा पर गैस के अणुओं का औसत ऊष्मीय वेग चन्द्रमा पर पलायन वेग से अधिक होता है अतः गैस के अणु चन्द्रमा के गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र को पार कर जाते हैं जिसके कारण चन्द्रमा के आस-पास गैस नहीं ठहर पाती है। इसलिए वायुमण्डल उपस्थित नहीं हो पाता है।

Numericals

दृढ़ पिण्डों की घूर्णी गति

प्र० न०1. एक पहिया जो विरामावस्था में है, 3 रेडियन/सेकण्ड² के कोणीय त्वरण के अन्तर्गत 2 सेकण्ड तक घूमता है। इस समयान्तराल में पहिया कितना कोणीय वेग अर्जित कर लेगा और उसमें कितना कोणीय विस्थापन होगा।

Solve- Given that,

पहिए का प्रारम्भिक कोणीय वेग $\omega_0 = 0$

कोणीय त्वरण $\alpha = 3 \text{ Rad/sec}^2$

समय $t = 2 \text{ Sec}$

प्रथम समीकरण से-

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\therefore \omega = 0 + 3 \times 2$$

$$\omega = 6 \text{ Rad/sec}$$

from

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

$$6^2 = 0 + 2 \times 3 \times \theta$$

$$36 = 6\theta$$

$$\theta = 6 \text{ Rad.}$$

प्र० न०2. एक रेलगाडी का पहिया 6 चक्कर/sec लगा रहा है। ब्रेक लगाने पर वह 12 सेकण्ड में रुक जाता है। ब्रेक द्वारा उत्पन्न कोणीय मंदन कितना होगा।

Solve-

12 Sec बाद पहिए का अन्तिम कोणीय वेग $\omega = 0$

प्रारम्भिक कोणीय वेग $\omega_0 = 2\pi n$

Where,

$$n = 6 \text{ चक्कर/sec}$$

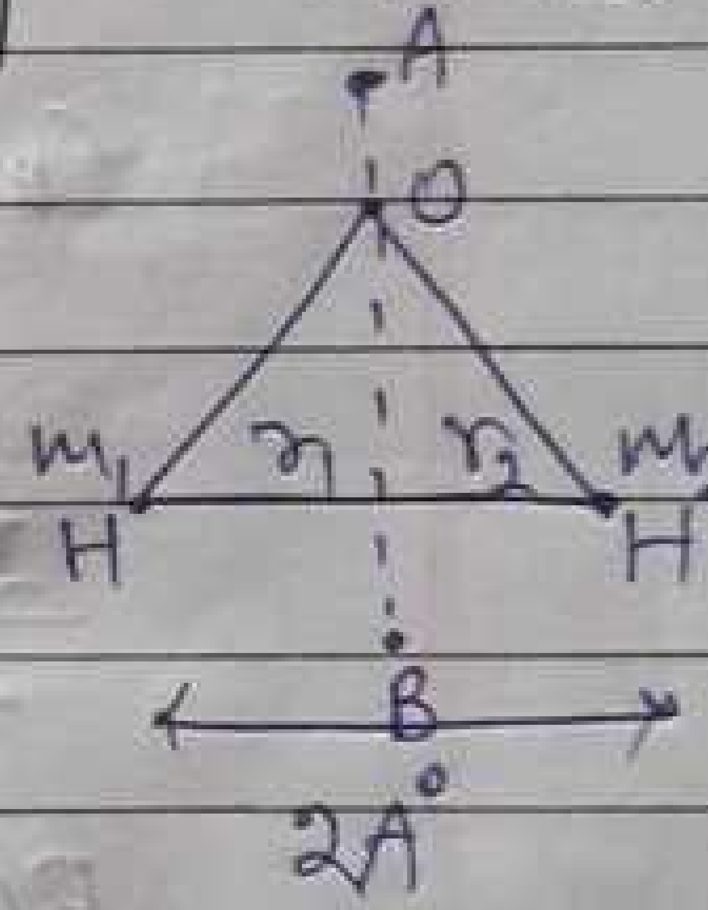
$$\omega_0 = 2 \times 3.14 \times 6$$

$$\omega_0 = 37.68 \text{ Rad/sec}$$

प्रथम समीकरण से -

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$
$$\alpha t = \omega - \omega_0$$
$$\alpha = \frac{0 - 37.68}{12}$$
$$\alpha = -\frac{37.68}{12}$$
$$\alpha = -3.14 \text{ Rad/sec}^2$$ **Ans.**

प्र०न३. H_2O ~~का~~ अणु का जडत्व आघूर्ण उस अक्ष के परित: ज्ञात कीजिए जो दोनों हाइड्रोजन परमाणुओं को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत है और ऑक्सीजन परमाणु से होकर जाती है। हाइड्रोजन परमाणु का द्रव्यमान 1.67×10^{-27} kg तथा परमाणु के बीच की दूरी $2\mathring{A}$ है।



m_1 द्रव्यमान वाले कण का AB अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण $I_1 = m_1 r_1^2$

$$\because r_1 = \frac{2\mathring{A}}{2} = 1\mathring{A}$$

and

m_2 द्रव्यमान वाले कण का AB अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण $I_2 = m_2 r_2^2$

$$\because r_2 = \frac{2\mathring{A}}{2} = 1\mathring{A}$$

$\therefore$ अणु का जडत्व आघूर्ण (AB अक्ष के सापेक्ष)

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = m_2 = 1.67 \times 10^{-27} \\ r_1 = r_2 = 1\mathring{A} = 1 \times 10^{-10} \text{ mt} \end{array} \right\}$$

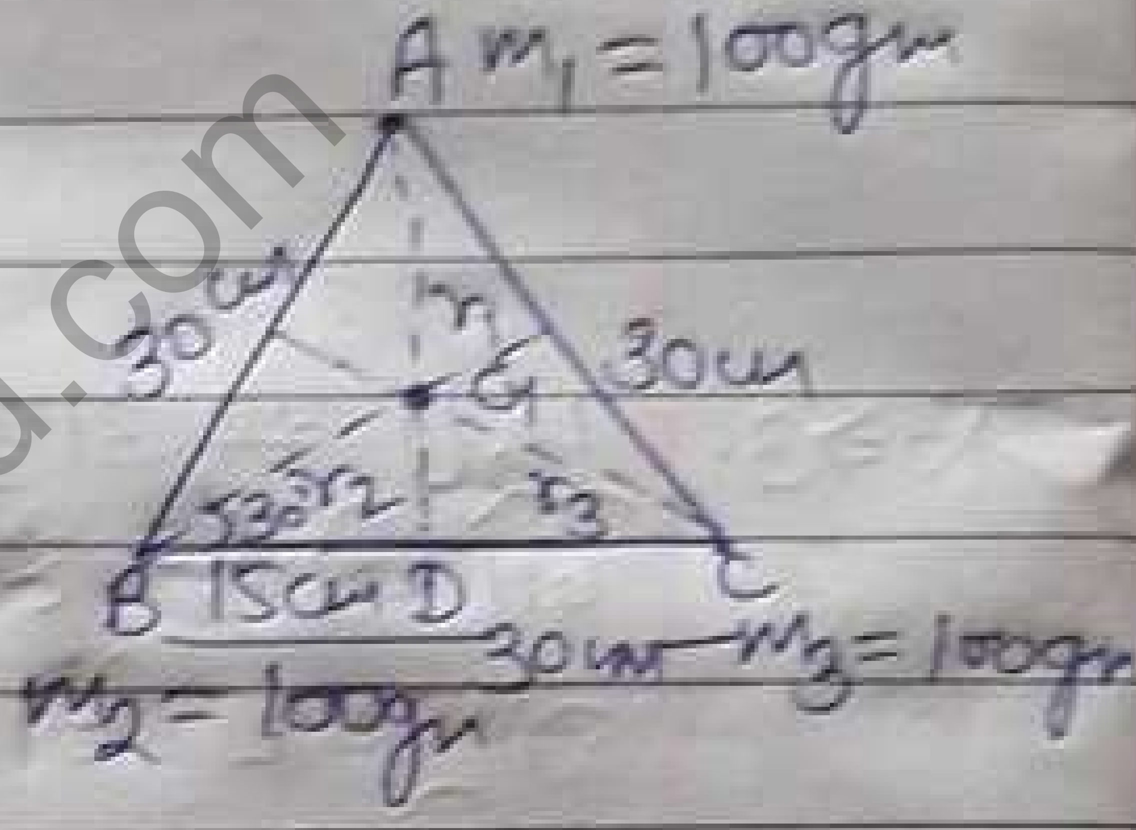
∴ H_2O का जड़त्व आघूर्ण-

$$I = 2mr^2$$
$$I = 2\times1.67\times10^{-27}\times1\times10^{-20}$$
$$I = 3.34\times10^{-47}\ kg\cdot m^2 \quad \text{Ans.}$$

100%
V. Imp.

प्रश्न 4. 30 cm भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज के कोनों पर 100 gm द्रव्यमान के पिण्ड रखे हैं। तल के लम्बवत गुरुत्व केन्द्र से जाने वाली अक्ष के परितः निकाय का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए

Solve → चित्र से स्पष्ट है कि



$$m_1 = m_2 = m_3 = 100\ gram$$

and
$$AG = BG = CG$$

ΔGBD में-

$$\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{BD}{BG}$$

$$\frac{\sqrt3}{2} = \frac{15}{BG}$$

$$BG = \frac{30}{\sqrt3}\ cm$$

या

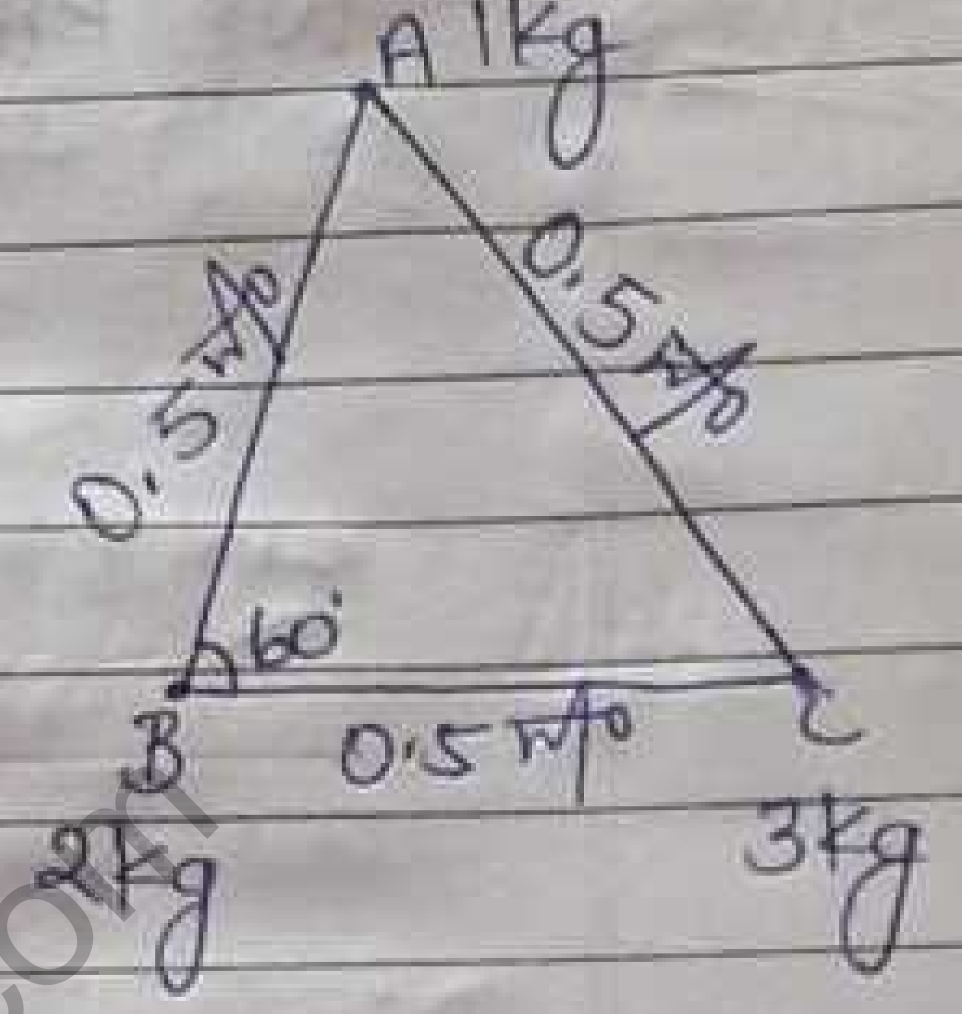
$$BG = \frac{30}{\sqrt3}\times10^{-2}\ मी॰$$

निकाय का G से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण-

$$I = mr^2 + mr^2 + mr^2$$
$$I = 3mr^2$$
$$I = 3\times100\times10^{-3}\times\frac{900}{3}\times10^{-4}\ मी॰$$

$$\therefore \quad I = 9\times10^{-3}\ kg\cdot m^2 \quad \text{Ans.}$$

प्र०→5. एक समबाहु त्रिभुज जिसकी प्रत्येक भुजा .5 मी० है। इसके कोनों ABC पर 1, 2, 3 kg के पिण्ड रखे हैं। बिन्दु A से गुजरने वाली तथा त्रिभुज के तल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।



चित्र से स्पष्ट है कि-

2kg द्रव्यमान वाले पिण्ड का A से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण-

$$I_1 = mr^2$$
$$I_1 = 2\times(0.5)^2$$
$$I_1 = 2\times 0.25$$
$$I_1 = 0.5\ kg.m^2$$

पुनः

3kg द्रव्यमान वाले पिण्ड का A से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण-

$$I_2 = 3\times(0.5)^2$$
$$I_2 = 3\times 0.25$$
$$I_2 = 0.75\ kg.m^2$$

तथा

1kg द्रव्यमान वाले पिण्ड का A से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण-

$$I_3 = 0$$ Because, पिण्ड उसी अक्ष पर स्थित है।

पूरे निकाय का A से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$
$$I = 0.5 + 0.75 + 0$$
$$I = 1.25\ kg.m^2$$ Ans.

प्र०→6. किसी पिण्ड का कोणीय संवेग 100 जूल × सेकण्ड है। यदि यह 25 Rad/Sec की दर से ~~मति~~ घूर्णन कर रहा है। तो पिण्ड का जडत्व आघूर्ण कितना होगा।

Solve: Given,

कोणीय संवेग $J = 100 J \cdot Sec$

कोणीय वेग $\omega = 25$ Rad/sec

We know that

$$J = I\omega$$

$$I = \frac{J}{\omega}$$

$$I = \frac{\cancel{100}}{\cancel{25}}$$

$$\underline{I = 4 \, kg \cdot m^2}$$

प्र०२७. एक पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण 2.5 $kg \cdot m^2$ है। इसमें 10 Rad/Sec² का कोणीय त्वरण उत्पन्न करने के लिए आवश्यक बल आघूर्ण की गणना कीजिए।

25 N·m

Given,

जड़त्व आघूर्ण $I = 2.5 \, kg \cdot m^2$

कोणीय संवेग $\alpha = 10$ Radian/sec

We know that

$$\tau = I \cdot \alpha$$

$$\tau = 2.5 \times 10$$

$$\underline{\tau = 25 \, N/m}$$

प्रश्न 8. एक पहिया 1000 चक्कर / मिनट की दर से घूम रहा है इसमें 10^6 J घूर्णन गतिज ऊर्जा है। तो पहिए का अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

1 मिनट में चक्करों की संख्या = 1000 चक्कर

1 Sec में चक्करों की संख्या $= \frac{1000}{60} = \frac{50}{3}$

अर्थात

$$n = \frac{50}{3}$$

$$\therefore \omega = 2\pi n$$

$$\omega = 2\pi \times \frac{50}{3} = \frac{100\pi}{3}$$

Given,

$$K = 10^6 \text{ J}$$

घूर्णन गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2} I\omega^2$

$$10^6 = \frac{1}{2} \times I \times \left(\frac{100\pi}{3}\right)^2$$

$$10^6 \times 2 \times 9 = I \times 10^4 \pi^2$$

$$I = \frac{10^6 \times 18}{10^4 \pi^2}$$

$$I = \frac{18 \times 10^2}{\pi^2}$$

$$I = \frac{18 \times 10^2}{(3.14)^2}$$

$$I = 1.82 \times 10^2$$

$$I = 182 \text{ kg.m}^2$$

Ans.

प्र॰ 9. $2\sqrt{2}$ मी॰ त्रिज्या की एक चकती (Disc) अपनी अक्ष के परितः घूर्णन कर रही है तो उसकी घूर्णन या परिभ्रमण त्रिज्या की गणना कीजिए।

Solve ⇒

(Disc) चकती की त्रिज्या

$$R = 2\sqrt{2} \text{ मी॰}$$

घूर्णन परिक्रमण त्रिज्या $K = ?$

$$K = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

Disc का अपनी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

So

$$K = \sqrt{\frac{MR^2}{2M}} = \sqrt{\frac{R^2}{2}}$$

$$K = \sqrt{\frac{(2\sqrt{2})^2}{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}}$$

$$K = \sqrt{4}$$

∴ घूर्णन त्रिज्या $K = 2$ मी॰ Ans.

प्र॰ ⇒ 10. 5 kg द्रव्यमान एवं .4 मी॰ व्यास की एक (Ring) अपनी ज्यामितीय अक्ष के परितः 840 चक्कर / मिनट की दर से घूम रही है तो इसके कोणीय संवेग तथा घूर्णन गतिज ऊर्जा का परिकलन कीजिए।

17.6 $\frac{kgm^2}{sec}$

741.4 J

Solve ⇒

Ring का अपनी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I = MR^2$$

प्र०7 M एक पिण्ड जो विरामावस्था में है। उसका जड़त्व आघूर्ण 3 kg.m² है। इसे 6 N.m के ~~आघूर्ण~~ बल आघूर्ण द्वारा 20 sec तक घुमाया जाता है। पिण्ड का कोणीय विस्थापन ज्ञात कीजिए तथा किए गए कार्य की भी गणना कीजिए।

Solve → given,

जड़त्व आघूर्ण $I = 3\ kg.m^2$

बल आघूर्ण $\tau = 6\ New.m$

समय $t = 20 sec$

प्रारम्भिक कोणीय वेग $\omega_0 = 0$

We know that

$$\tau = I\alpha$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I}$$

$$\alpha = \frac{6}{3}$$

$$\alpha = 2\ Rad/sec^2$$

t sec बाद कोणीय विस्थापन

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\theta = 0 \times 20 + \frac{1}{2} \times 2 \times 400$$

$$\theta = 400\ Rad.$$

किया गया कार्य

$$W = \tau \times \theta$$

$$W = 6 \times 400$$

$$W = 2400\ \text{जूल}$$ Ans.

प्र०→12. 5kg द्रव्यमान एवं .4 मी त्रिज्या की एक (Disc) अपनी अक्ष के परितः 28 चक्कर/sec की दर से घूम रही है। इसका कोणीय संवेग तथा घूर्णन गतिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए।

Solve→ Given,

Disk का द्रव्यमान $M = 5\,kg$

Disk की त्रिज्या $r = .4\,m$

Disk का अपनी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

$$I = \frac{5 \times 0.16}{2} = 0.4\,kg\,m^2$$

We know that,

$$J = I\omega$$

$$J = I \times 2\pi n$$

$$J = 0.4 \times 2 \times \frac{22}{7} \times 28$$

$$J = 3.2 \times 22$$

$$J = 70.4 \text{ Joule-sec}$$

घूर्णन गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2} I\omega^2$

$$K = \frac{1}{2} \times 0.4 \times \left(2 \times \frac{22}{7} \times 28\right)^2$$

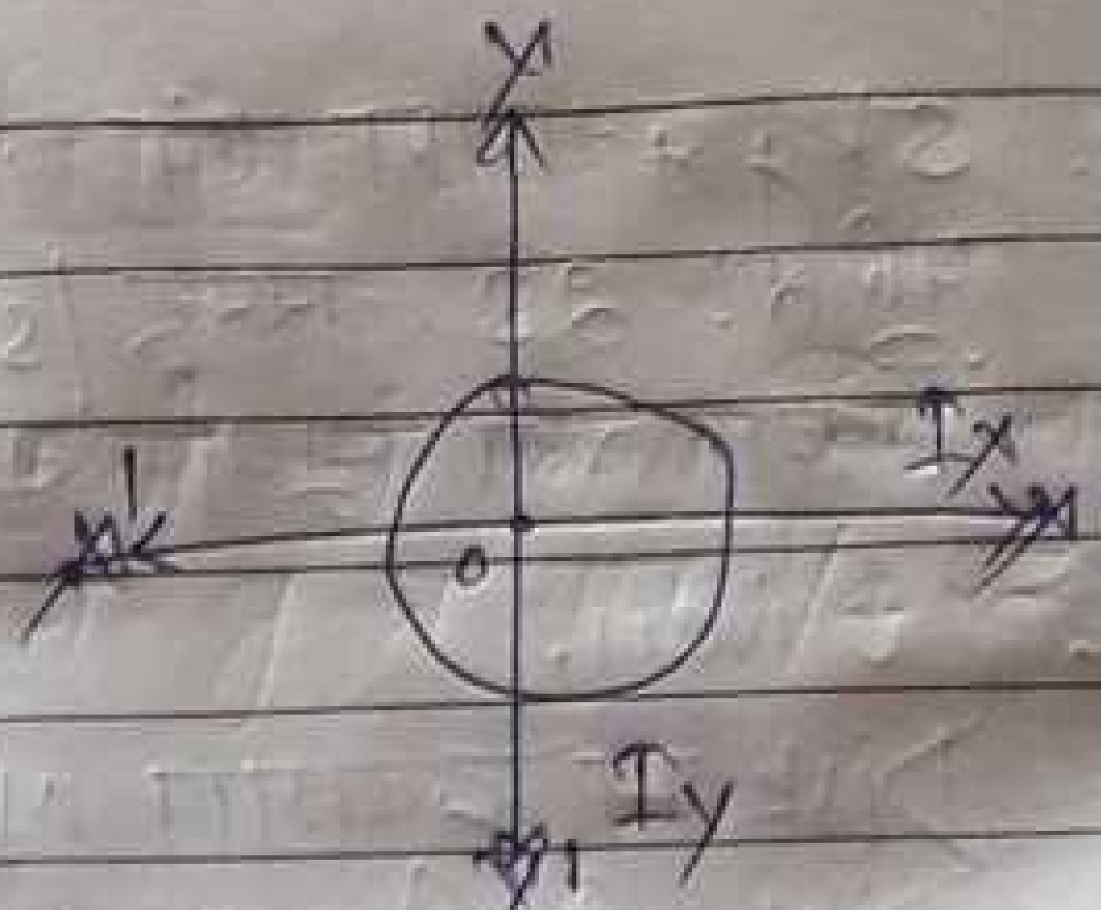
$$K = 0.2 \times 64 \times 484$$

$$K = 6195.2 \text{ जूल}$$ Ans.

प्र०→13. वृत्ताकार छल्ले (Ring) का व्यास के परितः सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $4\,gm.cm^2$ है। छल्ले के केन्द्र से गुजरने वाली तथा तल के लम्बवत अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

Solve ⇒ व्यास के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण.

$$I_x = I_y = 4 \text{ gram}\cdot\text{cm}^2$$



लम्ब अक्षों की प्रमेय से.

$$I = I_x + I_y$$

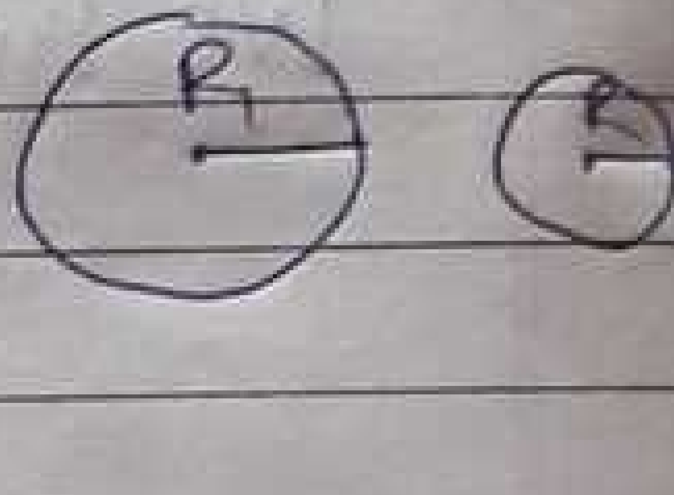
$$I = 4 + 4$$

$$I = 8 \text{ gram}\cdot\text{cm}^2$$

प्र० ⇒ 14. यदि पृथ्वी अचानक सिकुड़ जाए जिससे कि इसकी त्रिज्या प्रारम्भिक त्रिज्या की एक तिहाई रह जाए तो पृथ्वी पर दिन कितने समय के होंगे.

Solve ⇒ माना पृथ्वी की प्रारम्भिक त्रिज्या $R_1 = R$

सिकुड़ने के बाद त्रिज्या $R_2 = \frac{R}{3}$



कोणीय संवेग संरक्षण के सिद्धान्त से.

$$J = I\omega = \text{Constant}$$

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

पृथ्वी एक ठोस गोला है.

अतः इसका अपनी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण.

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

$$\frac{2}{5}MR_1^2\left(\frac{2\pi}{T_1}\right) = \frac{2}{5}MR_2^2\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)$$

$$\frac{R_1^2}{T_1} = \frac{R_2^2}{T_2}$$

so

$$T_2 = \frac{R_2^2}{R_1^2} \times T_1$$

$$T_2 = \frac{(R/3)^2}{R^2} \times 24 \text{ घण्टे}$$

$$T_2 = \frac{1}{9} \times 24 = \frac{26}{9} = 2\frac{2}{3} \text{ घण्टे}$$

$$T_2 = 2 \text{ घण्टे } 40 \text{ मिनट}$$ **Ans**

सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक :-

प्र०→1. सिद्ध कीजिए कि पृथ्वी तल से पृथ्वी की त्रिज्या के बराबर ऊँचाई पर जाने पर गुरुत्वीय त्वरण g का मान 1/4 रह जाता है।

Solve→ पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय त्वरण = g
पृथ्वी तल से h ऊँचाई पर जाने पर त्वरण

$$g' = \frac{g}{\left(1+\frac{h}{Re}\right)^2}$$

given,

$$h = Re$$

$$g' = \frac{g}{\left(1+\frac{Re}{Re}\right)^2}$$

$$g' = \frac{g}{(2)^2}$$

$$\boxed{g' = \frac{g}{4}}$$

प्र०→2. पृथ्वी तल से कितनी ऊँचाई पर गुरुत्वीय त्वरण पृथ्वी तल पर g के मान का आधा रह जायेगा। पृथ्वी की त्रिज्या 6400 km है।

Solve→

पृथ्वी तल पर त्वरण = g
h ऊँचाई पर त्वरण = $g' = g/2$
पृथ्वी की त्रिज्या = 6400 km

Page No.

पृथ्वी तल से h ऊँचाई पर गुरुत्वीय त्वरण -

$$g' = \frac{g}{\left(1+\frac{h}{Re}\right)^2}$$

$$\left(1+\frac{h}{Re}\right)^2 = \frac{g}{g'}$$

$$\left(1+\frac{h}{Re}\right)^2 = \frac{g}{g/2} = 2$$

$$1+\frac{h}{Re} = \sqrt{2}$$

so

$$\frac{h}{Re} = \sqrt{2}-1$$

$$\frac{h}{Re} = (1.414-1)$$

$\because Re = 6400 km$

so

$$h = 0.414 \times 6400$$

$$h = 2649.6 km$$ **Ans.**

प्र०73. पृथ्वी तल से कितना नीचे जाने पर गुरुत्वीय त्वरण पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय त्वरण का आधा रह जायेगा। जबकि पृथ्वी की त्रिज्या 6400 km है,

Solve→ माना पृथ्वी तल पर त्वरण $= g$

h गहराई पर त्वरण $(g') = g/2$

पृथ्वी की त्रिज्या $= 6400$ km

पृथ्वी तल से h गहराई पर गुरुत्वीय त्वरण -

$$g' = g\left(1-\frac{h}{Re}\right)$$

$$\frac{g}{2} = g\left(1 - \frac{h}{R_e}\right)$$

So

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{h}{R_e}$$

$$\frac{h}{R_e} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{h}{R_e} = \frac{1}{2}$$

$$2h = R_e \qquad \because R_e = 6400\,km$$

So

$$h = \frac{6400}{2}$$

$$h = 3200\,km$$

प्र०न4. पृथ्वी की सतह से कितनी गहराई पर जाने पर गुरुत्वीय त्वरण का मान पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय त्वरण का 70% रह जायेगा।

Solve⇒ माना पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय त्वरण $= g$

h गहराई पर गुरुत्वीय त्वरण $(g') = g$ का 70%

$$= \frac{g \times 70}{100} = \frac{7}{10}g$$

h गहराई पर गुरुत्वीय त्वरण $g' = g\left(1 - \frac{h}{R_e}\right)$

$$\frac{7}{10}g = g\left(1 - \frac{h}{R_e}\right)$$

So

$$\frac{7}{10} = 1 - \frac{h}{R_e}$$

$$\frac{h}{R_e} = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{h}{R_e} = \frac{3}{10}$$

$$10h = 3 \times R_e$$

So

$$10h = 3 \times 6400$$

$$h = \frac{3 \times 6400}{10} = 1920$$

$$h = 1920 \text{ km}$$

प्र० ⇒5. पृथ्वी तल से 50km ऊपर जाने पर गुरुत्वीय त्वरण के मान में कितने प्रतिशत की कमी हो जायेगी।

Solve ⇒ माना पृथ्वी पर गुरुत्वीय त्वरण $= g$

50 km ऊँचाई पर त्वरण $= g'$

$$g' = \frac{g}{\left(1 + \frac{h}{R_e}\right)^2}$$

So

$$g' = \frac{g}{\left(1 + \frac{50}{6400}\right)^2}$$

$$g' = \frac{g}{\left(1 + \frac{1}{128}\right)^2}$$

$$g' = \frac{g}{\left(\frac{129}{128}\right)^2}$$

so

$$g' = \left(\frac{128}{129}\right)^2 \times g$$

$$g' = (0.99)^2 \times g$$

$$g' = 0.98g$$

∴ प्रतिशत कमी $= \left(\frac{g - 0.98g}{g}\right) \times 100$

$$= \frac{g(1-0.98)}{g} \times 100$$

$$= 0.02 \times 100$$

$$= 2\%$$ Ans.

प्र० ⇒ 6. चन्द्रमा के तल पर गुरुत्वीय त्वरण का मान कितना होगा यदि चन्द्रमा की त्रिज्या पृथ्वी की त्रिज्या की $\frac{1}{4}$ भाग है। तथा चन्द्रमा का द्रव्यमान पृथ्वी के द्रव्यमान का $\frac{1}{80}$ वाँ भाग है।

Solve ⇒ माना पृथ्वी का द्रव्यमान $M_e = M$

चन्द्रमा का द्रव्यमान $M_m = \frac{M}{80}$

पृथ्वी की त्रिज्या $R_e = R$

चन्द्रमा की त्रिज्या $R_m = \frac{R}{4}$

$gR_e^2 = GM_e$ से –

$g = \frac{GM_e}{R_e^2}$ से –

Date
Page No.

पृथ्वी पर $g = \frac{GM}{R^2}$ —— ①

चन्द्रमा पर $g_m = \frac{GM}{\frac{80 \times R^2}{16}} = \frac{GM}{5R^2}$ —— ②

$$\frac{g}{g_m} = \frac{GM}{R^2} \times \frac{5R^2}{GM}$$

So $$\frac{g}{g_m} = 5$$

$$\boxed{g_m = \frac{g}{5}}$$

– चन्द्रमा का गुरुत्वीय त्वरण पृथ्वी के गुरुत्वीय त्वरण के $\frac{1}{5}$ वाँ भाग होगा।

प्र०77. पृथ्वी के किसी स्थान पर 25kg द्रव्यमान के पिण्ड 250 N का बल लग रहा है तो इस स्थान पर गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता का मान क्या होगा।

Solve॰ given,

द्रव्यमान $m = 25 kg$

बल $F = 250$ New

∴ गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता $I = \frac{F}{M}$

$$I = \frac{250}{25}$$

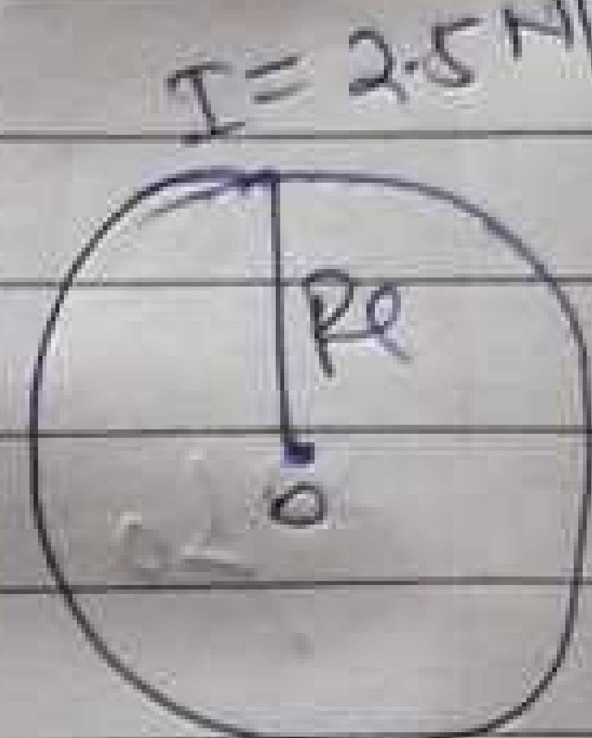
$$I = 10 \text{ New/kg}$$ Ans.

प्र० ⇒ 8 पृथ्वी तल पर स्थित बिन्दु पर गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता $2.5 \, N/kg$ है। इस बिन्दु पर गुरुत्वीय विभव की गणना कीजिए। जबकि पृथ्वी की त्रिज्या $R_e = 6.4 \times 10^6$ मी० है।

Solve ⇒ पृथ्वी के केन्द्र से बिन्दु की दूरी $r = R_e = 6.4 \times 10^6$ मी

पृथ्वी तल पर स्थित बिन्दु पर गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता

$$I = 2.5 \text{ New/Kg.}$$



We know that -

$$I = \frac{-V}{r}$$

∴ विभव $V = -I \times r$

$$V = -2.5 \times 6.4 \times 10^6$$

$$V = -16.00 \times 10^6$$

$$V = -1.6 \times 10^7 \text{ वोल्ट}$$ Ans.

Imp.

प्र० ⇒ 9. 2 ग्रहों की त्रिज्यायें 1 : 2 के अनुपात में हैं। इनकी सतहों पर गुरुत्वीय त्वरणों का अनुपात ज्ञात कीजिए जबकि -

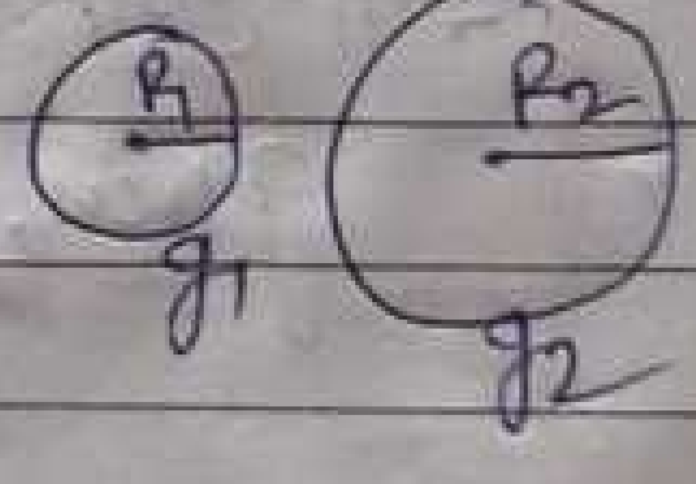
(I) दोनों के द्रव्यमान समान हैं।

(II) दोनों के पदार्थ समान हैं।

Solve ⇒ माना दो ग्रह हैं जिनकी त्रिज्यायें क्रमशः R_1, R_2 हैं।

Given,

$$R_1 : R_2 = 1 : 2$$



(I) दोनों के द्रव्यमान समान हैं। अर्थात

$$M_1 = M_2$$

We know that.

$$g R^2 = GM$$

$$g = \frac{GM_1}{R^2}$$

$$g_1 = \frac{GM_1}{R_1^2}$$

and

$$g_2 = \frac{GM_2}{R_2^2}$$

प्रश्नानुसार

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{GM_1}{R_1^2} \times \frac{R_2^2}{GM_1} \qquad \because M_1 = M_2$$

$$\frac{g_1}{g_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2$$

$$\frac{g_1}{g_2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2$$

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{4}{1}$$

अर्थात

$$g_1 : g_2 = 4:1$$

(II) दोनों के घनत्व समान हैं; अर्थात

$$\rho_1 = \rho_2$$

from

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

$$\because M = \frac{4}{3}\pi R^3 \times \rho$$

$$\therefore g = \frac{G}{R^2} \times \frac{4}{3}\pi R^3 \times \rho$$

$$g = G \times \frac{4}{3}\pi R \times \rho$$

So

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{G \times \frac{4}{3}\pi R_1 \times \rho}{G \times \frac{4}{3}\pi R_2 \times \rho}$$

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}$$

$$g_1 : g_2 = R_1 : R_2$$

अर्थात

$$g_1 : g_2 = 1 : 2$$

प्रश्न 10. पृथ्वी के केंद्र से उस बिंदु की दूरी ज्ञात कीजिए जहाँ गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता 2.5 New/kg है। उस बिंदु पर गुरुत्वीय विभव भी ज्ञात कीजिए। जबकि $R_e = 6.4 \times 10^6$ m है।

Solve

माना पृथ्वी के केन्द्र से r दूरी पर कोई पिण्ड P है।
r दूरी पर गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता

$$I = \frac{GM}{r^2}$$

We know that.

$$GM_e = gR_e^2$$

So

$$I = \frac{gR_e^2}{r^2}$$

$$r^2 = \frac{gR_e^2}{I}$$

$$r = \sqrt{\frac{g}{I}} \times R_e$$

So

$$r = \sqrt{\frac{10}{2.5} \times 6.4 \times 10^6}$$

$$r = \sqrt{4} \times 6.4 \times 10^6$$

$$r = 2 \times 6.4 \times 10^6$$

$$r = 12.8 \times 10^6 \text{ मी०}$$

∴ r दूरी पर गुरुत्वीय विभव

$$I = \frac{-V}{r}$$

$$V = -Ir$$

$$V = -2.5 \times 12.8 \times 10^6$$

$$V = -32.00 \times 10^6$$

$$V = -3.2 \times 10^7 \text{ वोल्ट}$$ Ans

Page No.

उपग्रहों की गति तथा पलायन वेग :-

प्र०न१. पृथ्वी तल से किसी पिण्ड का पलायन वेग 11.2 km/sec है। यदि किसी अन्य ग्रह की त्रिज्या पृथ्वी की त्रिज्या की आधी है और द्रव्यमान पृथ्वी के द्रव्यमान का 1/4 हो तो उस ग्रह पर किसी पिण्ड का पलायन वेग कितना होगा।

Solution

पृथ्वी पर पलायन वेग $v_e = 11.2\ km/sec$

ग्रह पर पलायन वेग $v_p = ?$

Given,

ग्रह की त्रिज्या

$$R_p = \frac{R_e}{2}$$

ग्रह का द्रव्यमान

$$M_p = \frac{M_e}{4}$$

We know that -

$$\text{पलायन वेग } v = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$$

$$\text{पृथ्वी पर पलायन वेग } v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$$

$$\text{ग्रह पर पलायन वेग } v_p = \sqrt{\frac{2GM_p}{R_p}}$$

$$\therefore \frac{v_e}{v_p} = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}} \times \sqrt{\frac{R_p}{2GM_p}}$$

so

$$\frac{11.2}{v_p} = \sqrt{\frac{M_e}{R_e} \times \frac{R_e}{2} \times \frac{4}{M_e}}$$

$$\frac{11.2}{v_p} = \sqrt{2}$$

Date
Page No.

$$v_p = \frac{11.2}{\sqrt{2}}$$

$$v_p = \frac{11.2 \times \sqrt{2}}{2}$$

$$v_p = 5.6 \times 1.41$$

$$v_p = 7.92\ km/sec \quad Ans.$$

प्र०→2. एक ग्रह की त्रिज्या पृथ्वी की त्रिज्या की दो गुनी है। परन्तु दोनों के औसत घनत्व समान हैं। यदि पृथ्वी पर पलायन वेग v_e तथा ग्रह पर पलायन वेग v_p है तो सिद्ध कीजिए कि $v_p = 2v_e$

Solve→ माना पृथ्वी की त्रिज्या $R_e = R$
ग्रह की त्रिज्या $R_p = 2R$

We know that.

पलायन वेग $v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

पृथ्वी पर पलायन वेग $v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$ —— (1)

ग्रह पर पलायन वेग $v_p = \sqrt{\frac{2GM_p}{R_p}}$ —— (2)

∵ दोनों के घनत्व समान हैं।

$$\left.\begin{aligned} \text{पृथ्वी का द्रव्यमान } M_e &= \tfrac{4}{3}\pi R_e^3 \cdot \rho \\ \text{ग्रह का द्रव्यमान } M_p &= \tfrac{4}{3}\pi R_p^3 \cdot \rho \end{aligned}\right\} \text{—— (3)}$$

समीकरण (1) में (2) का भाग देने पर

$$\frac{v_e}{v_p} = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}} \times \sqrt{\frac{R_p}{2GM_p}}$$

so

$$\frac{v_e}{v_p} = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\pi R_e^3 e}{R_e} \times \frac{R_p}{\frac{4}{3}\pi R_p^3 e}}$$

$$\frac{v_e}{v_p} = \sqrt{\frac{R^3}{R} \times \frac{2R}{8R^3}}$$

$$\frac{v_e}{v_p} = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

so

$$\frac{v_e}{v_p} = \frac{1}{2}$$

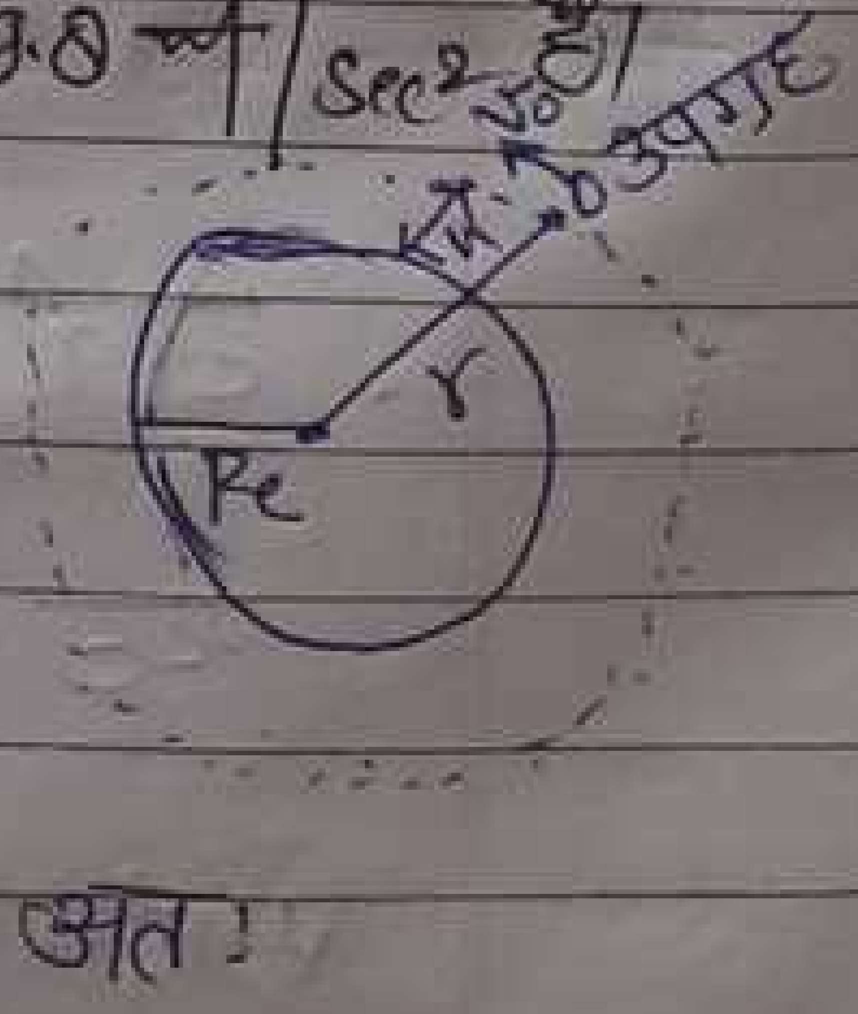
$$v_p = 2v_e$$

or

$$\boxed{v_p = 2v_e}$$ Proved.

प्र०न३. एक उपग्रह पृथ्वी के समीप एक कक्षा में परिक्रमण कर रहा है। उपग्रह की कक्षीय चाल तथा परिक्रमण काल ज्ञात कीजिए। पृथ्वी की त्रिज्या 6.4×10^6 मी है। तथा $g = 9.8$ मी/sec^2 है।

Solve⇒



h ऊँचाई पर घूमते हुए उपग्रह की कक्षीय चाल

$$v_o = \sqrt{\frac{gR_e^2}{R_e + h}}$$

∵ उपग्रह पृथ्वी तल के समीप स्थित है। अतः

$$R_e + h \approx R_e$$

so

$$V_0 = \sqrt{g R_e}$$

$$V_0 = \sqrt{9.8 \times 6.4 \times 10^6}$$

$$V_0 = \sqrt{98 \times 64 \times 10^4}$$

$$V_0 = 8 \times 10^2 \sqrt{49 \times 2}$$

$$V_0 = 8 \times 7 \times 10^2 \times \sqrt{2}$$

$$V_0 = 56 \times 1.4 \times 10^2$$

$$V_0 = 78.4 \times 10^2$$

$$V_0 = 7.84 \times 10^3 \text{ m/sec}$$ Ans.

∴ परिक्रमण काल $T = \frac{2\pi r}{V_0}$

$$T = \frac{2\pi (R_e + h)}{\sqrt{\frac{g R_e^2}{R+h}}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_e + h)^3}{g R_e^2}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_e^3 \left(1 + \frac{h}{R_e}\right)^3}{g R_e^2}}$$

∵ उपग्रह पृथ्वी तल के समीप स्थित है.

∴ $\frac{h}{R_e} \to 0$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_e}{g}}$$

Date
Page No.

So

$$T = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{6.4 \times 10^6}{9.8}}$$

$$T = 2 \times 3.14 \times \frac{8 \times 10^3}{7 \times \sqrt{2}}$$

$$T = \frac{\sqrt{2} \times 3.14 \times 8 \times 10^3}{7}$$

$$T = \frac{1.4 \times 3.14 \times 8 \times 10^3}{7}$$

$$T = 0.2 \times 3.14 \times 8 \times 10^3$$

$$T = 5.024 \times 10^3 \text{ sec}$$

OR

या $T = 5024$

$T \approx 84$ मिनट

प्र०न4 500 gm के पिण्ड को पलायन कराने के लिए कितनी ऊर्जा की आवश्यकता होगी। $g = 10 m/sec^2$ and $R_e = 6.4 \times 10^6$ मी०

Solve We know that.

पृथ्वी तल पर स्थित किसी पिण्ड की ऊर्जा

$$u = -\frac{GM_em}{R_e}$$

अनन्त मे भेजने के लिए (पलायन कराने के लिए ~~...~~ ऊर्जा खर्च करनी होगी

Date
Page No.

इसलिए पिण्ड को दी गई ऊर्जा $= \frac{GMem}{Re}$

Since $GMe = gRe^2$

So

पलायन ऊर्जा $= \frac{gRe^2m}{Re}$

$= gRem$

$= 10 \times 6.4 \times 10^6 \times 500 \times 10^{-3}$

$= 32.0 \times 10^6$ जूल Ans.