पाठ - 4

सदिश विश्लेषण तथा प्रक्षेप्य गति

→ **अदिश राशियाँ** - वे राशियाँ जिन्हें पूर्ण रूप से निरुपित करने के लिए केवल परिणाम की आवश्यकता होती है। अदिश राशियाँ कहलाती हैं।

जैसे - दूरी, द्रव्यमान, समय, ताप, आयतन, चाल, घनत्व, दाब, कार्य, ऊर्जा, शक्ति, विद्युत धारा, आवेश, विभव, विशिष्ट ऊष्मा, आवृत्ति आदि।

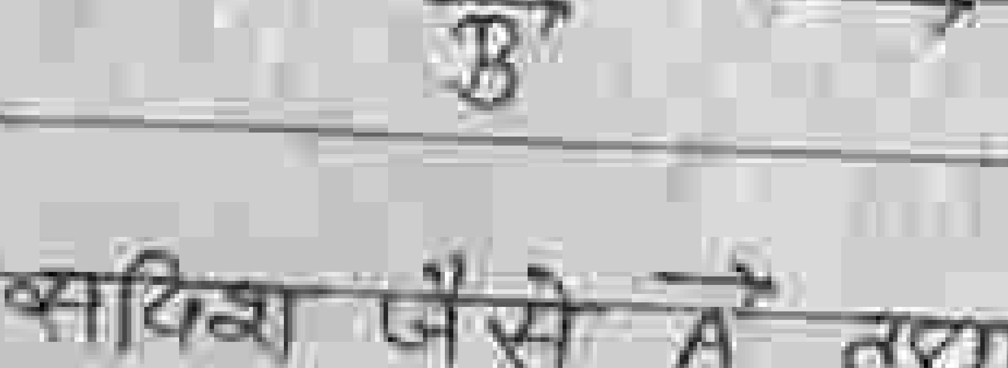
→ **सदिश राशियाँ** - वे राशियाँ जिन्हें पूर्ण रूप से निरुपित करने के लिए केवल परिणाम तथा दिशा दोनों की आवश्यकता होती है सदिश राशियाँ कहलाती हैं।

जैसे - स्थिति, विस्थापन, वेग, त्वरण, बल, भार, संवेग, आवेग, विद्युत क्षेत्र, चुम्बकीय बल क्षेत्र, धारा, घनत्व, आदि।

→ **सदिशों के प्रकार** -

1. **समान सदिश** - वे सदिश जिनके परिणाम तथा दिशायें समान हो समान सदिश कहलाते हैं।

जैसे -



चित्र में दो सदिश जैसे $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ समान परिणाम तथा समान दिशा वाले प्रदर्शित हैं। अर्थात

$$\vec{A} = \vec{B}$$

2. **विपरीत सदिश** - वे समान्तर सदिश जिनके परिणाम बराबर हो परन्तु उनकी दिशा परस्पर विपरीत हो ऐसे सदिश विपरीत सदिश कहलाते हैं।

जैसे→

चित्र मे $\vec{C}$ तथा $\vec{D}$ की दिशाऐ विपरीत हैं परन्तु परिणाम बराबर हैं। अर्थात

$$\vec{C} = -\vec{D}$$

3. एकांक सदिश → वह सदिश जिसका परिणाम 1 होता है। एकांक सदिश कहलाता है। इसे सदिश के ऊपर कैरट (^) लगाकर प्रदर्शित करते हैं।
यह सदिश केवल दिशा को प्रकट करता है।

जैसे→ ~~अक्ष~~ A की दिशा मे एकांक सदिश को $\hat{A}$ से लिखा जाता है।

एकांक सदिश $\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A}}{A}$

या $|\vec{A}| = A$ (वेक्टर A का परिणाम)

→ विशेष नोट → यदि x, y, z अक्ष के अनुदिश एकांक सदिशों को क्रमशः $\hat{i}, \hat{j}$ तथा $\hat{k}$ से प्रदर्शित करें तो

$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$

धन x अक्ष की दिशा में 5 मात्रक का सदिश = $5\hat{i}$

ऋण x अक्ष की दिशा में 5 मात्रक का सदिश = $-5\hat{i}$

4. शून्य सदिश → वह सदिश जिसका परिणाम 0 हो शून्य सदिश कहलाता है। इसे $\vec{0}$ से प्रदर्शित करते हैं।
यह वेक्टर, वेक्टर समीकरणों को हल करने में प्रयुक्त करते हैं।

जैसे→ यदि दो वेक्टर $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ हैं तो वेक्टर $\vec{A}$ = वेक्टर $\vec{B}$ की स्थिति में तो

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{0}$$

→ सदिश राशियों का निरूपण ⇒
किसी सदिश राशि को लिखने के लिए उसके ऊपर तीर लगा देते हैं। तीर की लम्बाई उस राशि के परिमाण को तथा नोक उस राशि की दिशा को व्यक्त करती है।
तीर के शुरुआत वाले बिन्दु को प्रारम्भिक बिन्दु या पुच्छ कहते हैं जबकि तीर के अन्तिम बिन्दु को टरमिनर बिन्दु या बाणाग्र कहते हैं

tail (t) $O \xrightarrow{\vec{A}} P$ (h) head

चित्र में $\vec{OP}$ वेक्टर $\vec{A}$ को प्रदर्शित करते हैं।
O = प्रारंभिक बिन्दु
P = अन्तिम बिन्दु

→ विशेष नोट ⇒ वेक्टरों को जोडने या घटाने में याद रखने योग्य बिन्दु समान टरमिनर आपस में जोडे या घटाये नहीं जाते हैं h से t या t से h जोडा जा सकता है।

→ स्थिति सदिश ⇒ किसी बिन्दु की अन्य स्वेच्छ बिन्दु के
Position Vectre ⇒ सापेक्ष स्थिति को प्रकट करने वाला सदिश स्थिति सदिश कहलाता है। इसे $\vec{r}$ से प्रदर्शित करते हैं।

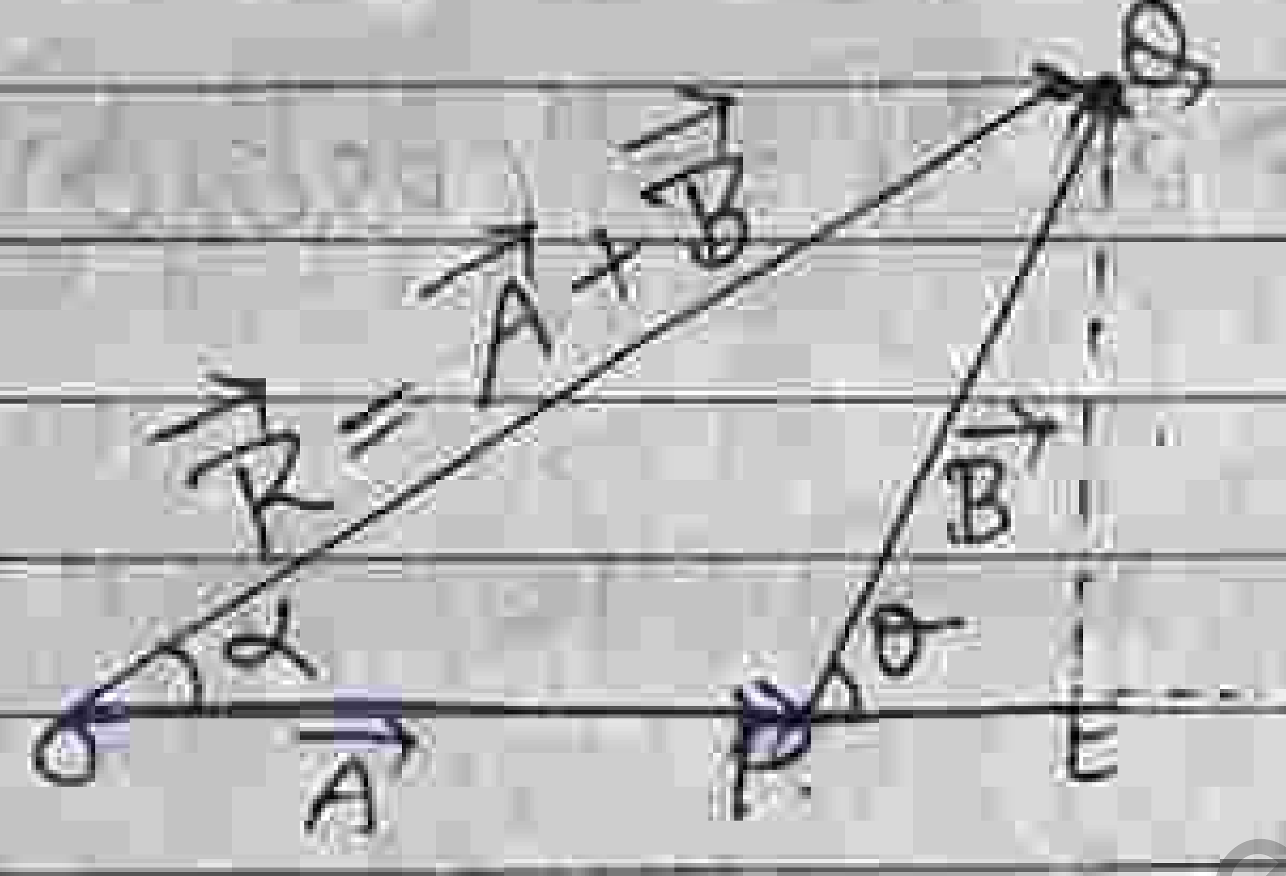
$O \xrightarrow{\vec{r}} P$

O = स्वेच्छ बिन्दु (arbitary Point)
$\vec{r}$ = स्थिति सदिश

P बिन्दु बिन्दु की स्वेच्छ बिन्दु O के सापेक्ष स्थिति को प्रकट करने वाला वेक्टर $\vec{OP} = \vec{r}$ है।

→ दो वेक्टरों को जोडने की ज्यामितीय विधि ⇒
दो वेक्टरों को जोडने की दो विधियाँ हैं।

1. सदिश योग का त्रिभुज नियम →
इस नियम के अनुसार - " यदि दो सदिशों A तथा B को परिणाम तथा दिशा के एक ही क्रम में त्रिभुज की दो भुजाओं द्वारा प्रदर्शित करें तो त्रिभुज की तीसरी भुजा परिमाण तथा दिशा के विपरीत क्रम में उनके वेक्टर योग को प्रकट करेगी।"
माना दो सदिश $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ परिणाम तथा दिशा में त्रिभुज OPQ की भुजाओं $\vec{OP}$ तथा $\vec{PQ}$ द्वारा प्रदर्शित हैं।



बिन्दु Q से OP भुजा पर डाला गया लम्ब QE है।
माना
$$\angle QPE = \theta$$

समकोण ΔOQE में-
कर्ण^2 = लम्ब^2 + आधार^2
$$OQ^2 = QE^2 + OE^2$$
परन्तु
$$OE = OA + PE$$

$$OQ^2 = (OP+PE)^2 + QE^2$$
$$OQ^2 = OP^2 + PE^2 + 2OP\,PE + QE^2$$
$$OQ^2 = OP^2 + (PE^2 + QE^2) + 2OP\,PE$$
$$OQ^2 = OP^2 + (PE^2 + QE^2) + 2OP\,PE$$
लेकिन
$$PE^2 + QE^2 = PQ^2$$

$$\therefore \quad OQ^2 = OP^2 + PQ^2 + 2OP\,PE \quad \text{—— (1)}$$

पुनः ΔPEQ में-

$$\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$$

$$\cos\theta = \frac{PE}{PQ}$$

$$\therefore \ PE = PQ\cos\theta$$

समीकरण ① से-

$$OQ^2 = OP^2 + PQ^2 + 2O\cdot(PQ\cos\theta)$$

परन्तु

$$OP = A$$
$$OQ = R$$
$$PQ = B$$

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$$

या

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \quad \text{—— ②}$$

माना परिणामी सदिश $\vec{R}$ पर सदिश $\vec{A}$ के साथ α कोण बनाता है।

समकोण ΔOEQ में-

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$= \frac{QE}{OE}$$

$$= \frac{QE}{OP+PE}$$

लेकिन

$$\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{QE}{PQ}$$

$$\sin\theta = \frac{QE}{B}$$

$$\therefore \quad QE = B\sin\theta$$

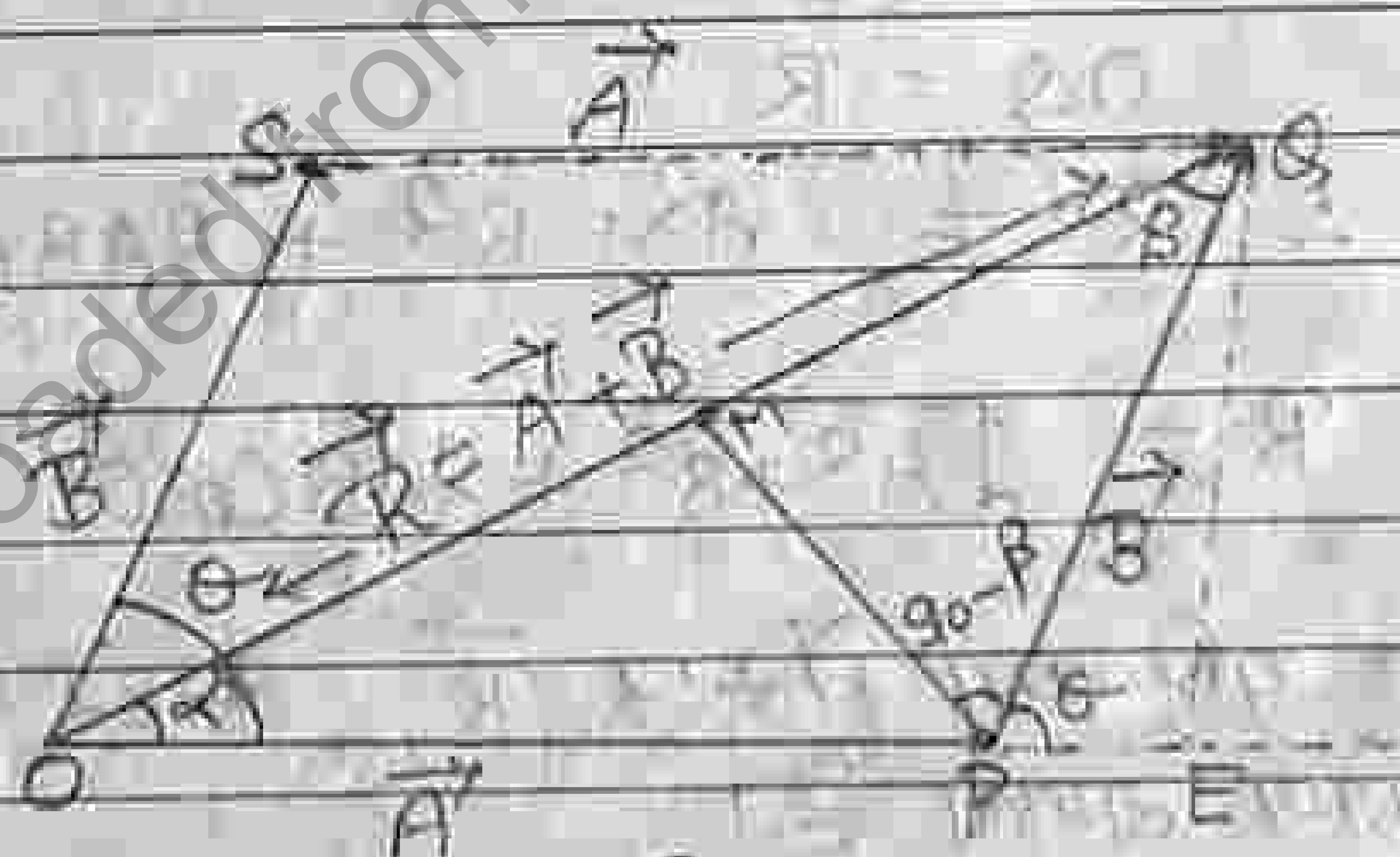
$$\boxed{\tan\alpha = \frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta}}$$

→ सदिशों के योग का समान्तर-चतुर्भुज नियम ⇒

इस नियम के अनुसार -

यदि किन्हीं दो सदिशों को परिमाण व दिशा में समान्तर चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाओं से प्रदर्शित करें तो उसका परिणामी, परिणाम व दिशा में समान्तर चतुर्भुज द्वारा उस विकर्ण द्वारा निरूपित होगा जो उसी बिंदु पर खींचा गया है। इसे सदिश योग का समान्तर-चतुर्भुज नियम कहते हैं।

माना दो सदिश $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ परस्पर θ कोण पर झुके हैं।



- वैक्टर $\vec{A}$ व $\vec{B}$ समान्तर चतुर्भुज OPQS की भुजाओं OP तथा OS द्वारा प्रदर्शित हैं।

भुजा OP पर खींचा गया लम्ब QE है।

माना $\angle QPE = \theta$

समकोण ΔOEQ में

$$OQ^2 = OE^2 + QE^2$$

But,

$$OE = OP + PE$$

$\therefore OQ^2 = (OP+PE)^2 + QE^2$

$OQ^2 = OP^2 + PE^2 + 2OP.PE + QE^2$

$OQ^2 = OP^2 + (PE^2 + QE^2) + 2OP.PE$

$\therefore OQ^2 = OP^2 + PQ^2 + 2OP.PE$ $\quad \because PE^2 + QE^2 = PQ^2$

ΔPEQ में-

$$\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$$

$$\cos\theta = \frac{PE}{PQ}$$

$$\therefore \underline{PE = PQ\cos\theta}$$

समी० से-

$$\therefore OQ^2 = OP^2 + PQ^2 + 2OP \cdot PQ\cos\theta$$

परन्तु

$OP = A$

$PQ = B$

$OQ = R$

$$\therefore R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \quad \text{——— (1)}$$

माना परिणामी वैक्टर $\vec{R}$, वैक्टर $\vec{A}$ की दिशा से α कोण बनाता है।

$$\therefore \tan\alpha = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{QE}{OE} = \frac{QE}{OP+PE}$$

लेकिन,
$$PE = PQ\cos\theta = B\cos\theta$$

$$\tan\alpha = \frac{QE}{OP + B\cos\theta}$$

ΔPEQ में-

$$\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$$

$$\sin\theta = \frac{QE}{PQ}$$

$$QE = PQ\sin\theta$$

$$QE = B\sin\theta$$

$$\therefore \tan\alpha = \frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta} \quad \text{—— (2)}$$

समीकरण (1) से-

$$R^2 = A^2+B^2+2AB\cos\theta$$

$$\therefore 2AB\cos\theta = R^2-A^2-B^2$$

या

$$\boxed{\cos\theta = \frac{R^2-A^2-B^2}{2AB}} \quad \text{—— (3)}$$

→ विशेष नोट ⇒ (For Numerical obj.)

1. जब दोनों वैक्टर $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ एक ही ही दिशा में हो।
अर्थात $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ के बीच कोण $\theta = 0°$

$$\therefore \cos\theta = \cos 0° = 1$$

$$\therefore R^2 = A^2+B^2+2AB\cos\theta$$

$$R^2 = A^2+B^2+2AB\times 1$$

$$R^2 = A^2+B^2+2AB$$

$$R^2 = (A+B)^2$$

$$\therefore R = A+B$$ ($\vec{A}$ व $\vec{B}$ के योग के समान)

तथा $$\tan\alpha = \frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta} = \frac{B\sin 0°}{A+B\cos 0°}$$

$$\tan\alpha = \frac{B\cdot 0}{A+B\cdot 1}$$

$$\tan\alpha = \frac{B}{A+B}$$

$$\tan\alpha = 0°$$

$$\tan\alpha = \tan 0°$$

$\boxed{\alpha = 0}$ (दिशा $\vec{A}$ व $\vec{B}$ की दिशायें)

2. जब दोनों वैक्टर $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ परस्पर विपरीत दिशाओं में हो। अर्थात्

$\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ के बीच कोण $\theta = 180°$

$$\therefore \cos\theta = \cos 180° = -1$$

$$\therefore R^2 = A^2+B^2 + 2AB\cos\theta$$

$$R^2 = A^2+B^2 + 2AB\times(-1)$$

$$R^2 = A^2+B^2 - 2AB$$

$$R^2 = (A-B)^2$$

$R = A-B$ ($\vec{A}$ व $\vec{B}$ के अन्तर के समान)

तथा

$$\tan\alpha = \frac{B\sin 180°}{A+B\cos 180°} = \frac{B\times 0}{A+B\cos 180°}$$

$$\tan\alpha = \frac{0}{A-B}$$

$$\tan\alpha = 0$$

$$\tan\alpha = \tan 0°$$

$\boxed{\alpha = 0°}$

3. जब दोनों वैक्टर $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ परस्पर लम्बवत हों। अर्थात्

$\vec{A}$ व $\vec{B}$ के बीच कोण $\theta = 90°$

$$\therefore \cos\theta = \cos 90° = 0$$

$$\therefore R^2 = A^2+B^3 + 2AB\cos\theta$$

$$R^2 = A^2+B^2 + 2AB\cdot 0$$

$$R^2 = A^2+B^2$$

$$\therefore R = \sqrt{A^2+B^2}$$

तथा

$$\tan\alpha = \frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta} = \frac{B\sin 90^\circ}{A+B\cos 90^\circ}$$

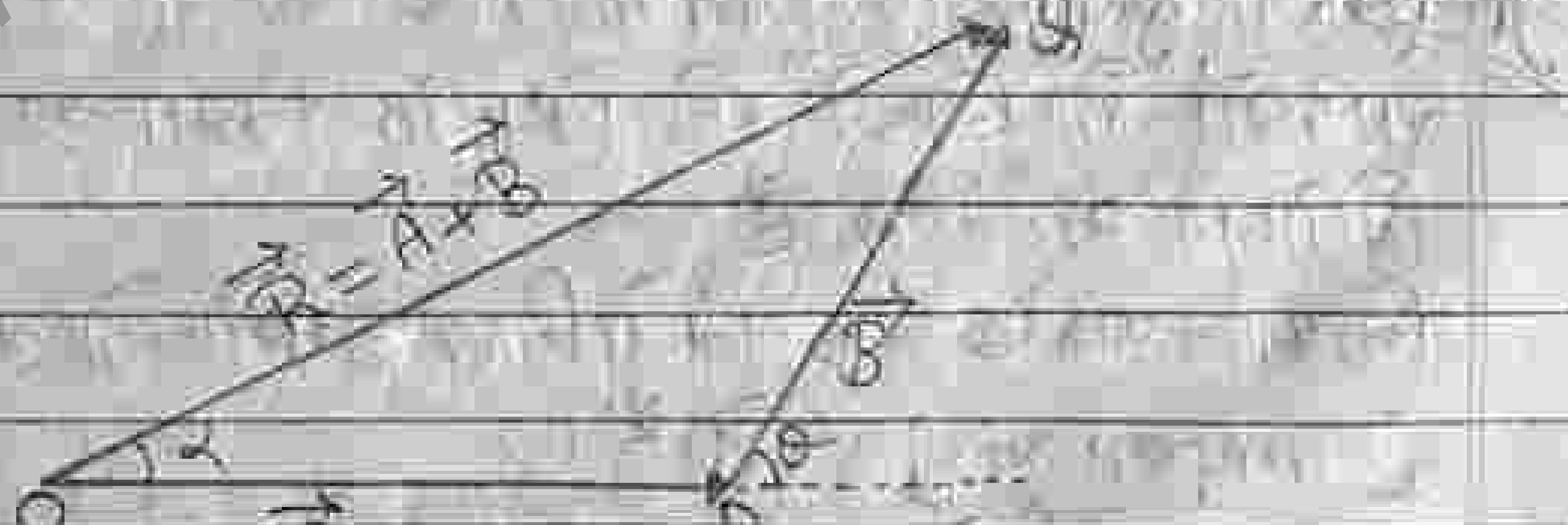
$$\tan\alpha = \frac{B\times 1}{A+B\times 0} = \frac{B}{A}$$

$$\tan\alpha = \frac{B}{A}$$

→ ग्राफीय विधि से दो वैक्टरों को जोड़ना →

माना दो वैक्टर $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ है। इनका योग अर्थात परिणामी वैक्टर ज्ञात करना है।

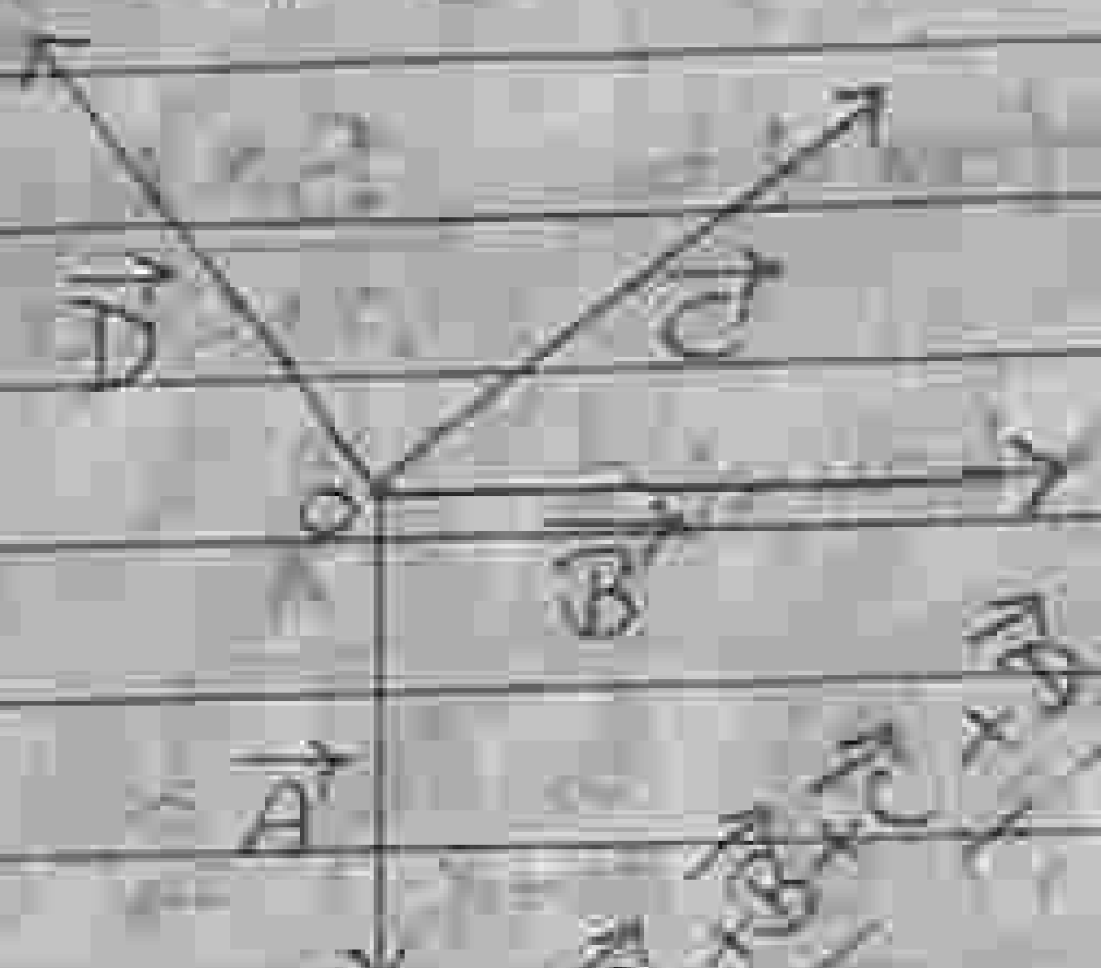
- वैक्टरों को जोड़ने की प्रक्रिया में निम्न बातों का ध्यान रखा जाता है।
1. समान टर्मिनलों को आपस में कभी नहीं मिलाते हैं।
2. वैक्टरों का योग करते समय उनकी दिशा परिवर्तित नहीं होनी चाहिए।

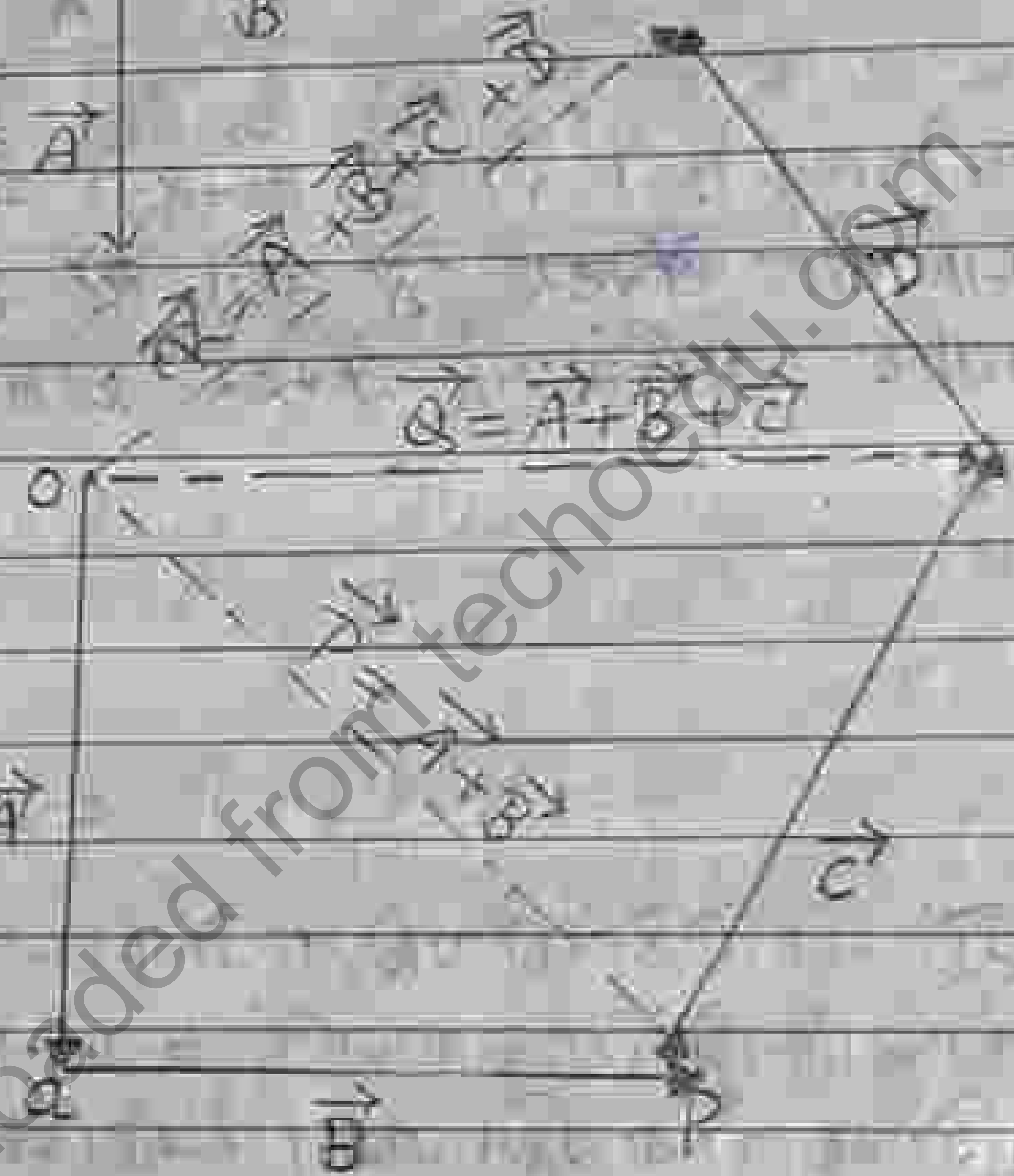


- सर्वप्रथम $\vec{OP}=\vec{A}$ खींचते हैं फिर $\vec{A}$ के शीर्ष से प्रारम्भ करके $\vec{PQ}=\vec{B}$ खींचते हैं। अंत में $\vec{A}$ के प्रारम्भिक बिन्दु तथा Q के शीर्ष को मिलाने वाला $\vec{R}$ खींचते हैं यही $\vec{R}$ परिणामी वैक्टर कहलाता है।

दो से अधिक वैक्टरों को जोड़ना ⇒

चित्र में $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ विभिन्न दिशाओं में प्रदर्शित है, इनका योग प्राप्त करना है।



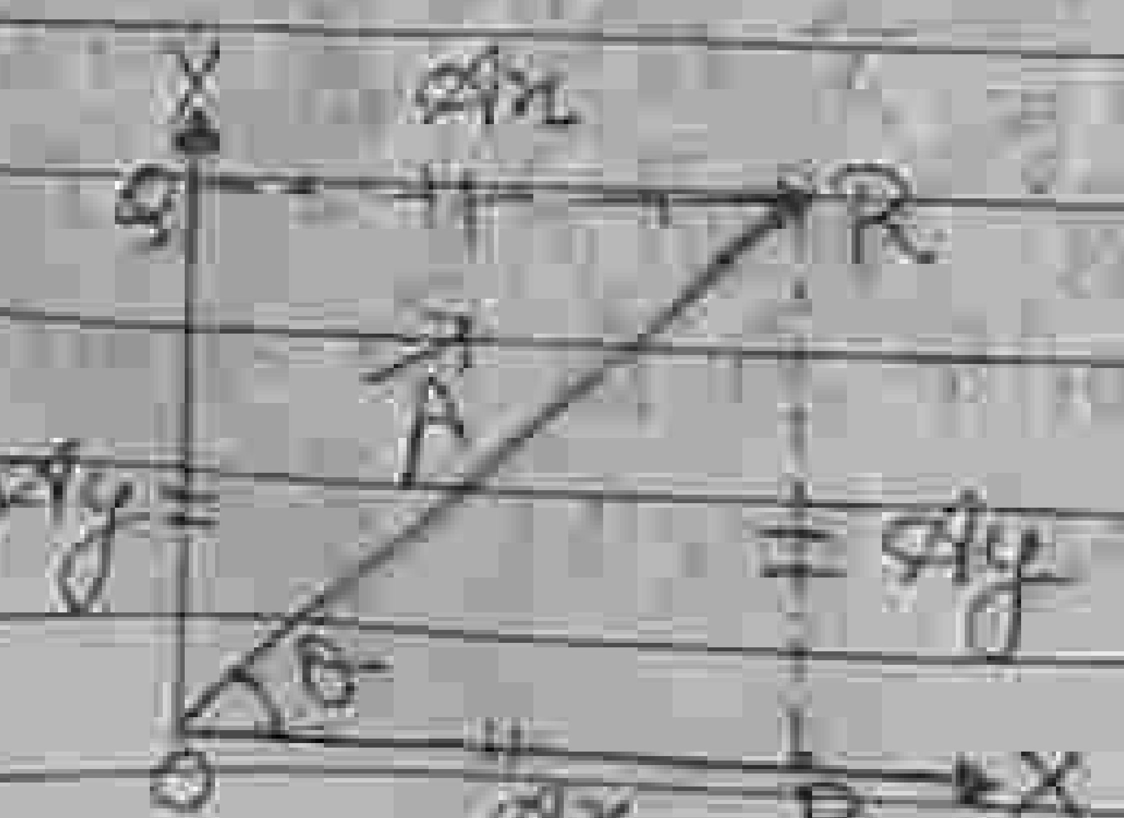


किसी सदिश का वियोजन ⇒

सदिशों को जोड़ने की विपरीत क्रिया का नाम सदिश का वियोजन कहलाता है।

किसी सदिश के वियोजित भागों को सदिश के घटक [Components] कहते हैं।

माना कोई वैक्टर A, x-अक्ष के साथ θ कोण बनाते हुए खींचा गया है।



बिन्दु R से Ox व Oy पर डाले गये लम्ब क्रमशः RP तथा RQ हैं।
आयत OPRQ में -

$$\vec{A} = \vec{A_x} + \vec{A_y} \quad \text{——— (1)}$$

यदि x अक्ष तथा y अक्ष के अनुदिश एकांक सदिश क्रमशः $\hat{i}$ तथा $\hat{j}$ हैं तो

$$\vec{A_x} = A_x \hat{i}$$
$$\vec{A_y} = A_y \hat{j}$$

समीकरण (1) में मान रखने पर -

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} \quad \text{——— (2)}$$

समकोण ΔOPR में -

$$\cos\theta = \frac{A}{K} = \frac{\vec{OP}}{\vec{OR}} = \frac{A_x}{A}$$

$$\cos\theta = \frac{A_x}{A}$$

$$\therefore A_x = A\cos\theta$$

$\therefore$ क्षैतिज घटक $\boxed{A_x = A\cos\theta}$ ——— (3)

पुनः

$$\sin\theta = \frac{L}{K} = \frac{\vec{PR}}{\vec{OR}} = \frac{A_y}{A}$$

$$\sin\theta = \frac{A_y}{A}$$

$$\therefore A_y = A\sin\theta$$

$\therefore$ ऊर्ध्वाधर घटक $\boxed{A_y = A\sin\theta}$ ——— (4)

समीकरण (3) व (4) ~~का~~ वर्ग करके जोड़ने पर -

Page

$$A^2\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta = Ax^2 + Ay^2$$

$$A^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = Ax^2 + Ay^2$$

$$\therefore A^2 = Ax^2 + Ay^2$$

या

$$A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$$

समीकरण ③ में ④ का भाग देने पर -

$$\frac{\cancel{A}\sin\theta}{\cancel{A}\cos\theta} = \frac{Ay}{Ax}$$

$$\tan\theta = \frac{Ay}{Ax}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Ay}{Ax}\right)$$

→ **दो वैक्टरों का घटाना** ⇒

दो वैक्टरों को घटाने का कोई अलग नियम नहीं है। बल्कि इसके लिए वैक्टरों के योग के नियम का ही प्रयोग करते हैं।

माना दो वैक्टर $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ हैं।

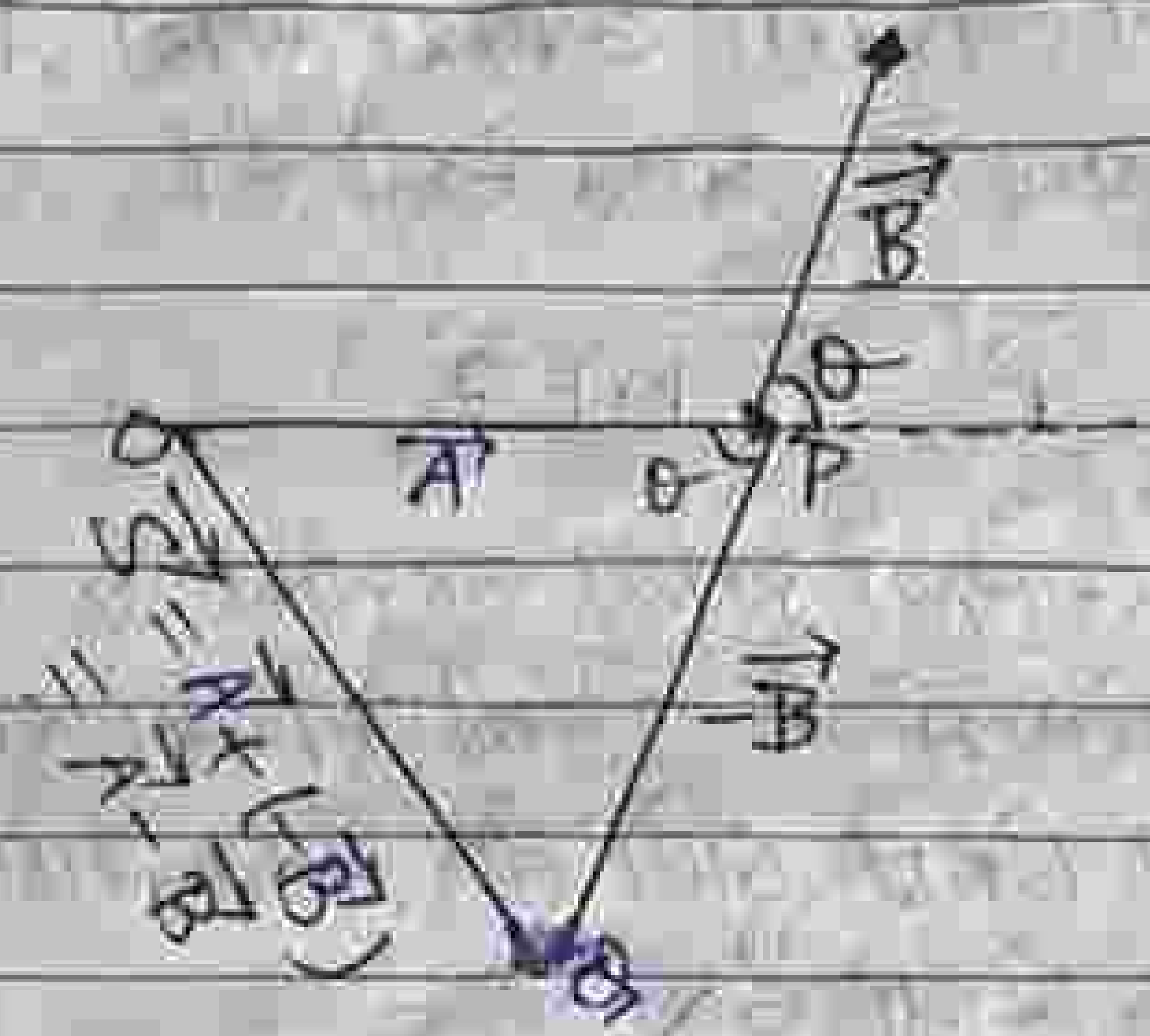
वैक्टर $\vec{A}$ में से वैक्टर $\vec{B}$ को घटाना है।

अर्थात् $(\vec{A} - \vec{B})$ का मान ज्ञात करना है।

अतः

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

अर्थात $\vec{A}$ में $(-\vec{B})$ जोड़ना है।



Anil

→ किसी सदिश (वेक्टर) राशि का अदिश राशि के साथ गुणन ⇒

यदि किसी सदिश राशि $\vec{A}$ को अदिश राशि अथवा संख्या n से गुणा करें तो प्राप्त गुणनफल एक सदिश राशि ही होती है।

यदि प्राप्त गुणनफल $\vec{R}$ हो तो -

$$\vec{R} = n \cdot \vec{A}$$
$$\vec{R} = \overrightarrow{nA}$$

$\vec{R}$ का परिमाण = $\vec{A}$ का परिमाण का n गुणा

$\vec{R}$ की दिशा = $\vec{A}$ की दिशा के समान

जैसे ⇒

1. यदि $\vec{A}$ की लम्बाई 5 सेमी० पूर्व दिशा में हो तो $3\vec{A}$ की लम्बाई = 3×5 सेमी० पूर्व दिशा में है। = 15 सेमी पूर्व दिशा में।
2. इसी प्रकार $-3A$ की लम्बाई = 15 सेमी पश्चिम दिशा में।

→ महत्वपूर्ण उदाहरण ⇒

1. सदिश राशि वेग $\vec{v}$ तथा अदिश राशि द्रव्यमान m के गुणन से सदिश राशि संवेग $\vec{p}$ प्राप्त होती है।

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$$

2. सदिश राशि त्वरण $\vec{a}$ तथा अदिश राशि द्रव्यमान m के गुणन से सदिश राशि बल $\vec{F}$ प्राप्त होती है।

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

→ सदिश राशि में अदिश राशि का भाग ⇒

किसी सदिश राशि $\vec{A}$ में किसी अदिश राशि अथवा किसी शुद्ध संख्या n से भाग दिया जाये तो प्राप्त भागफल सदैव एक सदिश राशि ही होता है।

माना $\vec{A}$ में शुद्ध संख्या n का भाग देने पर प्राप्त भागफल $\vec{R}$ हो तो

$$\vec{R} = \frac{\vec{A}}{n}$$

$\vec{R}$ का परिमाण = $\vec{A}$ के परिमाण का $\frac{1}{n}$ गुना

$\vec{R}$ की दिशा = $\vec{A}$ की दिशा के समान

जैसे बल $\vec{F}$ को अदिश राशि द्रव्यमान m से भाग देने पर सदिश राशि त्वरण $\vec{a}$ प्राप्त होती है।

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

दो वेक्टरों का गुणन ⇒

दो वेक्टर राशियों का आपस में किया गया गुणन दो प्रकार का होता है।

1. अदिश गुणन — Scalar गुणन / डॉट गुणन / · गुणन
2. सदिश गुणन — Vector गुणन / क्रॉस गुणन / × गुणन

1. अदिश गुणन ⇒

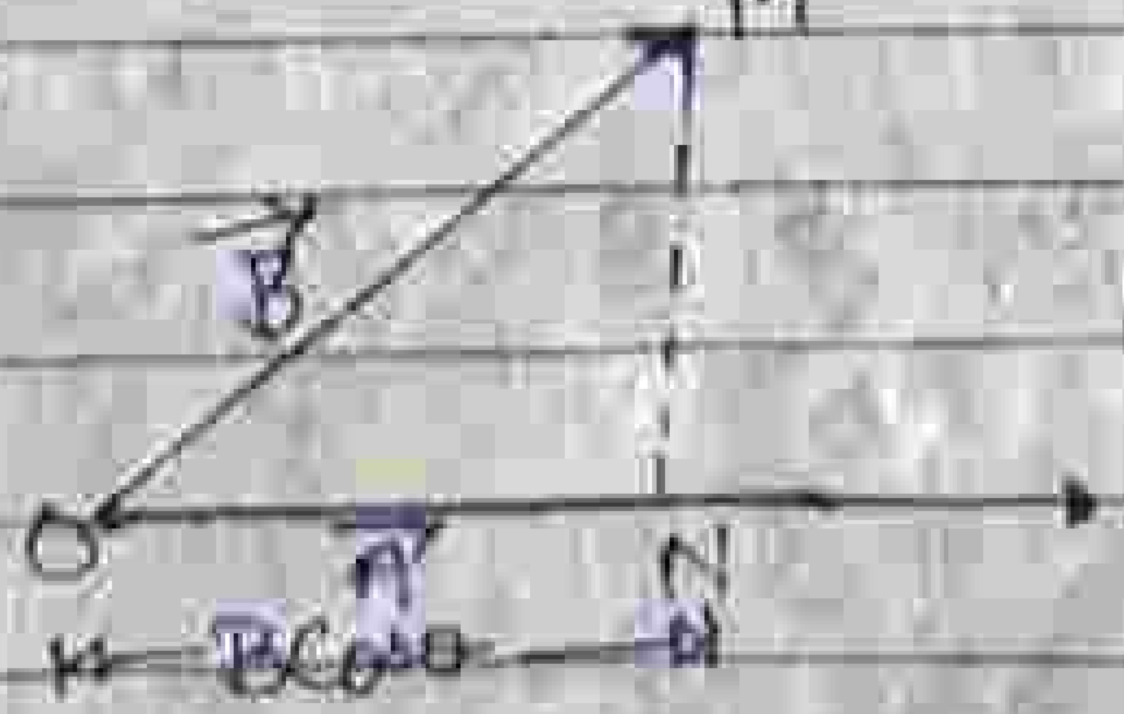
यदि दो वेक्टर राशियों के गुणनफल से प्राप्त राशि अदिश हो तो इस गुणन को अदिश गुणन या स्केलर गुणन कहते हैं।

- यदि दोनों राशि के बीच (.) डॉट लगाकर प्रदर्शित करते हैं।
इस इस कारण इसे डॉट गुणन भी कहते हैं।
माना दो वैक्टर $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ हैं।
$\therefore$ $\vec{A}$ व $\vec{B}$ का अदिश गुणन $= \vec{A}\cdot\vec{B}$

2. सदिश गुणन ⇒
यदि दो राशियों के गुणनफल से प्राप्त राशि सदिश हो तो इस गुणन को सदिश गुणन या वैक्टर गुणन कहते हैं।
- यदि दोनों वैक्टर राशियों के बीच (x) क्रॉस लगाकर प्रदर्शित करते हैं।
इस कारण इसे क्रॉस गुणन भी कहते हैं।
$\therefore$ $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के सदिश गुणन $= \vec{A}\times\vec{B}$

Import Notes ⇒
1. $\vec{A}\cdot\vec{B}$ = अदिश राशि = अदिश गुणन
2. $\vec{A}\times\vec{B}$ = सदिश राशि = सदिश गुणन

दो वैक्टरों का अदिश गुणन ⇒
दो वैक्टरों का अदिश गुणन एक सदिश राशि है। जिसका मान दोनों वैक्टरों के परिमाणों तथा उनके बीच कोणों की कोज्या (Cosine) के गुणनफल के बराबर होता है।
माना दो वैक्टर $\vec{A}$ व $\vec{B}$ हैं। इनके बीच का कोण θ होता-



$\therefore$ $\vec{A}$ व $\vec{B}$ का अदिश गुणन $= \vec{A}\cdot\vec{B}$
$= AB\cos\theta$ —— (1)

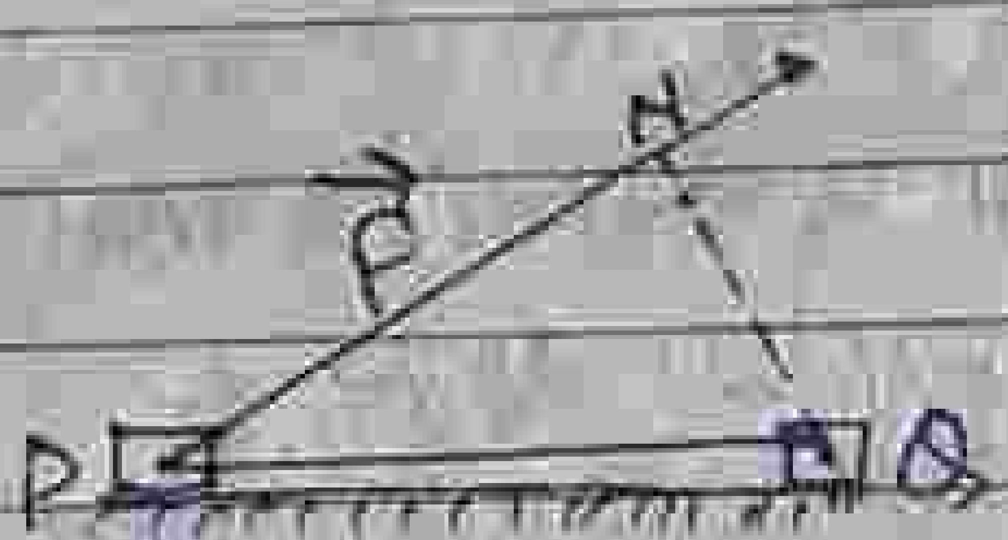
$$\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{ON}{OM}$$

$$\cos\theta = \frac{ON}{B}$$

$$\therefore \underline{ON = B\cos\theta}$$

अदिश राशि का गुणन ⇒ (कार्य)

माना एक वस्तु चिकने क्षैतिज तल पर क्षैतिज से θ कोण बनाते हुए बल $\vec{F}$ के द्वारा गतिशील है।



$$\therefore \cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{PN}{S}$$

$$\therefore PN = S\cos\theta$$

वस्तु का क्षैतिज तल से विस्थापन $\vec{PQ} = \vec{S}$

∴ कृतिकार्य (W) = (बल) गुणा (बल की दिशा में विस्थापन)

$$W = (F) \text{ गुणा } (PN)$$

$$W = F(S\cos\theta) \quad \text{--- } (1)$$

परन्तु बल $\vec{F}$ तथा विस्थापन $\vec{S}$ के अदिश (स्केलर) की परिभाषानुसार-

$$\vec{F}\cdot\vec{S} = FS\cos\theta \quad \text{--- } (2)$$

समी० (1) व (2) की तुलना करने पर

$$\vec{F}\cdot\vec{S} = \vec{W}$$

$$\text{कृतिकार्य } \vec{W} = \vec{F}\cdot\vec{S}$$

या

$$\boxed{W = \vec{F}\cdot\vec{S} = FS\cos\theta}$$

Date Page

- विशेष नोट ⇒

1. यदि विस्थापन $\vec{S}$, बल $\vec{F}$ की दिशा में हो तो बनने वाला कोण $0°$ होगा अर्थात

$$\theta = 0°$$

$$\because \cos\theta = \cos 0° = 1$$

$$\therefore W = F \times S \times 1$$

$$\underline{W = FS}$$

For Num: 2. We know that

कार्य $(W) = \vec{F}.\vec{S}$

उपरोक्त समीकरण को t के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F}.\frac{d\vec{S}}{dt}$$

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F}.\vec{v} \qquad \because \vec{v} = \frac{d\vec{S}}{dt}$$

$$\boxed{P = \vec{F}.\vec{v}}$$

अर्थात शक्ति P, बल $\vec{F}$ तथा वेग $\vec{v}$ के अदिश गुणनफल के बराबर होता है।

3. चुम्बकीय फ्लक्स ϕ, एकसमान चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{B}$ तथा बल के क्षेत्रफल $\vec{A}$ के अदिश गुणन के बराबर होता है अर्थात

$$\underline{\phi = \vec{B}.\vec{A}}$$

V.V. Imp:-

अदिश गुणन के गुण ⇒

1. दो वैक्टरों के अदिश गुणन का मान धनात्मक, शून्य तथा ऋणात्मक हो सकता है।

$$\therefore \vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$$

(a)⇒ यदि θ न्यूनकोण हो तो $\cos\theta$ धनात्मक होगा तो

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \text{धनात्मक}$$

(b)⇒ यदि θ समकोण हो तो $\cos\theta$ ~~धनात्मक~~ होगा तो

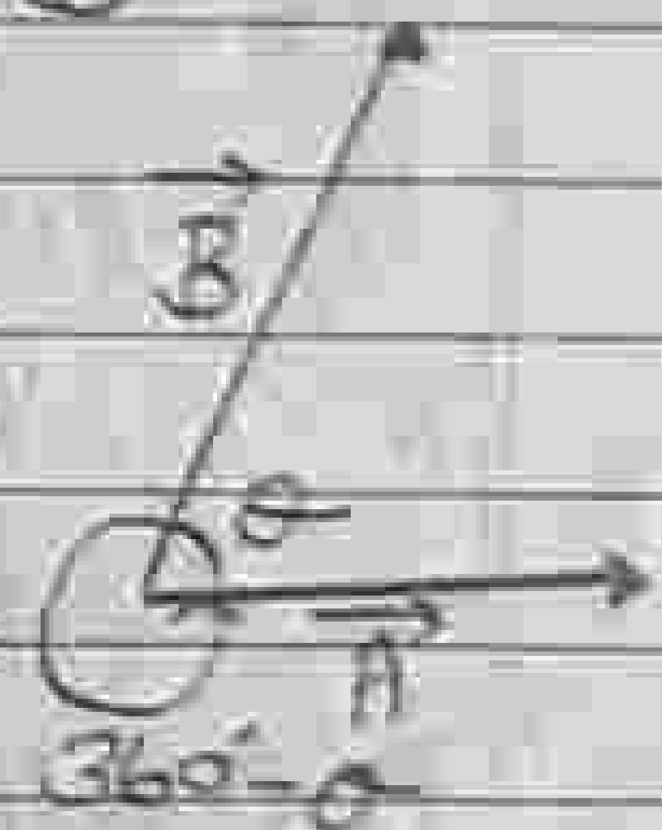
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \text{शून्य}$$

(c)⇒ यदि θ अधिककोण हो तो $\cos\theta$ ऋणात्मक होगा तो

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \text{ऋणात्मक}$$

2. अदिश गुणन क्रम विनिमेय का पालन होता है यदि दो वैक्टर $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ के बीच का कोण θ हो तो

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \text{ --- (1)}$$



जहाँ θ = $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के बीच वामावर्त दिशा में बना कोण

$\vec{A}$ व $\vec{B}$ को उत्क्रमित करने पर

$$\vec{B}\cdot\vec{A} = BA\cos(360-\theta)$$
$$\vec{B}\cdot\vec{A} = BA\cos\theta$$
$$\vec{B}\cdot\vec{A} = AB\cos\theta \text{ --- (2)}$$

समी (1) व (2) से -

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

3. अदिश गुणन वितरण नियम का पालन करता है। यदि तीन वैक्टर $\vec{A}$, $\vec{B}$ तथा $\vec{C}$ हो तो

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$

4. दो परस्पर लम्बवत वैक्टरों के अदिश गुणन का मान 0 होता है

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta = 0$$

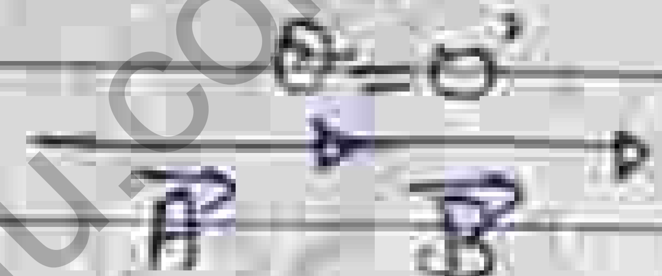
माना दो वैक्टर $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ हैं।

$\vec{A}$ व $\vec{B}$ के बीच कोण $\theta = 90°$

$$\therefore \quad \vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos 90°$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cdot 0$$
$$\underline{\vec{A}\cdot\vec{B} = 0}$$

5. दो समान्तर वैक्टरों के अदिश गुणन का मान उसके परिमाणों के गुणनफल के बराबर होता है।

$\theta = 0°$ 

या 

यदि दो वैक्टर $\vec{A}$ व $\vec{B}$ हो शर्तानुसार $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के बीच कोण $\theta = 0$

$$\therefore \quad \vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos 0$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\times 1$$
$$\underline{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB}$$

यदि $\vec{A}$ व $\vec{B}$ प्रतिसमान्तर हो अर्थात् $\theta = 180°$

$$\therefore \quad \vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos 180°$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\times -1$$
$$\underline{\vec{A}\cdot\vec{B} = -AB}$$

6. किसी सदिश का उसी सदिश से अदिश गुणन का मान उस वैक्टर के परिणाम के वर्ग के बराबर होता है।

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$$

यदि $\vec{A}$ का $\vec{A}$ के साथ अदिश गुणन किया जाये तो

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \text{ से}$$

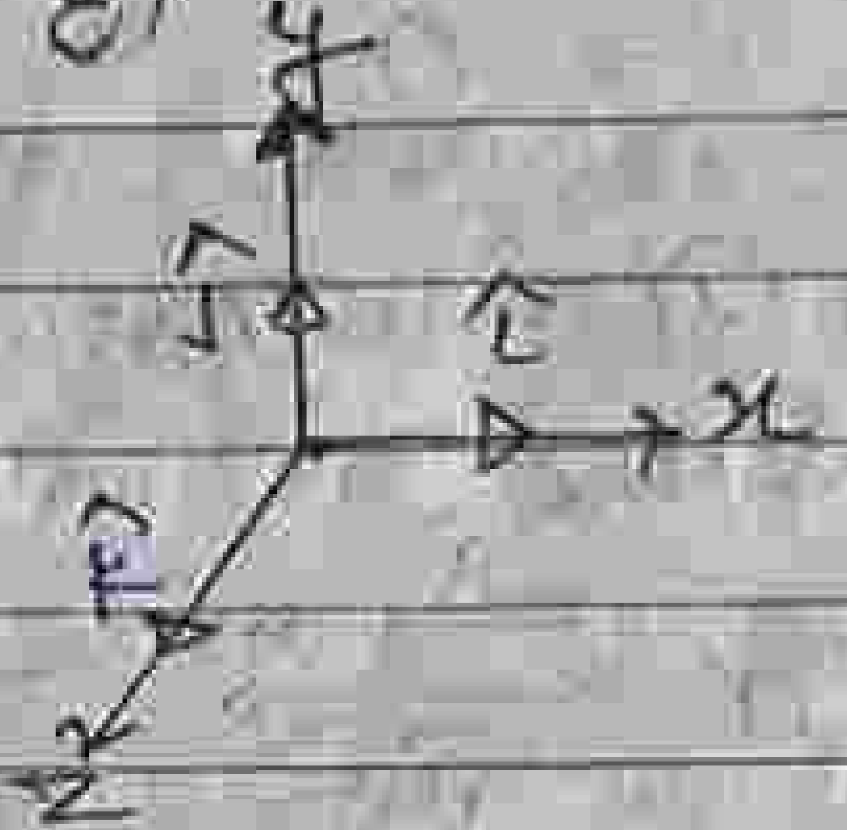
$\therefore \vec{A}\cdot\vec{A} = AA\cos\theta$ ($\vec{A}$ का $\vec{A}$ के साथ कोण 0)

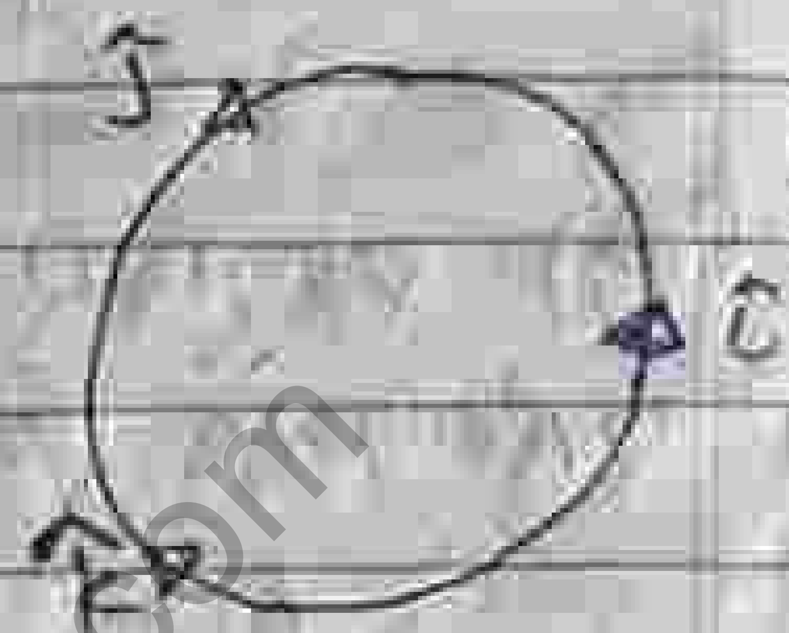
$\vec{A}\cdot\vec{A} = AA\cos 0^\circ$

$\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2 \times 1$

$\underline{\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2}$

7. एकांक लम्बकोणीय $\hat{i}$, $\hat{j}$ तथा $\hat{k}$ के अदिश गुणनफलों में निम्न सम्बन्ध होता है।





(a) $\Rightarrow$ $\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$

$\hat{i}$ व $\hat{j}$ का परिमाण $= 1$

$\hat{i}$ व $\hat{j}$ के बीच का कोण $= \theta = 90^\circ$

$\therefore \vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$ से

$\hat{i}\cdot\hat{j} = 1\times 1\cdot\cos 90^\circ$

$\hat{i}\cdot\hat{j} = 1\times 0$

$\underline{\hat{i}\cdot\hat{j} = 0}$

(b) $\Rightarrow$ $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$

$\hat{i}$ व $\hat{i}$ का परिमाण $= 1$

$\therefore$ $\hat{i}\cdot\hat{i}$ के बीच कोण $= 0^\circ$

$\therefore$ $\hat{i}\cdot\hat{i} = AB\cdot\cos 0^\circ$

$\hat{i}\cdot\hat{i} = 1\times 1\times 1$

$\underline{\hat{i}\cdot\hat{i} = 1}$

Ans. यदि $\vec{A}$ व $\vec{B}$ को x, y तथा z घटकों पर लिखें

तो $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

यदि $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

तो

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= A_xB_x\,\hat{i}\cdot\hat{i} + A_xB_y\,\hat{i}\cdot\hat{j} + A_xB_z\,\hat{i}\cdot\hat{k} + A_yB_x\,\hat{i}\cdot\hat{j} + A_yB_y\,\hat{j}\cdot\hat{j} + A_yB_z\,\hat{j}\cdot\hat{k} + A_zB_x\,\hat{k}\cdot\hat{i} + A_zB_y\,\hat{k}\cdot\hat{j} + A_zB_z\,\hat{k}\cdot\hat{k}$$

But,

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$$
$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

$$= A_xB_y\times 1 + A_yB_y\times 0 + A_xB_z\times 0 + A_yB_x\times 0 + A_yB_y\times 1 + A_yB_z\times 0 + A_zB_x\times 0 + A_zB_y\times 0 + A_zB_z\times 1$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Ans. यदि $\vec{A} = A_xB_x + A_yB_y + A_z\hat{k}$ तथा

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ हों तो

A का परिणाम $= \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

B का परिणाम $= \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$

We know that –

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

$\vec{A}$ व $\vec{B}$ के बीच कोण -

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$$

जहाँ

$A = |\vec{A}| = \vec{A}$ का परिणाम

$B = |\vec{B}| = \vec{B}$ का परिणाम

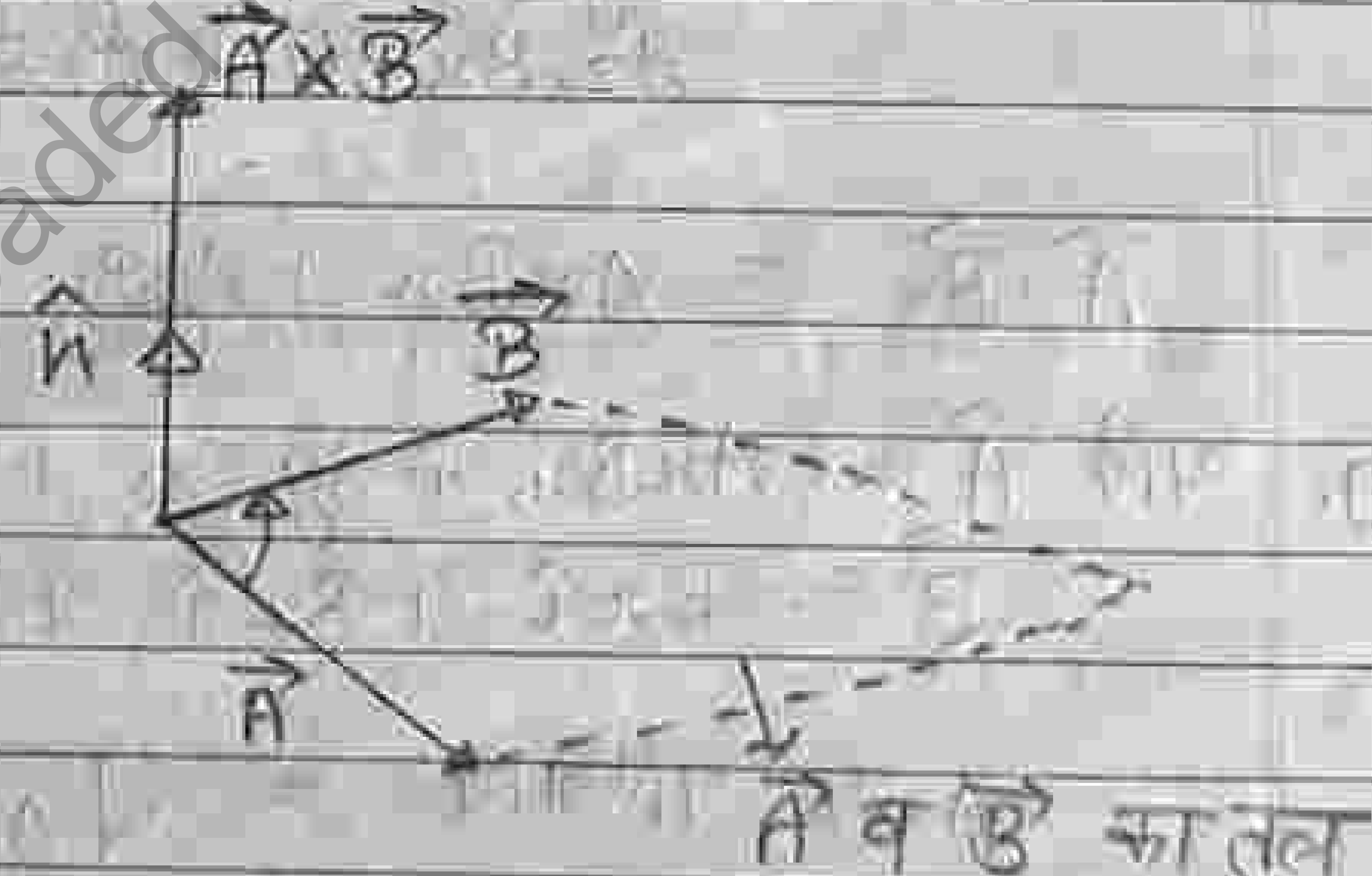
Ans → दो वैक्टरो का सदिश गुणन → $(\vec{F}\times\vec{r}=\vec{\tau})$

दो वैक्टरो का सदिश गुणनफल एक सदिश राशि है जिसका निर्माण मान दोनों वैक्टरों के परिणाम तथा उनके बीच के कोण के ज्या के गुणनफल के बराबर होता है। इसकी दिशा दोनों वैक्टरों के तल के लम्बवत होती है।

यदि दो वैक्टर $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ के बीच कोण θ हो तो -

$$\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\ \hat{n}$$

जहाँ $\hat{n}$ = एकांक सदिश ($\vec{A}$ व $\vec{B}$ के लम्बवत)



जैसे →

1. कोई बल $\vec{F}$ तथा मूलबिन्दु O के सापेक्ष स्थिति सदिश ($\vec{r}$) के सदिश के सदिश गुणन से मूलबिन्दु O के सापेक्ष बल-आघूर्ण $\vec{\tau}$ प्राप्त होता है।

$$\therefore \vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$$

2. कण के रेखीय संवेग $\vec{P}$ तथा मूलबिन्दु O के सापेक्ष स्थिति

सदिश $\vec{r}$ के सदिश गुणन से कोणीय संवेग $\vec{J}$ प्राप्त होता है।

Therefore $\therefore \vec{J} = \vec{r} \times \vec{P}$

3. कण के कोणीय वेग $\vec{\omega}$ तथा मूलबिंदु O के सापेक्ष स्थिति सदिश $\vec{r}$ के सदिश गुणन से रेखीय वेग $\vec{v}$ प्राप्त होता है

$$\therefore \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$ (ओमेगा = ω)

4. कण के कोणीय त्वरण $\vec{\alpha}$ तथा स्थिति सदिश $\vec{r}$ के सदिश गुणन से रेखीय त्वरण $\vec{a}$ प्राप्त होता है।

$$\therefore \vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

→ सदिश गुणन के गुण ⇒

1. सदिश गुणन क्रम विनिमेय नियम का पालन नहीं करता है। अर्थात

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$$

∵ हम जानते हैं

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta \;\hat{n} \quad \text{——— (1)}$$

$\theta = \vec{A}$ व $\vec{B}$ के बीच कोण

$\vec{A}$ व $\vec{B}$ को उत्क्रमणित करने पर

$$\therefore \vec{B} \times \vec{A} = BA \sin(360-\theta) \;\hat{n}$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = BA \sin(360-\theta) \;\hat{n}$$

$$\because \sin(360-\theta) = -\sin\theta$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = -BA \sin\theta \;\hat{n}$$

या

$$-\vec{B} \times \vec{A} = AB \sin\theta \;\hat{n}$$

$$-\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta \;\hat{n} \quad \text{——— (2)}$$

समी (1) व (2) से-

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

09/07/17 Page

2. सदिश गुणन वितरण नियम का पालन करता है।
यदि 3 सदिश $\vec{A}$, $\vec{B}$ तथा $\vec{C}$ हों तो वितरण नियम के अनुसार-

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}$$

Imp.
3. दो परस्पर लम्बवत् सदिशों के सदिश गुणनफल का परिमाण उनके परिमाणों के गुणनफल के बराबर होता है।
यदि सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के बीच का कोण θ है या $\theta = 90°$ है तो

$$\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\ \hat{n}$$

$\because \theta = 90°$

$$\therefore \vec{A}\times\vec{B} = AB\sin 90°\ \hat{n}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = AB\cdot 1\ \hat{n}$$

$$\therefore |\vec{A}\times\vec{B}| = AB \qquad \because \hat{n} = 1$$

Imp.
4. दो समान्तर सदिशों का सदिश गुणनफल 0 होता है।
यदि $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ परस्पर समान्तर हो.
अर्थात $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के बीच कोण $\theta = 0°$

$$\therefore \vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\ \hat{n}$$

$\because \theta = 0°$

$$\therefore \vec{A}\times\vec{B} = AB\sin 0°\ \hat{n}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = AB\cdot 0\ \hat{n}$$

$$\therefore \vec{A}\times\vec{B} = 0$$

Imp.
5. किसी सदिश का उसी सदिश से सदिश गुणनफल 0 होता है।
यदि $\vec{A}$ में उसी $\vec{A}$ का सदिश गुणन करें तो.

$\vec{A}$ व $\vec{A}$ के बीच कोण $\theta = 0°$

$$\therefore \vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\ \hat{n} \text{ से}$$

या

$$\vec{A}\times\vec{A} = AA\sin 0°\ \hat{n}$$

$$\vec{A}\times\vec{A} = A^2\cdot 0\ \hat{n}$$

$$\vec{A}\times\vec{A} = 0$$

6 यदि $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ तथा

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ हो

तो सदिश गुणनफल $\vec{A} \times \vec{B} = ?$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \begin{array}{c|c} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} & \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} & \end{array}$$

सारणिक का क्रम $= m \times n = 3 \times 3$

$m \longrightarrow$ Row को तथा (पंक्ति)

$n \longrightarrow$ Column को प्रदर्शित करता है। (स्तम्भ)

सहगुणज का मान $= (-1)^{m+n}$

$A_{mn} = (-1)^{m+n}$

$m =$ Row को

$n =$ Column को

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \hat{i}(B_zA_y - B_yA_z) - \hat{j}(B_zA_{\cancel{x}} - B_xA_z) + \hat{k}(-B_xA_y + B_yA_x)$$

<u>जैसे</u> → $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ तथा

$\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

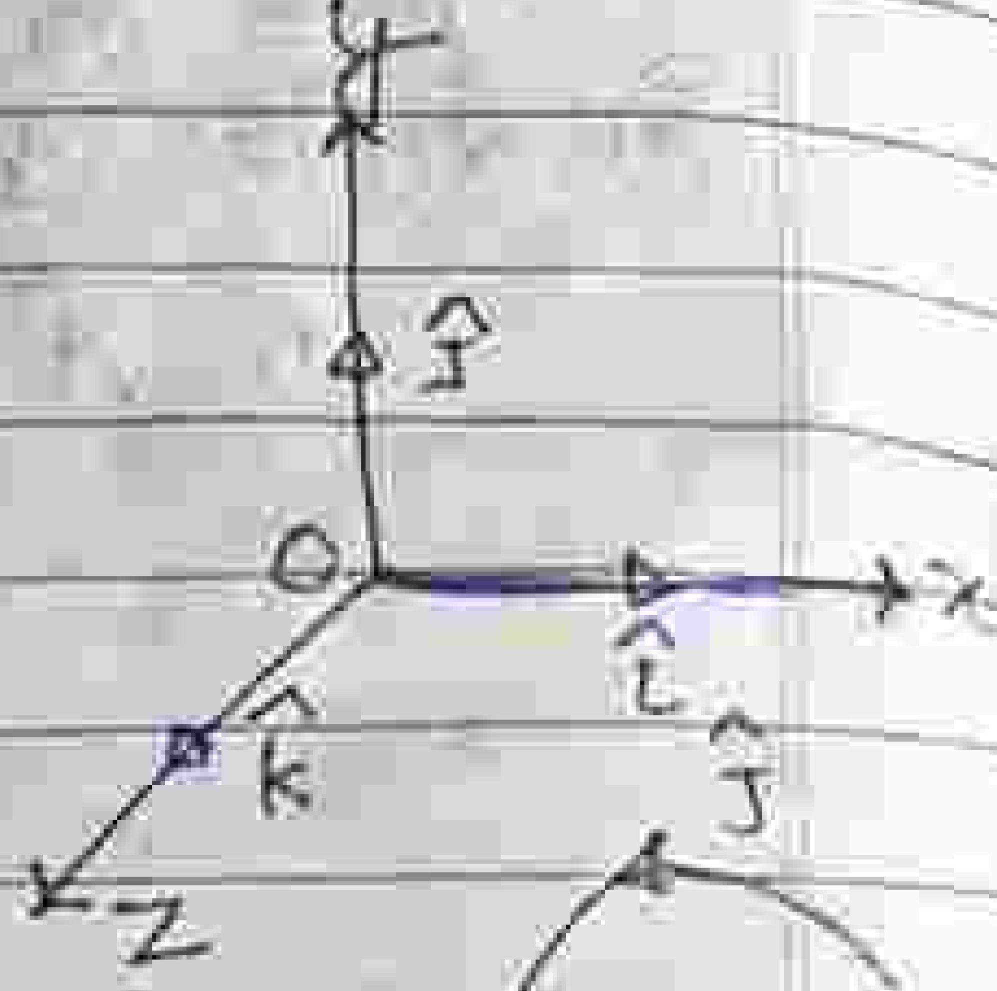
$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \vec{A} \times \vec{B} = \hat{i}(3-10) - \hat{j}(2+15) + \hat{k}(-4-9)$$

$$= -7\hat{i} - 17\hat{j} - 13\hat{k}$$

10/07/18

7 लम्ब कोणीय एकांक सदिशों $\hat{i}$, $\hat{j}$ तथा $\hat{k}$ के गुणनफलों मे निम्न सम्बन्ध होता है।



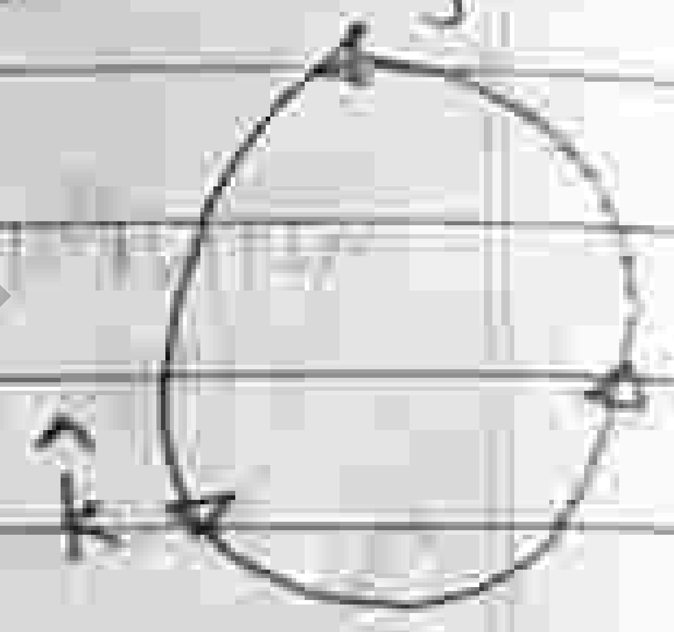
(a) $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$

∵ हम जानते हैं

$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta \ \hat{n}$

तथा

$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$



∴ $\hat{i} \times \hat{i} = 1 \times 1 \cdot \sin 0 \ \hat{n}$

$\hat{i} \times \hat{i} = 1 \times 0 \ \hat{n}$

$\hat{i} \times \hat{i} = 0$

इसी प्रकार $\hat{j}$ व $\hat{k}$ के मान भी 0 होंगे।

(b) $\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{j} \times \hat{i} = \hat{k}$

$\hat{j} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{j} = \hat{i}$

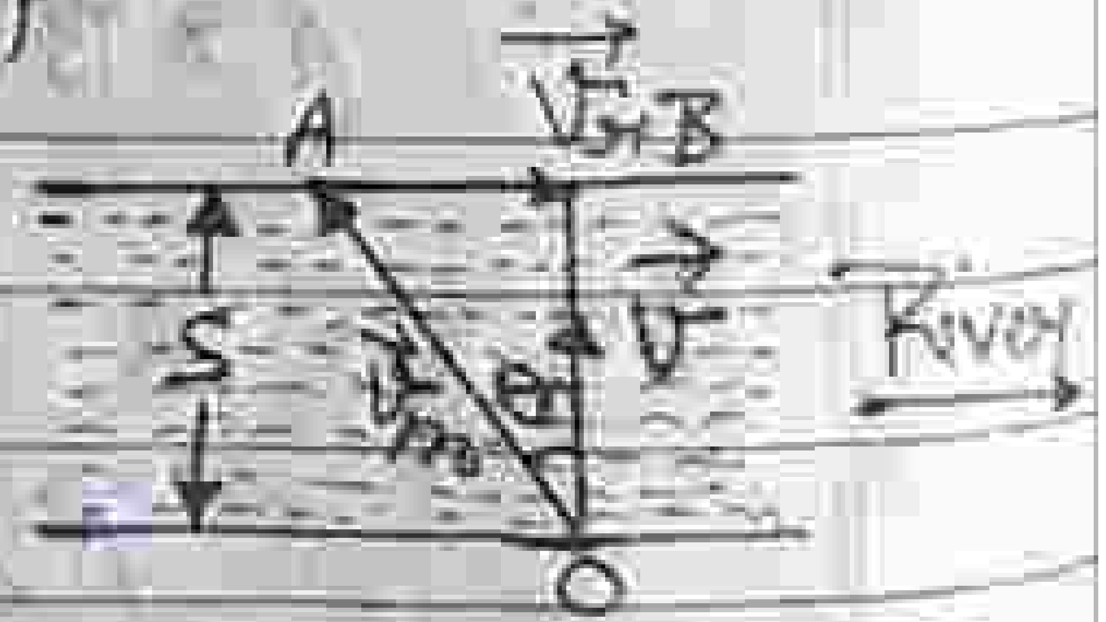
$\hat{k} \times \hat{i} = -\hat{i} \times \hat{k} = \hat{j}$

→ नदी में नाव की गति ⇒

माना नदी मे जल प्रवाह का वेग $= \vec{V_r}$ तथा स्थिर जल में नाव (तैराक) का वेग $= \vec{V_m}$ है।

माना नदी की चौडाई S है

(a) ⇒ तैराक द्वारा नदी को लघु मार्ग OB द्वारा पार करता है।



इस स्थिति मे तैराक को जल प्रवाह की विपरीत दिशा में OB से θ कोण पर गति करनी चाहिए।

→ जल प्रवाह का परिणामी वेग $= \vec{V}$

ΔOBA में -

$$\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{OA}$$

$$\sin\theta = \frac{\vec{v_r}}{\vec{v_m}}$$

या

$$\sin\theta = \frac{v_r}{v_m}$$

या

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{v_r}{v_m}\right) \quad \text{--- (1)}$$

$$\boxed{\theta = \sin^{-1}\left(\frac{v_r}{v_m}\right)}$$

माना ~~जल~~ नदी के जल प्रवाह का परिणामी वेग $\vec{v}$ है।

ΔOBA में -

$$v_m^2 = v_r^2 + v^2$$

$$\therefore v^2 = v_m^2 - v_r^2$$

$$\therefore v = \sqrt{v_m^2 - v_r^2} \quad \text{--- (2)}$$

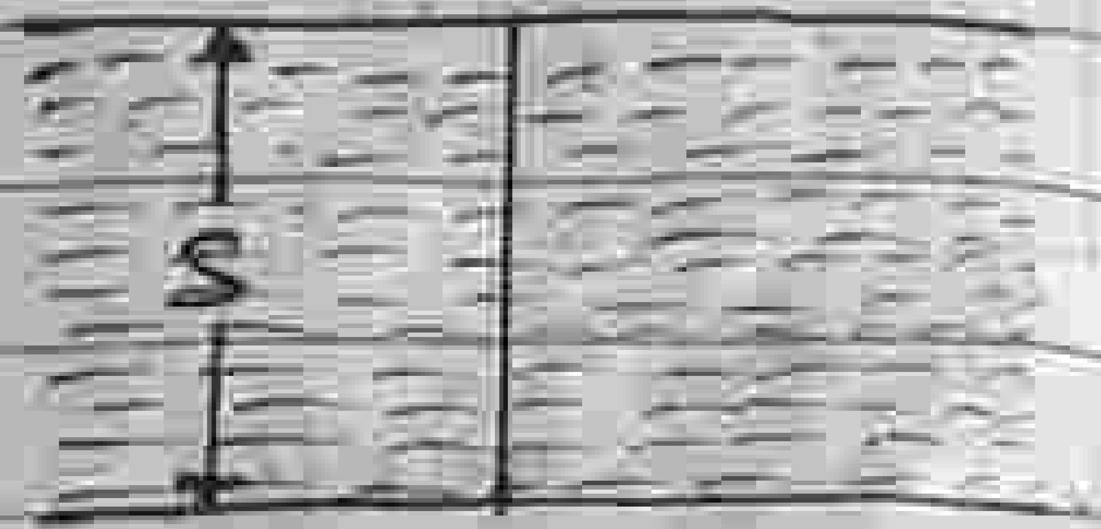
$\therefore$ नदी को पार करने में लगा समय $t = \frac{S}{v}$

$$t = \frac{S}{\sqrt{v_m^2 - v_r^2}}$$

$$\boxed{t = \frac{S}{\sqrt{v_m^2 - v_r^2}}}$$

(b) नदी को तैराक द्वारा न्यूनतम समय में पार करना नदी को न्यूनतम समय में पार करने के लिए तैराक को जल प्रवाह की दिशा के लम्बवत OB दिशा में गति करनी चाहिए।

→ चित्रानुसार-



<u>ΔOBA में</u>

$$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{AB}{OB}$$

$$\tan\theta = \frac{v_r}{v_m}$$

या

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_r}{v_m}\right) \text{ ——— (1)}$$

- माना नदी के जल प्रवाह का वेग v है तो

<u>ΔOBA में</u>

$$v^2 = v_m^2 + v_r^2$$

$$v = \sqrt{v_m^2 + v_r^2} \text{ ——— (2)}$$

∴ नदी को पार करने में लगा समय-

$$t = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$$

$$t = \frac{S}{v_m}$$

→ <u>आपेक्षिक अथवा सापेक्ष वेग</u> ⇒

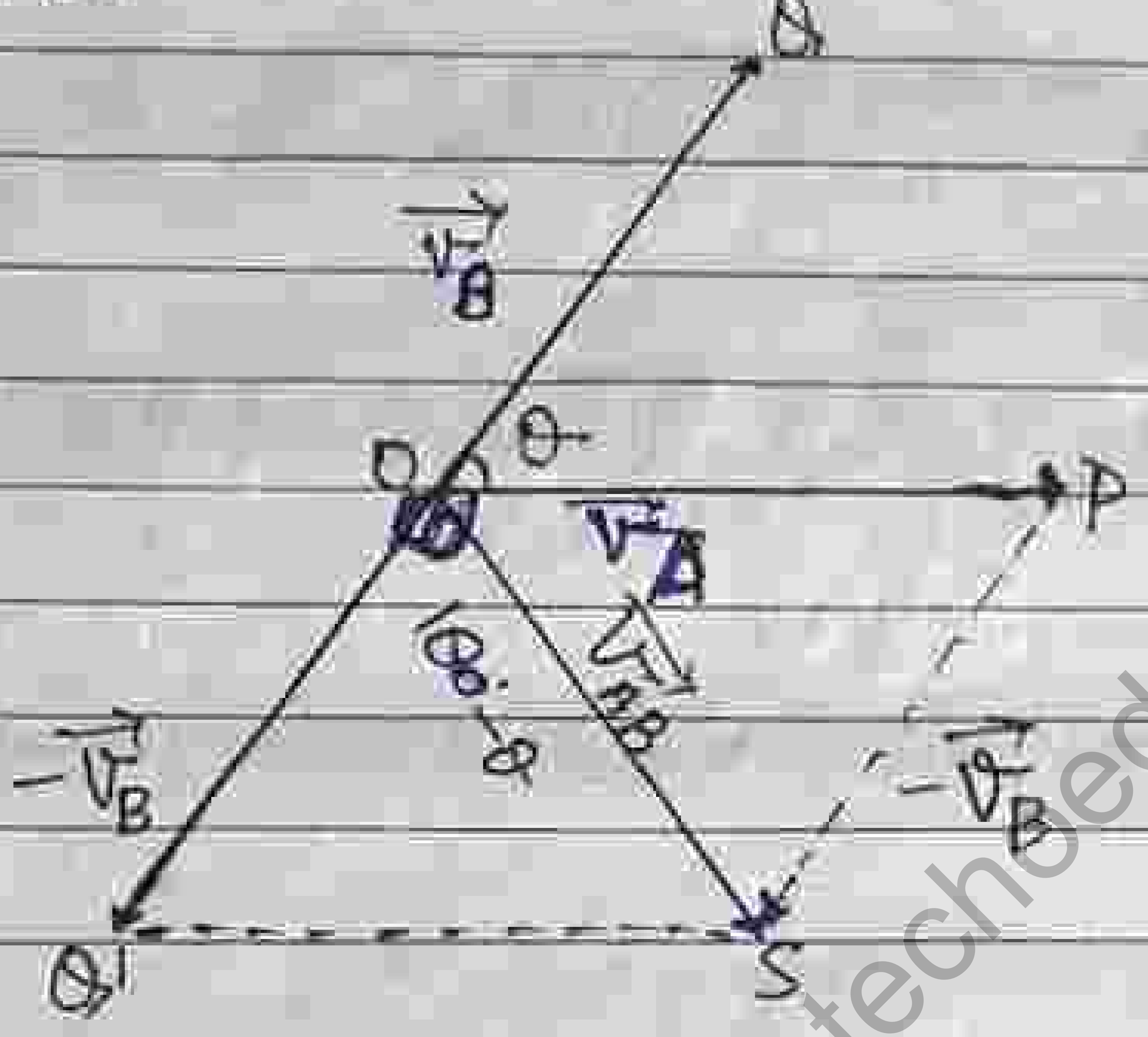
<u>Relative Valocity</u> ⇒ किसी एक वस्तु का दूसरी वस्तु के सापेक्ष वेग, पहली वस्तु की दूसरी वस्तु के सापेक्ष स्थिति ~~समय की~~ परिवर्तन की समय दर के बराबर होता है।

- माना दो वस्तुये A तथा B हैं। वस्तु A व B के वेग क्रमशः $\vec{v}_A$ तथा $\vec{v}_B$ है।

वस्तु A का B के सापेक्ष वेग $\vec{v}_{AB}$ हो तो

$$\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$$
$$\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A + (-\vec{V}_B)$$

यदि वस्तु A व B की गति की दिशाओं के बीच का कोण θ हो तो



→ वस्तु A का वस्तु B के सापेक्ष वेग का परिमाण -

$$\vec{V}_{AB}^2 = V_A^2 + V_B^2 + 2V_A V_B \cos(180-\theta)$$

$$V_{AB}^2 = V_A^2 + V_B^2 + 2V_A V_B^- \cos\theta$$

$$V_{AB} = \sqrt{V_A^2 + V_B^2 - 2V_A V_B \cos\theta}$$

- माना परिणामी वेग सदिश $\vec{V}_{AB}$, $\vec{V}_A$ के साथ ∅ कोण बनाता है तो.

$$\tan\alpha = \frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta} \text{ के अनुसार}$$

तो.
$$\tan\phi = \frac{V_B \sin(180-\theta)}{V_A + V_B\cos(180-\theta)} = \frac{V_B \sin\theta}{V_A + V_B(-\cos\theta)}$$

$$\tan\phi = \frac{V_B \sin\theta}{V_A - V_B\cos\theta}$$