

अभ्यास प्रश्न-पत्र 2022 - 23

सेट A

विषय : गणित

कक्षा : 12

समय : 3 घंटे

पूर्णांक : 80

निर्देश :

1. सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है |
2. प्रश्नों के लिए आवंटित अंक उनके सम्मुख अंकित हैं |
3. प्रश्न क्र. 1 से प्रश्न क्र. 5 तक वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं |
4. प्रश्न क्र. 6 से प्रश्न 23 तक प्रत्येक प्रश्न में आंतरिक विकल्प दिया गया है |
6. प्रश्न क्र. 16 से 19 तक प्रत्येक प्रश्न 3 अंक का है |
7. प्रश्न क्र. 20 से 23 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है |

प्र.1. सही विकल्प चुनकर लिखिए |

1 × 6 = 6

- (i). माना समुच्चय N में $R = \{(a, b) : a = b - 2, b > 6\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध है तब निम्न में से सही उत्तर चुनिए:
(a) $(2, 4) \in R$ (b) $(3, 8) \in R$ (c) $(6, 8) \in R$ (d) $(8, 7) \in R$
- (ii). X में प्रतिबंध R , $(a, b) \in R$ तथा $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ जहाँ $a, b, c \in X$ को संतुष्ट करने वाला सम्बंध R है:
(a) सममित सम्बंध है। (b) स्वतुल्य सम्बंध है।
(c) संक्रामक सम्बंध है। (d) रिक्त सम्बंध है।
- (iii). $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) =$
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) 1
- (iv). $A = [a_{ij}]_{1 \times n}$ एक आव्यूह है।
(a) पंक्ति आव्यूह (b) स्तंभ आव्यूह (c) वर्ग आव्यूह (d) विकर्ण आव्यूह
- (v). एक विषम सममित आव्यूह के विकर्ण का प्रत्येक अवयव होता है:
(a) शून्य (b) धनात्मक (c) ऋणात्मक (d) अवास्तविक
- (vi). यदि $f(x) = \cos^{-1}(\sin x)$, तब $f'(x)$ का मान होगा:
(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) इनमें से कोई नहीं

प्र.2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिये :

1 × 7 = 7

- (i). $\tan(x^2 + 5)$ का x के सापेक्ष अवकलन होगा |
- (ii). 2×3 कोटि के आव्यूह में अवयवों की संख्या है |
- (iii). रेखिक अवकल समी. $\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sin x$ का समाकलन गुणांक (I.F.) है |
- (iv). यदि \vec{a} व \vec{b} लम्बवत हो तो $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dots\dots\dots$.
- (v). पंक्ति आव्यूह में पंक्तियों की संख्या होती है।
- (vi). यदि A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं तो $P(A \cup B) = \dots\dots\dots$
- (vii). सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ में अवयव 6 का उपसारणिक है |

प्र.3. सही जोड़ी मिलाइए :

1 × 6 = 6

(i). $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

(a) $\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$

(ii). $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(b) $\frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$

(iii). $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

(c) $\sin^{-1} \frac{x}{a} + c$

(iv). $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

(d) $\log |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$

(v). $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$

(e) $\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-2} \frac{x}{a} + c$

(vi). $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

(f) $\frac{1}{2} x \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \log |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c$

प्र.4. एक वाक्य/शब्द में उत्तर लिखिए :

1 × 7 = 7

(i). $\begin{vmatrix} \operatorname{cosec} 30 & \cos 0 \\ \cot 45 & \tan 45 \end{vmatrix}$ मान है ?

(ii). एक वृत्त की तृज्या $r = 3\text{cm}$ पर r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है क्या है ?

(iii). $\cot^{-1} x$ का प्रांत लिखिये

(iv) सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ के अनुदिश एक मात्रक सदिश लिखिए ।

(v). दो बिन्दुओं (1,2,3) एवं (2,3,4) को मिलाने वाली रेखा के दिक् अनुपात लिखिए ।

(vi). दो घटनाओं E और F को क्या कहते हैं यदि $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$

(vii) $\cot(\tan^{-1} a + \cot^{-1} a)$ का मान लिखिये ।

प्र.5. निम्नलिखित के लिए सत्य/असत्य लिखिए :

1 × 6 = 6

(i). $f: X \rightarrow Y$ एक आच्छादक फलन है यदि और केवल यदि f का परिसर = Y

(ii). $\sin^{-1} x = (\sin x)^{-1}$

(iii). प्रत्येक अवकलनीय फलन सतत् होता है।

(iv). $(x^2 + y^2)dx = (x^2 + xy)dy$ एक समघातीय अवकल समीकरण है ।

(v). एक दिए हुए वृत्त में खींचे गए सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल न्यूनतम होता है।

(vi). दो सदिशों के योग के लिए साहचर्य नियम का पालन होता है ।

प्र.6. यदि $A = \{1, 2, 3, \}$ $B = \{4, 5, 6, 7\}$ तथा $f = \{(1, 4) (2, 5) (3, 6)\}$ A से B पर एक फलन है तो दिखाएँ कि f एकैकी है।

2

अथवा

तुल्यता सम्बन्ध को परिभाषित कीजिए ।

प्र.7. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ तथा है तो सत्यापित कीजिये $A'A = I$

2

अथवा

x तथा y ज्ञात कीजिये यदि $x + y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ तथा $x - y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

- प्र.8.** दर्शाइए कि $f(x) = \cos x^2$ द्वारा परिभाषित फलन एक सतत फलन है । 2
 अथवा
 फलन $ax + by^2 = \cos y$ के लिए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।
- प्र.9.** वृत्त के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिये जबकि $r = 5\text{cm}$ 2
 अथवा
 किसी उत्पाद की x इकाईयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रूप में $R(x) = 3x^2 + 6x + 5$ से प्रदत्त है, जब $x = 5$ है तो सीमांत आय क्या होगी ?
- प्र.10.** $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} dx$ का मान ज्ञात कीजिये । 2
 अथवा
 $\int \log x dx$ का मान ज्ञात कीजिये ।
- प्र.11.** दर्शाइए कि $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2\cos^{-1}x$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$ 2
 अथवा .
 $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए ।
- प्र.12.** सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिये । 2
 अथवा
 सदिशों $\hat{i} \pm 2\hat{j} + 3\hat{k}$, और $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच कोण ज्ञात कीजिए ।
- प्र.13.** एक रेखा के दिक् कोज्याएँ ज्ञात कीजिए जो निर्देशाक्षों के साथ समान कोण बनाती है । 2
 अथवा
 रेखा $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+6}{2}$ का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए ।
- प्र.14.** सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ और $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 2
 अथवा
 दो बिन्दुओं $P(2,3,4)$ तथा $Q(4,1,-2)$ को मिलाने वाले सदिश का मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए।
- प्र.15.** $P(A/B)$ का मान क्या होगा यदि $P(B)=0.5$ और $P(A \cap B) = 0.32$ 2
 अथवा
 यदि A और B स्वतंत्र घटनाएँ दी गई हैं $P(A) = 0.3, P(B) = 0.6 P(A \cap B)$ ज्ञात कीजिए ।
- प्र.16.** $9x^2 + 16y^2 = 144$ व सरल रेखा $x = 2$ से खंडित लघु भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये । 3
 अथवा
 वक्र $y = x$ का x -अक्ष तथा रेखाओं $x = -1, x = 2$ के घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये ।
- प्र.17.** अवकल समीकरण $\sec^2 x \tan y dy + \sec^2 y \tan x dx = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए । 3
 अथवा
 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$ को हल कीजिए ।

प्र.18. फलन $\sin x + \cos x$ का महत्तम मान ज्ञात करो । 3

अथवा

सिद्ध कीजिए कि एक दिए हुए वृत्त में खींचे गए सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल उच्चिष्ठ होता है

प्र.19. निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत, $Z = 3x + 2y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए 3

$$\begin{aligned}x + y &\geq 8 \\3x + 5y &\leq 15 \\x &\geq 0, y \geq 0,\end{aligned}$$

अथवा

निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत, $Z = 3x + 4y$ का अधिकतमीकरण कीजिए
 $x + y \leq 4, \quad x \geq 0, y \geq 0,$

प्र.20. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि - 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

अथवा

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $A^2 - 4A - 5I = 0$ तथा A^{-1} ज्ञात कीजिये ।

प्र.21. दर्शाइए कि फलन $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right); & x \neq 0 \\ k & ; x = 0 \end{cases}$ $x = 0$ पर सतत् है । 4

अथवा

यदि $y^x = x^y$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए

प्र.22. रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए । 4

अथवा

दर्शाइए कि बिन्दु $(2,3,4), (-1,-2,1), (5,8,7)$ संरेख है।

प्र.23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ का मान ज्ञात कीजिये । 4

अथवा

$\int (2x-5)\sqrt{2+3x-x^2} dx$ का मान ज्ञात कीजिये ।
